



Université de Fianarantsoa
Ecole Nationale d'Informatique

**MEMOIRE POUR L'OBTENTION DU DIPLOME
D'ETUDES APPROFONDIES EN INFORMATIQUE**

Intitulé:

**« MODELISATION STOCHASTIQUE POUR L'EVA-
LUATION DES STOCK-OPTIONS »**

Présenté par :

Philibert ANDRIAMANANTENA

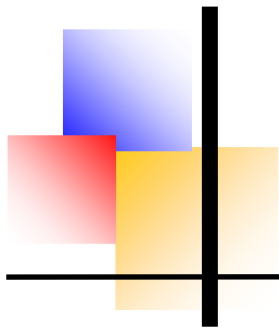
MEMBRES DE JURY :

**Président de jury : Pr. RAZAFIMANDIMBY Josvah
Paul**

**Examineur : Pr. RAMAMONJISOA Andriantiana
Bertin Olivier**

**Rapporteur : Docteur RAFILIPOJAONA, Maitre de
conférences**

Année Universitaire 2010-2011



UNIVERSITE DE FIANARANTSOA
ECOLE NATIONALE D'INFORMATIQUE

**MEMOIRE POUR L'OBTENTION DU DIPLOME
D'ETUDES APPROFONDIES EN INFORMATIQUE**

Intitulé :

**« MODELISATION STOCHASTIQUE POUR L'EVALUA-
TION DES STOCK-OPTIONS »**

Présenté par :

Philibert ANDRIAMANANTENA

MEMBRES DE JURY :

Président de jury : Pr. RAZAFIMANDIMBY Josvah Paul

**Examineur : Pr. RAMAMONJISOA Andriantiana
Bertin Olivier**

**Rapporteur : Docteur RAFILIPOJAONA, Maitre de
conférences**

Année Universitaire 2010-2011

REMERCIEMENTS

Avant tout, j'adresse mes vifs remerciements à Dieu tout puissant qui m'a toujours donné la force d'accomplir mes devoirs et mes responsabilités.

Je tiens, à travers ce modeste travail, à exprimer ma plus profonde gratitude envers les personnes suivantes :

- le Docteur Fontaine RAFAMANTANANTSOA, Directeur de l'Ecole Nationale d'Informatique de l'Université de Fianarantsoa, pour m'avoir permis de suivre la formation initiale de recherche à l'Ecole Nationale d'Informatique,
- le Docteur RAFILIPOJAONA, Maître de conférences à l'Université de Fianarantsoa, pour sa fraîcheur d'esprit, pour ses conseils judicieux, pour l'infinie patience qu'il a prodigué tout au long de ce travail en sa qualité de rapporteur,
- le Professeur RAZAFIMANDIMBY Josvah Paul pour avoir accepté de présider la commission de jury pour la soutenance,
- le Professeur RAMAMONJISOA Bertin Olivier Andriantiana, d'avoir accepté de juger ce travail et d'en être l'examineur,
- tout le personnel administratif de l'ENI pour sa sympathie et sa collaboration,
- tous les collègues pour leur précieux soutien moral, et leur encouragement,
- les membres de la famille, pour leur soutien moral, leur soutien financier et matériel, et pour leur sacrifice.

LISTE DES ABREVIATIONS

AGE: Assemblée Générale Extraordinaire

APB : Accounting Public Board

CA : Conseil d'Administration

CAC40: Cotation Assistée en Continue sur un échantillon de 40 valeurs les plus liquides du marché

CBOE: Chicago Board Options Exchange

CME: Chicago Mercantile Exchange

ESO: Employee Stock-Options

ETF: Exchange Traded Fund

IFRS: International Financial Reporting Standard

OPCVM: Organisme de Placement Collectif en Valeur Mobilière

PF: Portefeuille

SFAS: Sector Financial Accounting Standard

LISTE DES TABLEAUX ET DES FIGURES

LISTE DES TABLEAUX

Tableau 01 : Pay-off des portefeuilles PF1 et PF2.....	17
Tableau 02 : Pay-off du portefeuille π	19
Tableau 03 : Résultats d'études statistiques sur l'exercice des stock-options.....	84
Tableau 04 : Test d'égalité des moyennes des modèles d'évaluation.....	86

LISTE DES FIGURES

Figure 01 : Relation entre valeur intrinsèque et valeur marchande d'une option d'achat	11
Figure 02 : Logigramme pour le calcul de la volatilité implicite.....	60
Figure 03 : Les scénarios d'exercice des options.....	68
Figure 04 : Trajectoire de S	72
Figure 05 : Densité de \mathcal{T}_b	76
Figure 06 : Densité de \mathcal{T}_λ	76
Figure 07 : Courbe de C_b à valeur dans \mathbb{C}	77
Figure 08 : Courbe de C_b à valeur réelle.....	78
Figure 09 : Courbe de C_c	79
Figure 10 : Histogramme de distribution de la valeur de l'ESO et principales statistiques.....	81
Figure 11 : Comparaison des ESO et Black & Scholes en fonction de S_{T_0}	85
Figure 12 : Comparaison des ESO et Black & Scholes en fonction de S_{T_0} et K	87
Figure 13 : Comparaison des ESO et Black & Scholes en fonction de σ	88
Figure 14 : Comparaison des ESO et Black & Scholes en fonction du taux d'intérêt r ...	89
Figure 15: Comparaison des ESO et Black & Scholes en fonction de la maturité T	90
Figure 16 : Comparaison des ESO et Black & Scholes en fonction de T_0	91
Figure 17 : Comparaison des ESO et Black & Scholes en fonction de L	92
Figure 18 : Comparaison des ESO et Black & Scholes en fonction de α	93

SOMMAIRE	Page
REMERCIEMENTS	i
LISTE DES ABREVIATIONS	ii
LISTE DES TABLEAUX ET DES FIGURES	iii
SOMMAIRE	iv
INTRODUCTION GENERALE	1
Chapitre 1 : THEORIE DES OPTIONS ET ELEMENTS DE CALCUL STOCHASTIQUE	7
Section 1 : FONDEMENTS POUR L'EVALUATION D'UNE OPTION	9
Section 2 : CALCUL STOCHASTIQUE ET EVALUATION DES PRODUITS DERIVES	25
Section 3 : OPTIONS SUR INDICES BOURSIERS	35
Chapitre 2 : MODELE DE BLACK & SCHOLES	40
Section 1 : EVALUATION D'UNE OPTION AVEC LE MODELE DE BLACK & SCHOLES	42
Section 2 : VOLATILITE	57
Chapitre 3 : VALORISATION DES STOCK-OPTIONS	62
Section 1 : ETAT DE L'ART	63
Section 2 : APPROCHE ANALYTIQUE	67
Section 3 : APPROCHE PAR SIMULATION DE MONTE-CARLO	74
Section 4 : RESULTATS ET COMMENTAIRES	82
Section 5 : LIMITES DU MODELE ET AMELIORATIONS POSSIBLES	93
CONCLUSION GENERALE	96
GLOSSAIRE	I
ANNEXES	VI
REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES	XXVI
TABLE DES MATIERES	XXIX
RESUME	XXXII

INTRODUCTION GENERALE

Les options sur actions ont fait leur apparition, dès la fin du 17^{ème} siècle en Grande-Bretagne, et au 18^{ème} siècle aux Etats-Unis, mais les contrats négociés n'étaient pas standardisés, les marchés n'étaient pas réglementés, de plus ces marchés n'ont consisté jusqu'en 1973, qu'en des marchés primaires ; les opérateurs étant pratiquement privés de la possibilité de se défaire, à tout moment, de leur contrat sur un marché secondaire actif.

Depuis les années 90, actions et options sur actions sont devenues fréquemment des éléments de rémunération pour les dirigeants et, de plus en plus pour les collaborateurs. Les stock-options sont des options d'achat (ou calls) d'actions d'une entreprise, accordées à des dirigeants, des cadres dirigeants et parfois à des catégories plus larges de personnel œuvrant dans cette entreprise [2].

Les options octroyées ont une certaine valeur, et cette valeur peut être significative pour les bénéficiaires, au regard de leur rémunération salariale annuelle et au regard de leur patrimoine existant. La valeur des stock-options peut alors également être non négligeable au regard de la capitalisation des entreprises dans lesquelles ils ont été octroyés.

La définition des modalités de rémunération des dirigeants des entreprises s'inscrit de façon plus générale dans un cadre de gouvernance d'entreprise. Dès lors que des sociétés ne sont plus dirigées par leurs actionnaires, des conflits d'intérêts surgissent inévitablement entre dirigeants et actionnaires. Les différends peuvent concerner les prélèvements opérés par les dirigeants pour leur compte, les dépenses somptuaires, les recrutements de proximité, mais aussi les politiques d'investissement, ou encore les stratégies d'enracinement des dirigeants, qui tenteront de rendre leur révocation la plus coûteuse possible. Il s'agit alors, par une politique incitative, d'influencer les dirigeants afin qu'ils agissent dans l'intérêt de leurs mandants, les actionnaires. Cette politique incitative se fonde notamment sur les modalités de rémunération. Une manière de faire converger les intérêts des dirigeants vers ceux des actionnaires consiste à leur assurer une rémunération fondée sur la valeur pour les actionnaires, le cours de l'action. Le dirigeant sera en

permanence sensible à l'évolution de l'indicateur clé pour l'actionnaire, et est supposé agir dans l'intérêt de celui-ci. Un instrument est principalement utilisé pour assurer cette convergence d'intérêt : les stock-options [44].

La distribution de stock options se traduirait par une meilleure correspondance entre la valeur de l'entreprise, et la rémunération de ses dirigeants et partant, selon cette « hypothèse d'incitation », par davantage d'investissement et d'endettement. En fait, tout contrat qui cède une part du capital aux dirigeants serait de ce point de vue optimal : à la limite, cette approche incite à ce que le dirigeant soit aussi le propriétaire de l'entreprise. Toutefois, cette conclusion, qui pourrait être valable pour une petite entreprise, ne l'est pas pour une grande que le dirigeant n'a pas les moyens de posséder ; en outre, l'aversion au risque du dirigeant l'incite à ne pas placer tout l'aléa de sa rémunération sur le même risque, celui de son entreprise [45].

Le contrat optimal concilie donc incitations, et partage des risques [45]. Hall et Liebman (1998) [46] partent de cette conclusion pour évaluer les formes de rémunérations des dirigeants d'entreprises. Selon eux, ces rémunérations sont effectivement sensibles aux résultats de l'entreprise ; elles le sont de plus en plus grâce à la diffusion aux dirigeants d'options sur actions.

Une motivation supplémentaire serait de signaler au marché la confiance des actionnaires, qui distribuent les stock-options, et celle des dirigeants, qui acceptent cette forme de rémunération, dans la croissance de leur entreprise. Selon cette théorie, dite du signal, la distribution de stock options témoignerait, à l'intention des investisseurs, d'une éventuelle sous-évaluation boursière de la firme. Plus encore, la détention de stock options inciterait les cadres à annoncer plus systématiquement les informations qu'ils possèdent dans la mesure où ces annonces feront varier le niveau de l'actif qu'ils possèdent [47]. Du point de vue des actionnaires, le salarié devrait prendre des décisions et faire certains efforts qui lui coûtent et qui sont difficiles à observer pour les actionnaires: dans cette situation d'aléa moral, le salarié a de l'information privée sur ses efforts, et leurs effets que des contrats à base de stock options permettent de révéler [45].

Même si l'octroi d'options ne transfère pas de valeur de l'entreprise vers les bénéficiaires, comme le ferait un salaire, mais des actionnaires de l'entreprise vers les bénéficiaires, les nouvelles normes comptables IFRS2 [1] imposent aujourd'hui, de valoriser les options accordées et d'enregistrer cette valeur en charge. Une évaluation correcte des stock-options est donc devenue importante du point de vue

de la gestion des entreprises. En effet, il s'agit d'évaluer à leur juste valeur, tous les paiements fondés sur des actions, comme les plans de stock-options ou les « Stock Appreciation Rights ». C'est l'objectif ultime du présent mémoire.

Evaluer à leur juste valeur les stock-options, c'est construire un modèle mathématique permettant de les valoriser. Trouver un bon modèle conduit aux origines de la mathématisation de la finance moderne. Il s'agit de la thèse de Louis Bacheliers intitulée « Théorie de la spéculation » soutenue à la Sorbonne en 1900 [27]. Cette approche fut oubliée durant près de trois quart de siècle, jusqu'en 1973 avec la parution des travaux de Black & Scholes [4]. Ces travaux marquent la naissance des processus stochastiques à temps continu d'une part, et celle des stratégies à temps continu pour couverture de risque d'autre part.

Une des caractéristiques d'un modèle pour l'évaluation des options est que le prix de l'action est une fonction continue de temps. Or certains événements rares peuvent entraîner des variations brutales des cours. Pour mieux modéliser les risques associés à ces variations soudaines des prix de marché, on utilise les processus à trajectoires continues. Ce qui a permis de choisir le thème y afférent intitulé : **« MODELISATION STOCHASTIQUE POUR L'EVALUATION DES STOCK-OPTIONS »**.

Le but de ce travail est justement l'étude de ces processus afin de trouver une formule d'évaluation pour la valorisation à sa juste valeur des plans de stock-options. Pour cela, on introduira les notions et concepts tels que : le calcul stochastique, la chaîne de Markov, le mouvement Brownien, le processus de Lévy et bien entendu le processus d'Itô.

Deux questions peuvent être posées à ce niveau :

- a) Quel est, parmi les modèles proposés, le meilleur modèle de couverture pour une évaluation des ESO ?
- b) Ce modèle considéré comme valable aujourd'hui le serait-il encore demain ?

Ce mémoire est composé de trois chapitres :

Le premier chapitre, constitué de trois sections, est consacré à l'analyse des fondements de la détermination de la valeur d'une option. La première section est

Modélisation Stochastique pour l'Evaluation des Stock-options

consacrée à des généralités sur les options, aux déterminants de sa valeur ainsi qu'à ses limites d'arbitrage. La deuxième section porte sur les différents fondements du calcul stochastique. La troisième section est consacrée à la définition d'un indice boursier et d'un tracker, et traite les différents risques spécifiques à une option sur indice boursier.

Le second chapitre traite de l'évaluation d'une option par le modèle de Black & Scholes. Il comporte deux parties : la première est consacrée au modèle de Black & Scholes, et la seconde est consacrée au calcul de la volatilité, aussi bien dans sa forme implicite que historique.

Le dernier chapitre répond à la problématique posée sous forme des questions, mais également avec les apports personnels de l'étudiant. Cette partie est constituée à son tour de cinq sections : la première section étudie l'état de l'art ; la deuxième section traite de l'approche analytique ; la troisième porte sur à l'approche par la simulation de Monte-Carlo ; la quatrième concerne les résultats et commentaires, et la dernière section est consacrée aux limites du modèle et aux améliorations possibles.

Le succès des stock-options outre en Atlantique et la mise en application des nouvelles normes comptables ont favorisé l'émergence d'une littérature abondante dans le domaine. Cependant, il n'existe que peu de documents scientifiques qui traitent spécifiquement de l'évaluation de telles options dans l'esprit de la norme IFRS2 [1]. On peut citer l'article de Frédéric Planchet et Pierre Therond (2003) [18] qui pose les bases réglementaires et fiscales des plans de stock-options, et évalue l'engagement « fair value » de l'entreprise à l'aide d'un modèle simple et l'article de Didier Maillard (2005) [26] qui traite de la valorisation des stock-options.

Un grand nombre d'auteurs ont tenté de faire une synthèse numérique de l'ensemble des facteurs fondamentaux qui influencent le prix de toute option sur un marché financier, et de calculer la valeur théorique d'une prime de risque. Dans ce contexte, il existe deux démarches essentielles qui sont respectivement le modèle de Black & Scholes [4] et le modèle binomial.

A l'origine, la formule binomiale d'évaluation s'intéresse aux options européennes dont le support ne verse pas de dividendes, puis elle est ensuite étendue successivement aux options sur titres versant des revenus [42], aux options sur contrats « futures » [43], aux options sur devises étrangères [29] et aux options

américaines [28]. Cette formule repose sur une hypothèse fondamentale qui est une condition d'équilibre imposée aux actifs, connue sous le nom d'absence d'opportunité d'arbitrage (qui permet de trouver le prix d'équilibre partiel d'un actif par rapport aux valeurs de marché d'autres actifs) : les prix des actifs sont tels qu'ils doivent rendre impossible la réalisation d'un profit d'arbitrage sans risque. Dans ce contexte, la formule d'évaluation binomiale permet d'évaluer une option par rapport au prix de son support en supposant que le prix de l'action reflète toute l'information pertinente à l'évaluation d'un put ou d'un call puisque les calls et les puts sont évalués par rapport à une seule variable d'état qui est le prix de l'action sous-jacente. Ce faisant, cette formule d'évaluation des calls et des puts permet d'exhiber les paramètres ayant une influence directe sur les prix de ces options.

Cependant, le modèle binomial pose un problème dans la mesure où l'évolution du prix d'une action est caractérisée par une dynamique en temps discret. Or, d'un point de vue pratique, une évolution en temps discret semble peu réaliste en vertu de la fréquence des cotations sur le marché qui est telle que le prix d'une action se présente comme une donnée continue. La réponse à cette objection prônant une évolution continue du prix de l'action est donnée par le modèle d'évaluation des options de Black & Scholes [4]. Ce modèle est d'ailleurs considéré comme un cas limite du modèle binomial (lorsque l'on fait tendre le nombre de périodes d'ici à l'échéance vers l'infini, auquel cas la loi binomiale caractéristique de l'évolution du prix de l'action converge, d'après le théorème central limite, vers une loi gaussienne).

Robert C. Merton et Myron S. Scholes, en collaboration avec Fisher Black, ont développé une formule révolutionnaire pour l'évaluation des options sur actions (« les stock options »). En 1973, Black & Scholes ont publié une formule simple d'évaluation du juste prix d'un call européen sur une action, formule que Merton déduisait et clarifiait dans la même année par application d'une autre méthode analogue, en physique, à la résolution de l'équation de diffusion de la chaleur dans un univers unidimensionnel. Sur sa lancée, Merton généralise cette formule dans plusieurs directions (c.-à-d. : à plusieurs types d'instruments financiers), montrant ainsi que cette approche s'applique à tout actif contingent versant une certaine somme à la date d'échéance du contrat.

Le standard de la valorisation des options sur actions est la méthode de Merton, qui consiste en une adaptation de la méthode de Black & Scholes [4] pour tenir compte

de la distribution de dividendes. La méthode d'évaluation repose sur l'hypothèse que l'évaluation future de la valeur de l'action est aléatoire, et que la variation de sa valeur sur une courte période suit une distribution normale. Il en résulte que la valeur future de l'action suit une loi log-normale. Cependant, la méthode de Merton [42] peut être remise en cause, et doit souvent l'être, pour tenir compte d'écarts entre les hypothèses sur lesquelles la méthode repose et la réalité. La source de ces écarts peut tenir à des facteurs généraux, liés à la nature des stock-options, ou à des facteurs particuliers, liés à l'action sur laquelle les options sont basées ou sur les clauses particulières des contrats les établissant. Ainsi, le modèle de Merton peut être adapté pour tenir compte de la variabilité, et du caractère stochastique des taux d'intérêt dans une perspective de long terme [26].

Les méthodes de Merton [42] et de Black & Scholes [4] reposant sur une hypothèse de distribution normale des rendements, et de volatilité constante ne permettent pas d'évaluer correctement les options [26]. C'est pourquoi ce présent mémoire opte au choix de modèle stochastique.

**Chapitre I : THEORIE DES OPTIONS ET ELEMENTS DE
CALCUL STOCHASTIQUE**

Les modèles paramétriques d'évaluation des options se basent sur un certain nombre d'hypothèses, et font appel à la théorie des actifs conditionnels ainsi qu'à des outils de mathématiques financières, et à des propriétés des variables d'états qui les déterminent.

Le but du présent chapitre est de présenter ces propriétés et ces outils qui vont servir de base pour les modèles paramétriques développés dans le cadre de ce travail. Cette présentation va jusqu'au développement des démonstrations des résultats les plus utiles pour le présent mémoire.

Ce chapitre, composé de trois sections, traite l'analyse des fondements de la détermination de la valeur d'une option. La première section est consacrée à des généralités sur les options, des déterminants de sa valeur, ainsi que des limites d'arbitrage. Elle est également consacrée d'une part aux fondements des hypothèses relatives au marché sur lesquelles reposent les modèles d'évaluation des options. Cette section traite aussi des conditions aux limites liées à l'évaluation d'une option ainsi qu'à la relation de parité call-put.

La deuxième section porte sur les différents fondements du calcul stochastique. De la définition de la propriété de Markov, jusqu'à l'élaboration de l'équation de Fokker-Planck relative à une variable d'état, en passant par les propriétés des processus stochastiques, utilisés dans le présent mémoire, le lemme d'Itô dans le cas général et par l'évaluation avec un raisonnement risque-neutre.

L'équation de Fokker-Planck est appliquée au processus empirique, au processus d'Ornstein Uhlenbeck et au mouvement brownien pour étudier leurs propriétés à long terme. Cette deuxième section se termine par l'élaboration de l'équation générale d'évaluation d'une option (Garman, 1976) [29], dans le cas où la valeur de celle-ci dépend de n variables d'états.

La troisième section est consacrée à la définition d'un indice boursier et d'un tracker, et traite les différents risques spécifiques à une option sur un indice boursier. Elle se termine par l'élaboration du processus suivi par un indice boursier compte tenu des processus des actions le composant.

Section 1 : FONDEMENTS POUR L'EVALUATION D'UNE OPTION

1-1 Valeur d'une option et ses déterminants

1-1-1 Définition et généralités sur les contrats d'options

Une option est un contrat qui confère à son détenteur le droit d'acheter ou de vendre une certaine quantité d'actif sous-jacent à un prix prédéterminé, et ce pendant une période de temps donné. Un tel contrat représente un droit et non une obligation pour son détenteur. En d'autres termes, l'investisseur n'est pas contraint d'acheter ou de vendre l'actif financier. Pour une option européenne, la décision d'exercer ou de ne pas exercer ce droit aura lieu à l'échéance du contrat. Par contre, pour une option de type américain, cette décision peut avoir lieu à n'importe quel moment de la vie du contrat. La plupart des options standardisées négociées aujourd'hui sur l'ensemble de la planète sont des options américaines. La plupart des options européennes sont aujourd'hui négociées sur le marché de gré à gré des options sur action, ainsi que sur le marché interbancaire de change [18].

Il existe deux types d'options : les options d'achat (call) et les options de vente (put) [18]:

Un call est un contrat qui confère à son détenteur le droit (et non l'obligation) d'acheter l'actif sous-jacent à un prix fixé d'avance durant une période de temps donné.

Un put est un contrat qui confère à son détenteur le droit (et non l'obligation) de vendre l'actif sous-jacent à un prix prédéterminé durant une période donnée.

Autant l'acheteur d'un contrat d'option a le choix d'exercer ou non son droit, autant, le vendeur d'un contrat d'option est totalement soumis à la décision de l'acheteur d'option. En contrepartie, le vendeur du contrat d'option reçoit de l'acheteur une somme égale au prix de marché de l'option, appelée prime de l'option.

Les options se distinguent également par l'actif sur lequel elles portent, autrement dit l'actif sous-jacent. Celui-ci peut être une action, une obligation un tracker, ...

1-1-2 Les déterminants exogènes de la valeur d'une option

La valeur d'une option dépend du prix de l'actif support, du prix d'exercice, de taux d'intérêt sans risque, de l'échéance et de la volatilité du prix de l'action.

1-1-2-1 Cours du sous-jacent

De manière classique, la valeur de l'option se décompose en valeur intrinsèque ou valeur minimale et une valeur marchande (c.-à-d. la prime) qui est établie par le truchement de l'offre et de la demande. La valeur marchande d'une option d'achat ne peut être inférieure à sa valeur intrinsèque car elle correspond à la valeur intrinsèque plus la valeur-temps ou sur cote.

La valeur intrinsèque d'une option représente ce que serait la valeur du contrat si son échéance intervenait immédiatement. Elle correspond donc à la différence entre le prix de l'action et le prix d'exercice de l'option. Elle est donc positive ou nulle, selon que l'option pourrait ou non être exercée par son détenteur [20].

$$V_p = \begin{cases} S - K, & \text{si } S > K \\ 0, & \text{si } S \leq K \end{cases}$$

Où Valeur intrinsèque = $\max [S - K, 0]$

Où S : prix de l'action ordinaire

K : prix d'exercice ou de levée de l'option d'achat

Modélisation Stochastique pour l'Evaluation des Stock-options

Considérons un contrat d'option portant sur 100 actions dont le prix d'exercice est de 60 Ar.

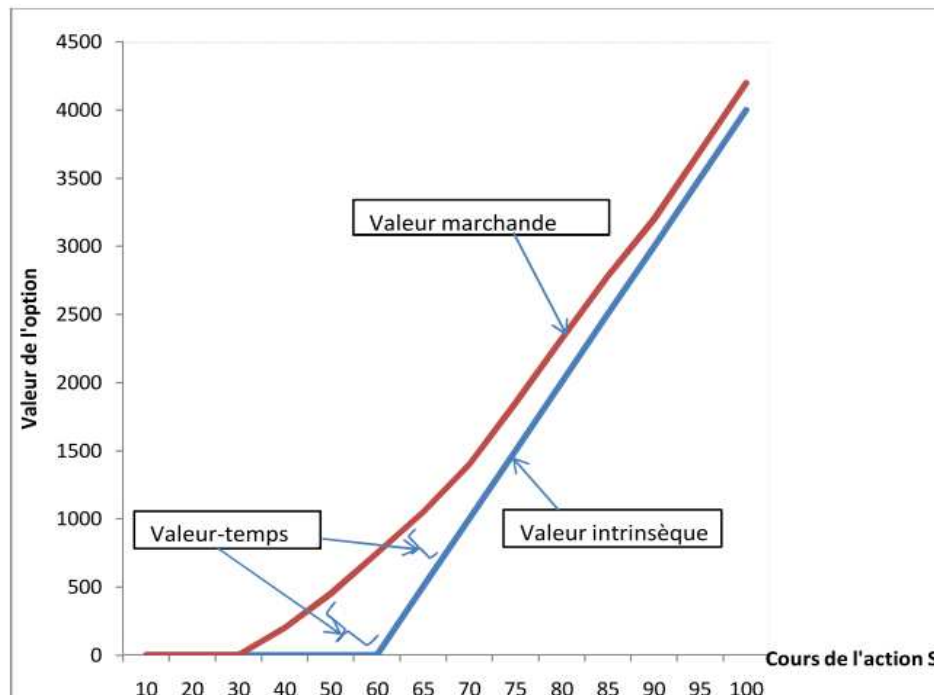


Figure 01 : Relation entre valeur intrinsèque et valeur marchande d'une option d'achat

Comme l'indique la figure 01, la valeur intrinsèque d'une option d'achat (call) est nulle lorsque le cours de l'action S est inférieur, on dit de l'option d'achat qu'elle est « en dehors ou hors jeu » (out of the money) ou égal, l'option est dite « au milieu ou à parité » (at the money), au prix d'exercice K de l'option. Elle devient positive lorsque le cours de l'action excède le prix d'exercice, on dit de l'option qu'elle est « en dedans ou en jeu » (in the money).

En ce qui concerne l'option de vente (put), la valeur intrinsèque n'est différente de zéro que si le cours de l'action est inférieur au prix d'exercice (en dedans). Elle est donc égale au prix d'exercice diminué du cours de l'action [20]:

$$V_p = \begin{cases} K - S, & \text{si } S < K \\ 0, & \text{si } S \geq K \end{cases}$$

$$\text{Où } V_p = \max [K - S, 0]$$

La valeur temps ou sur cote d'une option représente le surplus de la valeur de cette dernière par rapport à sa valeur intrinsèque, étant donné le temps qui lui reste à courir. Tant qu'il existe une probabilité de pouvoir exercer l'option à l'échéance et, par-là même de réaliser un bénéfice, les investisseurs sont prêts à payer une valeur sur cote pour détenir le contrat d'option.

Dans le cas de l'option d'achat, lorsque le cours de l'action est largement inférieur au prix d'exercice, la probabilité d'exercer l'option d'achat est faible, et la valeur sur cote aura une valeur proche de zéro puisque aucun investisseur ne sera intéressé par ce type de contrat [26]. Par contre, dès que le cours de l'action s'élève, et se rapproche du prix d'exercice, la probabilité que la hausse continue dans le temps augmente, et donc les chances de pouvoir exercer l'option s'accroissent. Les investisseurs seront intéressés par ce contrat d'option et acceptent de payer progressivement une valeur sur cote de plus en plus importante. La valeur sur cote atteint sa valeur maximale lorsque le cours de l'action égalise le prix d'exercice. Lorsque le cours de l'action dépasse le prix d'exercice, la valeur sur cote commence à décroître. En effet, plus le cours de l'action augmente, plus il devient probable, et même certain que l'option sera exercée à l'échéance. Les investisseurs ne sont pas disposés à payer une valeur sur cote pour la détention d'une telle option dont la valeur est jugée très élevée.

1-1-2-2 Taux d'intérêt à court terme

Dans la mesure où l'achat d'une option d'achat nécessite un investissement initial inférieur à celui de l'achat ferme du sous-jacent, le détenteur d'une option d'achat peut placer les capitaux provisoirement épargnés au taux d'intérêt sans risque pendant toute la durée du contrat d'option. Ainsi, plus le taux d'intérêt sans risque est élevé, plus l'avantage de l'achat d'une action par le biais de l'option sur achat ferme de cette même action est important, et par conséquent plus la valeur de l'option est élevée [28].

Sous un angle mathématique, un taux d'intérêt élevé implique une valeur de l'option d'achat représentée par la différence $S - Ke^{-r(T-t)}$ [19] plus élevée. Où r , T , t représentent respectivement le taux de rendement de l'option, l'échéance de l'option et l'instant duquel l'exercice est possible ou non.

L'achat d'une option de vente, en comparaison avec la vente ferme des actions entraîne, outre le décaissement de la prime, un retard dans l'encaissement du montant de la vente des actions qui n'intervient qu'au moment de l'exercice de l'option. La valeur de l'option de vente représentée par $Ke^{-rt} - S$ [19] est donc d'autant plus faible que le taux d'intérêt sans risque est élevé.

1-1-2-3 Durée de vie de l'option

Le pari sur l'évolution du cours de l'action, fait par l'acheteur d'une option (à la hausse ou à la baisse), a d'autant plus de chances d'être gagné que l'échéance est lointaine. En effet, l'éloignement de l'échéance augmente les possibilités de variation du cours de l'action et donc la probabilité d'exercice de l'option.

Les options peuvent être classées en fonction de leurs échéances, en options à court terme et en options à long terme. Les premières ont des échéances qui sont très rarement supérieures à 6 mois à l'inverse des dernières et, plus particulièrement des warrants dont l'échéance peut atteindre 18 mois, 2 ans, voire 5 ans et plus [22].

1-1-2-4 Prix d'exercice de l'option

Une option d'achat a une probabilité d'autant plus forte de finir en dedans et donc d'être exercée que son prix d'exercice est faible. Sa valeur est alors une fonction décroissante de son prix d'exercice. A l'inverse, la probabilité d'exercer une option de vente est d'autant plus importante que son prix d'exercice est élevé. La valeur de l'option de vente est par conséquent une fonction croissante de son prix d'exercice [36].

1-1-2-5 Volatilité de l'action

La volatilité de l'action est représentée par l'écart type annualisé des rendements déterminés à partir des variations relatives des prix de l'actif support de l'option, à savoir le sous-jacent [29].

L'acheteur d'une option est un spéculateur à la hausse (option d'achat) ou à la baisse (option de vente) du titre support. Il est disposé à payer une prime d'autant plus élevée que l'amplitude des fluctuations du cours de l'action est importante, et

donc que son option a des chances de finir en dedans. En fait, plus la volatilité est forte, plus la probabilité que le cours de l'action soit supérieur ou inférieur au prix d'exercice de l'option est élevée.

Ainsi, la valeur de l'option (d'achat ou de vente) est une fonction croissante de la volatilité du sous-jacent. Celle-ci peut être estimée soit à partir des rendements des actions sur une période précédant la date d'émission des options, soit à partir des prix des options observés sur le marché. Ces deux méthodes d'estimation sont connues respectivement par la volatilité historique et la volatilité implicite [29].

1-2 Equilibre arbitrage et efficience d'un marché financier

Dans cette sous section, on se réfère à l'œuvre de Fama E. [30].

1-2-1 Equilibre

Un marché est dit en équilibre si l'offre du produit financier considéré égale sa demande. Cette égalité s'obtient grâce à l'ajustement des prix. Dès lors sur un marché financier en équilibre et suffisamment liquide, tout opérateur trouvera une contrepartie acceptant de traiter au prix du marché. L'équilibre est dit compétitif si aucun agent n'a un poids relatif suffisant pour peser les prix. Il s'ensuit que sur un marché financier en équilibre compétitif, tout opérateur peut acheter ou vendre des quantités arbitraires au prix du marché alors qu'il ne trouvera aucun vendeur acceptant un prix inférieur.

1-2-2 Absence d'opportunités d'arbitrage

L'arbitrage est une opération qui n'implique aucune mise de fonds et qui n'engendre que des flux de trésorerie positifs ou nuls. L'existence d'opportunité d'arbitrage sur un marché est incompatible avec l'équilibre de celui-ci. En effet, l'opportunité d'arbitrage déclenche une offre sur les produits « surcotés » et une demande sur les produits sous-cotés. En revanche, un marché exempt d'opportunité d'arbitrage n'est pas nécessairement en équilibre. La condition d'équilibre est donc plus forte que celle d'absence d'arbitrage, bien que cette dernière conduise dans de nombreux contextes, à des modèles importants et constitue la pierre angulaire de la théorie financière moderne et notamment dans l'évaluation des options.

1-2-3 Efficience

L'équilibre d'un marché financier peut éventuellement résulter d'offres et de demandes émanant d'opérateurs irrationnels et/ou mal informés. Dans telles conditions, le prix d'équilibre n'incorpore pas nécessairement toutes les informations potentiellement disponibles et joue mal son rôle dans l'allocation des ressources.

D'après Fama (1970) [30], un marché est efficient quand à chaque instant, les prix incorporent toute l'information pertinente et disponible.

Quand cette condition d'efficience est satisfaisante, les prix du marché à l'instant précédent l'instant présent incorporent correctement toute l'information disponible pertinente à la prévision des prix futurs et les rendements sont dits normaux.

Selon le système d'information, présumé disponible à l'instant précédent l'instant présent, on considère trois formes d'efficience : l'efficience faible, l'efficience semi-forte, et l'efficience forte.

L'efficience faible est celle d'un marché dont les prix incorporent à chaque instant le seul historique des prix passés. Dans ce cas, les opérateurs ne peuvent tirer parti de la connaissance de la chronique des prix passés pour réaliser des profits anormaux et systématiques.

L'efficience semi-forte est celle d'un marché dont les prix incorporent à chaque instant non seulement la chronique des prix passés, mais également toutes les informations pertinentes rendues publiques. Dans ce cas, les opérateurs ne peuvent tirer parti d'informations rendues publiques pour réaliser des profits anormaux car les prix s'ajustent quasi instantanément dès qu'une information pertinente est annoncée.

Enfin, l'efficience forte est celle qui caractérise un marché dont les prix incorporent toute l'information disponible, qu'elle ait été rendue publique ou non. Sur un tel marché, l'information privilégiée est très rapidement incorporée dans les prix d'équilibre et les profits d'initiés sont pratiquement inexistantes.

1-3 Limites d'arbitrage et relation call-put

1-3-1 Limites d'arbitrage de la valeur d'une option négociable

Pour respecter le principe d'absence d'opportunités d'arbitrage sans risque, une option doit vérifier un certain nombre de conditions qui correspondent à des valeurs limites de l'option considérée.

1-3-1-1 Aucune distribution de dividendes de l'actif sous-jacent

Dans le cas où l'actif sous-jacent ne verse pas de dividendes, les conditions que doit vérifier la valeur d'une option d'achat sont [37]:

Condition 1 :

Une option est un actif financier qui procure une responsabilité limitée. La perte maximale que peut supporter l'acheteur d'un call est la valeur de l'option. De ce fait, la valeur de l'option ne peut être négative : $C \geq 0$.

Condition 2 :

Si à l'échéance, le prix du sous-jacent S_T est supérieur au prix d'exercice K , l'option d'achat est exercée, et sa valeur est $(S_T - K)^+$. Par contre, si à l'échéance le prix du sous-jacent est inférieur ou égal au prix d'exercice de l'option, la valeur de l'option d'achat est nulle : soit $C(S_T, 0, K) = \text{Max}(0, S_T - K)$.

Condition 3:

De toute évidence, le prix d'une option d'achat est une fonction décroissante du prix d'exercice de l'option : $C(S, \tau, K_1) \leq C(S, \tau, K_2)$ si $K_1 \geq K_2$

Condition 4 :

Le prix d'un call ne peut être supérieur à celui de l'actif sous-jacent. En effet, si c'était le cas, un investisseur achèterait le sous-jacent et jamais l'option. On a donc : $C(S, \tau, K) \leq S$.

Comme la valeur de l'option ne peut être négative (condition 1), si la valeur du sous-jacent est nulle, la valeur de l'option sera également nulle et on aura : $C(0, \tau, K) = 0$.

Condition 5 :

Cette condition s'énonce : $C(S, \tau, K) \geq S - Ke^{-r\tau}$

Où $\tau = T - t$ est la durée de vie résiduelle de l'option, t étant la date courante et T la date d'échéance. Cette condition peut être démontrée en considérant deux portefeuilles PF1 et PF2. Le portefeuille PF1 est constitué d'un call sur un actif sous-jacent ne payant pas de dividende, et d'un emprunt qui aura une valeur égale au prix d'exercice du call à son échéance. Le portefeuille PF2 est constitué d'une unité de l'actif sous-jacent.

Le tableau suivant donne les pay-off de ces deux portefeuilles dans le cas où l'option finit en dedans, et dans le cas où l'option finit en dehors.

Tableau 01 : Pay-off des portefeuilles PF1 et PF2

A l'échéance	$S_T < K$	$S_T \geq K$
PF1	K	$(S_T - K) + K = S_T$
PF2	S_T	S_T
Valeur à l'échéance	$V_{PF1} \geq V_{PF2}$	$V_{PF1} = V_{PF2}$

A l'échéance, la valeur du portefeuille PF1 est au moins égale à celle de PF2. Dans l'hypothèse d'absence d'arbitrage, à chaque instant situé entre l'instant présent et la date d'échéance, la valeur du portefeuille PF est au moins égale à celle du portefeuille PF2. On peut donc écrire :

$$V_{PF1}(t) \geq V_{PF2}(t) \Rightarrow C(S, \tau, K) + Ke^{-r\tau} \geq S \Rightarrow C(S, \tau, K) \geq S - Ke^{-r\tau}$$

1-3-1-2 Avec distribution de dividendes de l'actif sous-jacent

Le versement de dividendes engendre une baisse du prix de l'actif sous-jacent. Dans un marché efficient, où il n'existe pas d'opportunités d'arbitrage gagnant sans risque, la baisse du prix de l'actif sous-jacent est égale au montant des dividendes [4].

Si l'on suppose que le montant D des dividendes ainsi que sa date de versement sont connus, la condition 5 devient dans ce cas : $C(S, \tau, K) \geq S - Ke^{-r\tau} - D$. Ceci peut être démontré en considérant les deux portefeuilles suivants :

PF1 : achat d'un call C , et emprunt d'une somme qui aura la valeur K à l'échéance.

PF2 : achat d'une unité du sous-jacent S et emprunt d'une somme égale au dividende D à l'instant présent.

La valeur du portefeuille PF2, à l'échéance, sera égale à S_T puisque l'emprunt au moment D sera remboursé dès la réception des dividendes. A l'échéance, la valeur du portefeuille PF1 est supérieure à la valeur du portefeuille PF2. Dans l'hypothèse d'absence d'arbitrage, à chaque instant situé entre l'instant présent et la date d'échéance, la valeur du portefeuille PF1 est au moins égale à celle du portefeuille PF2. On peut donc écrire :

$$V_{PF1}(t) \geq V_{PF2}(t) \Leftrightarrow C(S, \tau, K) + Ke^{-r\tau} \geq S - D \Leftrightarrow C(S, \tau, K) \geq S - Ke^{-r\tau} - D$$

1-3-2 Relation de parité call-put [19]

Si P désigne le prix d'un put, et C celui d'un call ayant le même sous-jacent S , la même échéance T , et le même prix d'exercice K . Soit le portefeuille constitué de la vente d'un put et de l'achat d'un call.

1-3-2-1 Aucune distribution de dividendes de l'actif sous-jacent

Si l'on considère le portefeuille constitué, à l'instant t , par l'achat d'une unité de l'actif sous-jacent, l'achat d'un put P , et la vente d'un call C . Ainsi, le portefeuille désigné par π aura à l'instant t une valeur égale à :

$$\Pi(t) = S(t) + P(t) - C(t)$$

La valeur de ce portefeuille à l'échéance est tel que :

Si $S \geq K$: $\Pi(t) = S(t) + 0 - (S(t) - K) = K$ le call est exercé et le put n'est pas exercé.

Si $S < K$: $\Pi(t) = S(t) + (K - S(t)) - 0 = K$ le call n'est pas exercé et le put est exercé.

Modélisation Stochastique pour l'Evaluation des Stock-options

La valeur du portefeuille à l'échéance est donc égale au prix d'exercice quelle que soit la valeur du sous-jacent à l'échéance. Ce qui est important de savoir est quelle est la valeur du portefeuille $\pi(t)$ à l'instant considéré t ?

La valeur actualisée de la valeur du portefeuille à l'échéance est $Ke^{-r\tau}$ avec $\tau = T - t$. En supposant qu'on ne peut pas réaliser un profit d'arbitrage sans risque, on peut écrire que $\pi(t) = Ke^{-r\tau}$ d'où la relation de parité call-put dans le cas où le sous-jacent ne paye pas de dividendes :

$$S(t) + P(t) - C(t) = Ke^{-r\tau}, \text{ Pour tout } t, 0 \leq t \leq T.$$

$$\text{Soit } C(t) - P(t) = S(t) - Ke^{-r\tau} \quad (1-1.1)$$

Ce raisonnement peut être illustré dans le tableau suivant :

Tableau 02 : Pay-off du portefeuille π

	Valeur à t	Valeur à l'échéance T	
		$S_T < K$	$S_T \geq K$
Achat du sous-jacent	$-S(t)$	S_T	S_T
Achat d'un put	$-P(t)$	$K - S_T$	0
Vente d'un call	$C(t)$	0	$S_T - K$
Emprunter	$Ke^{-r\tau}$	$-K$	$-K$
Total = $C(t) - S(t) - P(t) + Ke^{-r\tau}$		0	0

Cette relation est très importante puisqu'elle permet de déduire la valeur d'un put à partir de celle d'un call et vice versa.

1-3-2-2 Avec distribution de dividendes de l'actif sous-jacent

En présence de dividendes, dans le cas discret, la relation de parité put-call (1.1-1) devient : $C(t) - P(t) = S(t) - D - Ke^{-r\tau}$. Ceci peut être démontré, en considérant les portefeuilles suivants :

Le 1^{er} portefeuille PF1 est constitué de l'achat d'un call d'une position cash d'un montant égal à $D + Ke^{-r\tau}$ et de la vente d'une unité de l'actif sous-jacent. Le

montant cash D est destiné à compenser la baisse du prix du sous-jacent due au versement des dividendes.

Le 2^{ème} portefeuille PF2 est constitué uniquement d'un put de même prix d'exercice et de même échéance que le call du portefeuille PF1.

A l'échéance des options, les deux portefeuilles auront la même valeur : $\max(K - S_T ; 0)$.

D'où la relation suivante : $P(t) = C(t) - S(t) + D + Ke^{-rt} \Leftrightarrow C(t) - P(t) = S(t) - D - Ke^{-rt}$.

1-4 Les stock-options

1-4-1 Définition [18]

Une stock-option est un droit, accordé par une entreprise à un salarié ou à un dirigeant, d'acquérir dans le futur un nombre fixé à l'avance d'actions de la société ou d'une entreprise de son groupe [26]:

- a) A un prix fixé lors de l'attribution du droit,
- b) Entre deux dates futures.

Financièrement, les stock-options sont des options comme les autres, c.-à-d. un droit qui a été accordé à son bénéficiaire de réaliser une opération ; droit mais non pas obligation. L'opération faisant l'objet du droit consiste à acquérir une certaine quantité d'actions de l'entreprise à un prix normalement convenu une fois pour toutes, fixé au moment où l'option est octroyée [26].

L'option peut être exercée (on dit aussi « levée »), c.-à-d. que l'opération d'acquisition peut être réalisée à l'intérieure d'une certaine période de validité [18].

En règle générale, les options du type européen ne peuvent pas être exercées avant que quatre ou cinq années se soient écoulées depuis leur octroi, pour des raisons de pénalisation fiscale du bénéficiaire, et de l'entreprise. Et il existe un terme au-delà duquel l'option ne peut plus être exercée, auquel elle expire. Ce terme est souvent de huit ans en Europe aujourd'hui. Dans d'autres pays, comme aux Etats-Unis, les stock-options peuvent souvent être exercées à une échéance sensiblement plus proche, dans un délai de trois ans par exemple, sans que cela fasse encourir une pénalité fiscale excessive [15].

Le détenteur rationnel d'une option qui souhaite exercer celle-ci ne le fera que si, au moment de la levée, le prix de l'action est supérieur au prix convenu pour l'exercice. En effet, s'il ne le fera avec profit que si le prix de vente est supérieur au prix d'achat. S'il ne souhaite pas revendre l'action acquise, il n'a pas non plus intérêt à exercer l'option si le prix de l'action est inférieur au prix d'exercice, car il est plus avantageux alors d'acheter directement l'action sur le marché plutôt que par l'exercice de l'option.

Il existe en pratique deux types de stock-options [26]:

Les options de souscription qui, lorsqu'elles sont exercées, conduisent à la création de nouvelles actions, c.-à-d. à une augmentation de capital.

Les options d'achat qui, lorsqu'elles sont exercées, conduisent à un transfert d'actions entre la société et le détenteur de l'option.

1-4-2 Cadre réglementaire et fiscal [45]

1-4-2-1 Mise en place d'un plan de stock-options

Qu'elles soient cotées ou non, les sociétés anonymes, les sociétés par actions simplifiées et les sociétés en commandite par actions peuvent consentir à leurs salariés, et dirigeants des stock-options.

L'objet de ce paragraphe est de décrire les formalités auxquelles doit se soumettre la société qui souhaite octroyer cet avantage à ses employés.

1-4-2-1-1 Obligations administratives

La décision d'octroyer des options est de la compétence de l'assemblée générale extraordinaire (AGE), statuant sur rapport du conseil d'administration (CA) et sur rapport spécial des commissaires aux comptes, et qui autorise le CA à consentir les options.

Dans le cadre de l'autorisation donnée par l'AGE, le CA fixe les conditions dans lesquelles sont consenties les options. Il peut aussi, s'il l'estime opportun, différer l'octroi des options, voire y renoncer.

Lorsque le CA envisage d'offrir des options d'achat, il doit préalablement à l'ouverture de celles-ci, faire acheter par la société les actions qui seront attribuées aux bénéficiaires s'ils lèvent leurs options. Ce point est particulièrement important

dans l'optique de l'évaluation de l'engagement. La société est expressément autorisée à racheter ses propres actions pour garantir les options d'achat, mais les options doivent être consenties dans le délai d'un an à compter de la date d'acquisition des actions, sous peine d'une amende. La société doit toutefois respecter les limitations quant à la détention par une société de ses propres actions : en effet une société ne peut détenir plus de 10% de ses propres titres.

1-4-2-1-2 Caractéristiques des options

Le prix de souscription ou d'achat des actions

Le prix de souscription ou d'achat des actions est fixé par le CA au jour où l'option est consentie, selon les modalités déterminées par l'assemblée générale extraordinaire sur le rapport des commissaires aux comptes.

Si les actions de la société sont admises aux négociations sur un marché, le prix de souscription ou d'achat ne peut pas être inférieur à 80% de la moyenne des cours cotés aux vingt séances de bourse précédant ce jour. En outre, dans le cas d'options d'achat, le prix de l'action, au jour où l'option est consentie, ne peut pas être inférieur à 80% du cours moyen d'achat des actions détenues par la société.

Si les actions ne sont pas cotées, l'AGE détermine librement les modalités selon lesquelles le CA fixera le prix de souscription ou d'achat (en fonction de critères objectifs tels que le chiffre d'affaires, la marge brute d'autofinancement, les bénéfices ou le montant des capitaux propres).

Le prix fixé pour la souscription ou l'achat des actions ne peut pas être modifié pendant la durée de l'option, sous réserve de la survenance de certaines opérations exceptionnelles : augmentation de capital, émission d'obligations convertibles ou réduction de capital.

Le nombre maximal d'actions qui peuvent être achetées ou souscrites

Le CA détermine librement le nombre maximal des actions qui pourront être souscrites ou achetées par chacun des bénéficiaires sous réserve que les options ouvertes et non encore levées ne donnent pas droit à un nombre d'actions excédent le tiers du capital social.

Le délai d'exercice

Il est fixé par l'AGE. Il est possible de prévoir une période de blocage pendant laquelle les options ne peuvent être exercées. A cette période de blocage, peut s'ajouter une clause, limite dans le temps, d'interdiction de cession des actions.

1-4-2-1-3 Charges pour l'entreprise

Pendant la période qui s'étend de l'attribution à la levée des options, la société émettrice supporte :

Les frais d'acquisition des actions destinées à être remises aux bénéficiaires ;

Les frais de gestion des actions ainsi achetées ou de celles émises en vue de faire face aux offres de souscription.

1-4-3 Exercice des options et ventes des actions

1-4-3-1 Conditions d'exercice des stock-options

Sauf clause contraire expresse, les titulaires des options peuvent exercer leurs droits même s'ils ont quitté la société depuis l'attribution des options, et ce quelle que soit la cause de leur départ. La société est en effet irrévocablement engagée par son offre et n'a pas le pouvoir d'en modifier ultérieurement les conditions d'exercice. C'est pourquoi il est très fréquemment stipulé dans le règlement du plan que les intéressés devront, pour exercer leurs droits, faire partie avec possibilité des salariés qui partent en retraite ou qui doivent cesser leur activité pour cause d'invalidité [7].

En cas de décès du bénéficiaire, ses héritiers peuvent exercer l'option dans un délai de six mois à compter du décès.

1-4-3-2 Ventes des actions

Dès qu'ils ont levé leurs options, et qu'ils sont inscrits en compte, les bénéficiaires peuvent exercer tous les droits attachés aux actions qui leur sont attribués : droit de participer aux assemblées, et d'y voter, droit aux dividendes, droit de communication. Toutefois rien n'interdit de prévoir dans le plan un différé de jouissance [2].

Indisponibilité

Les titres issus de la levée de stock-options sont frappés d'une période de 4 ans à partir de la date d'attribution, pendant laquelle elles ne peuvent être vendues. Cette indisponibilité est levée dans les cas suivants [6]:

- a) Invalidité du titulaire
- b) Décès du titulaire
- c) Licenciement ou mise à la retraite du titulaire, à condition que les options aient été levées au moins trois mois avant la date de l'événement invoqué, c.-à-d. dans le premier cas, au moins trois mois avant la date à laquelle le salarié a reçu la notification de son licenciement et, dans le second cas, trois mois au moins avant la date de cessation du contrat de travail.

1-4-3-3 Fiscalité pour le bénéficiaire [45]

Il est important de bien cerner les aspects fiscaux des stock-options pour le bénéficiaire puisque ce sont eux qui vont déterminer en grande partie le comportement de celui-ci vis-à-vis de l'exercice de l'option ou de la vente des actions par exemple.

Pour calculer l'impôt sur le gain résultant de l'exercice des stock-options, le fisc le décompose en trois parties : le « rabais », la « plus-value d'acquisition », et la « plus-value de cession ». Chacune de ces parties sera grevée d'un impôt différent :

Le rabais est la différence entre le prix d'acquisition et le cours de l'action au moment de l'attribution.

La plus-value d'acquisition est la différence entre le cours d'acquisition et le prix d'acquisition.

La plus-value de cession est la différence entre le cours de cession et le cours d'acquisition.

L'imposition est différente selon la date d'attribution des stock-options.

1-4-3-4 Charges pour l'entreprise [45]

La levée des options est susceptible d'entraîner les charges ou pertes ci-après :

La rémunération des intermédiaires qui enregistrent les levées d'option et les frais d'inscription des actions sur le registre des transferts.

En cas d'offre d'achat, la moins-value correspondant à la différence entre le prix auquel la société a acquis les actions proposées et le prix acquitté par les bénéficiaires.

Dans certaines situations, la charge des cotisations de sécurité sociale et des participations sur salaires ayant la même base de calcul.

Section 2 : CALCUL STOCHASTIQUE ET EVALUATION DES PRODUITS DERIVES

2- 1 Propriété de Markov [41]

Le processus de Markov est un type particulier de processus stochastique où seulement la valeur présente de la variable en question est déterminante dans la détermination de sa valeur future. L'historique de la variable, et la manière dont le présent a émergé du passé n'ont aucune influence sur la valeur future de la variable. La propriété de Markov pour le prix d'un actif financier va de paire avec l'efficience du marché sous sa forme faible. Cette forme d'efficience peut s'énoncer sous la forme : « le cours actuel d'un titre contient toute l'information disponible sur ce titre ».

L'espérance de la variable aléatoire conditionnée par les événements passés dépend uniquement de la valeur précédente X_{t-1} . C'est un processus sans mémoire du passé.

Ceci peut être formalisé comme suit : si l'instant présent est t ,

L'événement $A = \{ X_s; s > t \}$ représente le futur du processus X_t .

L'événement $B = \{ X_s; s < t \}$ représente le passé du processus X_t .

Le processus X_t est dit Markovien si et seulement si : $P(A/X_t, B) = P(A/X_t)$, pour tout t .

Connaissant le présent, le passé et le futur du processus sont indépendants. Ainsi, la connaissance du passé d'un processus Markovien ne fournit aucune

information sur son évolution à venir, en dehors de celle contenue dans la valeur présente qui seule détermine la distribution future des cours, en l'absence de nouvelles informations.

La propriété de Markov a une importance capitale dans la modélisation financière, en particulier dans l'évaluation des options, comme c'est le cas dans le présent mémoire.

2-2 Mouvement Brownien (ou processus de Wiener) [16]

Le mouvement Brownien avec un drift est un processus stochastique $\{X_t; t \geq 0\}$ qui vérifie les propriétés suivantes :

Chaque variation $(X_{t+s} - X_s)$ du processus $\{X_t; t \geq 0\}$, entre les instants s et $s+t$, suit la loi normale de moyenne μ_t et de variance σ_t^2 où μ et σ sont des paramètres constants.

Pour les instants $(t_1 < t_2 < \dots < t_n)$, les variations $(X_{t_2} - X_{t_1}), (X_{t_3} - X_{t_2}), \dots, (X_{t_n} - X_{t_{n-1}})$ sont indépendantes et suivent la loi normale, comme précisé au précédent.

$X_0 = 0$ et $\{X_t; t \geq 0\}$ est continue par rapport au temps.

Il est à noter, avec ces propriétés, que la variation $(X_{t+s} - X_s)$ est indépendante de l'histoire du processus X_t , car la connaissance de $X_T (T < S)$ n'a aucun effet sur la distribution de probabilité de $X_{t+s} - X_s$. C'est précisément le caractère Markovien du mouvement Brownien.

Il est à noter également que dans le cas où $\mu = 0$ et, le mouvement Brownien est appelé mouvement Brownien standard dont la distribution de probabilité en continue est :

$$P(Z_t < Z/Z_{t_0} = Z_0) = P(Z_t - Z_{t_0} < Z - Z_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-t_0)}} \int_{-\infty}^{Z-Z_0} e^{\frac{\mu^2}{2(t-t_0)}} du$$

Le processus $\{X_t; t \geq 0\}$ peut s'écrire en fonction de $\{Z_t; t \geq 0\}$ sous la forme :

$$dx_t = \mu dt + \sigma dZ_t.$$

Ainsi, dZ_t est une variable aléatoire suivant une loi normale centrée. L'espérance mathématique de dZ_t est $E(dZ_t) = 0$. La variance de dZ_t est $Var(dZ_t) = dt$.

Les valeurs de dZ_t relatives à des intervalles de temps courts dt quelconque sont indépendantes.

Le drift réel μ et la volatilité σ sont des paramètres qu'on peut estimer à partir de l'historique du prix de l'actif dont le prix suit le processus X_t .

Le processus dZ_t peut s'écrire sous la forme : $dZ_t = U\sqrt{dt}$, où U est une variable aléatoire suivant une loi normale centrée réduite. La variable aléatoire U^2 suit donc une loi du Khi-deux de degré 1 ($U^2 \rightarrow \chi^2(1)$), tel que son espérance mathématique est $E(U^2) = 1$, et sa variance est $var(U^2) = 2$.

Comme le carré du processus dZ_t est : $dZ_t^2 = U^2 dt$, on déduit de ce qui précède que l'espérance du processus dZ_t^2 est $E(dZ_t^2) = E(U^2)dt = dt$, alors que sa variance est de $var(dZ_t^2) = var(U^2)dt^2 = 2dt^2$.

On peut donc affirmer que, quand dt tend vers 0, à l'ordre de dt le processus dZ_t^2 devient équivalent à dt , soit $dZ_t^2 \approx dt$.

L'hypothèse selon laquelle le cours d'une action est un mouvement Brownien n'était pas réaliste car le prix de l'action ne peut pas prendre des valeurs négatives. D'où l'idée de modéliser par un mouvement Brownien géométrique.

2-3 Mouvement Brownien géométrique [16]

Soit le processus $\{X_t; t \geq 0\}$ suivant un mouvement Brownien avec un drift $\mu \geq 0$ et une variance constante égale à σ^2 . Le processus stochastique, défini par : $\{Y_t = e^{X_t}; t \geq 0\}$ est appelé mouvement Brownien géométrique. Ce processus $\{Y_t; t \geq 0\}$ est donc toujours positif. On dit qu'il suit, à chaque instant t , une loi log-normale dont les paramètres dépendent du temps t . L'espérance et la variance de ce processus peuvent être déduites de celles de la loi log-normale et on a :

$$E(Y_t/Y_0 = y_0) = y_0 e^{(\mu_t + \frac{\sigma_t^2}{2})} \text{ et } Var(Y_t/Y_0 = y_0) = y_0^2 e^{(2\mu_t + \sigma_t^2)} (e^{\sigma_t^2} - 1)$$

La fonction de densité de Y_t est $g(y) = \frac{1}{y\sigma\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{(\ln y - \mu_t)^2}{2\sigma_t^2}}$; $y > 0$.

Ainsi, pour les instants $t_1 < t_2 < \dots < t_n$, les variables (Y_{t_2}/Y_{t_1}) , (Y_{t_3}/Y_{t_2}) , ..., $(Y_{t_n}/Y_{t_{n-1}})$ sont indépendantes et suivent la loi log-normale.

En continue, un mouvement Brownien géométrique s'écrit en fonction du mouvement Brownien standard $\{Z_t ; t \geq 0\}$, sous la forme : $\frac{dY_t}{Y_t} = \mu dt + \sigma dZ_t$.

2-4 Processus d'Ornstein Uhlenbeck [40]

Le processus d'Ornstein Uhlenbeck est un processus gaussien et markovien. Il est de la forme : $dX_t = K(\phi - X_t)dt + qdZ_t$ (1.2-1), où $dZ_t = U\sqrt{dt}$ est un processus de Wiener-levy : U étant une variable aléatoire normale centrée réduite.

La valeur à long terme de ce processus est égale à ϕ . En effet, l'espérance de ce processus, à un instant t , s'écrit : $E(dX_t) = E(dX_{t+dt}) - E(X_t) = K(\phi - E(X_t))dt$. Or, à long terme (quand $t \rightarrow +\infty$), on aura : $E(X_t) \approx E(X_{t+dt}) \Rightarrow E(X_t) \approx \phi$. La variable d'état X_t a donc tendance à osciller autour de la moyenne à long terme, avant de converger vers celle-ci à long terme. Si la valeur de X_t est plus petite que celle de la moyenne à long terme ϕ , alors le drift réel de ce processus est positif ce qui veut dire que sa moyenne a tendance à augmenter. Alors que dans le cas contraire, la moyenne du processus X aura tendance à retrouver sa moyenne à long terme ϕ . La vitesse de retour à la moyenne est déterminée par le taux de retour à la moyenne K . Plus la valeur de K est grande, plus le retour à la moyenne est rapide, et vice versa.

L'expression de X_t peut être déterminée à partir de son équation de diffusion, par changement de variable $Y_t = e^{Kt}X_t$. Si le processus X_t prend la valeur X_0 à l'instant initial $t=0$, alors on a $Y_0 = X_0$.

En appliquant le lemme d'Itô au processus $Y_t = f(t ; X_t) = e^{Kt}X_t$, on aura :

$$dY_t = \left(\frac{\partial f}{\partial X_t} K(\phi - X_t) + \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial X_t^2} q^2 \right) dt + \frac{\partial f}{\partial X_t} q dZ_t.$$

Avec $\frac{\partial f}{\partial X_t} = e^{Kt}$

$$\frac{\partial f}{\partial t} = K e^{Kt} X_t$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial X_t^2} = 0$$

On a donc $\int_0^t dY_s = \int_0^t (k(\phi - X_s)e^{ks} + ke^{ks}X_s)ds + \int_0^t qe^{ks}dZ_s$.

Soit $Y_t - Y_0 = \phi \int_0^t ke^{ks}ds + q \int_0^t e^{ks}dZ_s$.

Comme $Y_0 = X_0$, on a : $e^{Kt}X_t - X_0 = \phi(e^{Kt} - 1) + q \int_0^t e^{ks}dZ_s$

$$\Rightarrow X_t = X_0 e^{-kt} + \phi e^{-kt} (e^{Kt} - 1) + q e^{-kt} \int_0^t e^{ks} dZ_s$$

Alors son expression explicite est : $X_t = \phi + (X_0 - \phi)e^{-kt} + qe^{-kt} \int_0^t e^{ks} dZ_s$

Le processus X_t est donc gaussien. Comme $E(dZ_s) = 0$ et $\text{var}(dZ_s) = 1 \forall s$ et, l'espérance, et la variance du processus X_t sont les suivantes :

$$E(X_t) = \phi - (X_0 - \phi)e^{-kt} \quad (1.2-2)$$

$$\begin{aligned} \text{Var}(X_t) &= q^2 e^{-2kt} \int_0^t e^{2ks} \text{var}(dZ_s) \\ &= q^2 e^{-2kt} \int_0^t e^{2ks} ds \\ &= q^2 e^{-2kt} \left[\frac{e^{2ks}}{2k} \right]_0^t \\ &= q^2 \frac{e^{-2kt}}{2k} (e^{2kt} - 1) \end{aligned}$$

$$\text{Soit } \text{Var}(X_t) = q^2 \frac{1}{2k} (1 - e^{-2kt}) \quad (1.2-3)$$

Comme $\lim_{t \rightarrow +\infty} (1 - e^{-2kt}) = 1$, ainsi on vérifie bien qu'à long terme, le processus reste gaussien avec une moyenne ϕ et une variance égale à $\frac{q^2}{2k}$.

2-5 Lemme d'Itô [32]

Le prix d'une option est fonction du prix du sous-jacent, et du temps. La connaissance de la fonction de variables suivant des processus stochastiques est, à cet effet, très importante pour l'évaluation des options. Le lemme d'Itô (1951) est la base du calcul stochastique.

2-5-1 Cas d'une seule variable stochastique

Supposons que X est une variable stochastique suivant le processus d'Itô défini par :

$dx = a(x, t)dt + b(x, t)dz$, avec dz suivant un processus de Wiener-Levy et a et b sont des fonctions de X et du temps t . Ce processus peut s'écrire également sous la forme :

$dx = a(x, t)dt + b(x, t)\sqrt{dt}U$. Où U est une variable aléatoire normale centrée réduite ($U \sim \mathcal{N}(0, 1)$).

Soit $G(x, t)$ une fonction de x et du temps t . Soit le développement en série de Taylor de la fonction G par rapport à x et au temps t :

$$dG = \frac{\partial G}{\partial x} dx + \frac{\partial G}{\partial t} dt + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} dx^2 + \frac{\partial^2 G}{\partial x \partial t} dx dt + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial t^2} dt^2 + \dots$$

A l'ordre dt , on a:

$$dx^2 = [a(x, t)dt + b(x, t)\sqrt{dt}U]^2 \approx b^2 dt U^2, \text{ avec } U^2 \sim \chi_1^2$$

On a donc $E(U^2) = 1$ et $\text{Var}(U^2) = 2$.

D'où on a : $E(dx^2) \approx b^2 dt$ et $\text{var}(dx^2) \approx 2b^4 dt^2$.

A l'ordre dt , on peut considérer que $\text{var}(dx^2) \approx 0$, et que dx^2 se comporte comme une constante tel que : $dx^2 \approx b^2 dt$.

Par ailleurs, le produit de dx par dt est donné par l'équation suivante :

$dx dt = [a(x, t)dt + b(x, t)\sqrt{dt}U] dt = a dt^2 + b dt^{3/2}$. On peut donc considérer qu'à l'ordre dt ce produit est nul : $dx dt = 0$. Par conséquent, la différentielle de la fonction G peut donc s'écrire sous la forme :

$$dG = \frac{\partial G}{\partial x} dx + \frac{\partial G}{\partial t} dt + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} b^2 dt + \dots$$

Soit, en remplaçant dx par son expression, dans cette équation, on obtient l'expression de la différentielle d'une fonction G du temps et d'une variable d'état x suivant le processus prédéfini.

$$dG = \left(\frac{\partial G}{\partial x} a + \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} b^2 \right) dt + \frac{\partial G}{\partial x} b dz$$

Cette équation est donc l'application du lemme d'Itô à une fonction du temps, et d'une seule variable d'état.

2-5-2 Cas de deux variables stochastiques

Dans le cas d'une fonction du temps et de deux variables d'état, x_1 et x_2 , on suppose que celles-ci suivent des processus stochastiques, décrits par les équations suivantes :

$$dx_1 = a_1(x_1, x_2, t)dt + b_1(x_1, x_2, t)dz_1 dx_1, \text{ et}$$

$$dx_2 = a_2(x_1, x_2, t)dt + b_2(x_1, x_2, t)dz_2 dx_2$$

Avec dz_1 et dz_2 suivant un processus de Wiener-Levy, et a_1 , a_2 , b_1 , et b_2 sont des fonctions des deux variables d'états (x_1, x_2) , et du temps t . Ces processus peuvent s'écrire également sous la forme :

$$dx_1 = a_1(x_1, x_2, t)dt + b_1(x_1, x_2, t)\sqrt{dt}U_1, \text{ et}$$

$$dx_2 = a_2(x_1, x_2, t)dt + b_2(x_1, x_2, t)\sqrt{dt}U_2$$

Où U_1 , et U_2 sont des variables aléatoires normales centrées réduites tel que leur coefficient de corrélation est notée : $\rho = \rho(U_1, U_2)$.

Soit $G(x, t)$ une fonction des variables aléatoires d'états (x_1, x_2) , et du temps. Le développement en série de Taylor de la fonction G par rapport à (x_1, x_2) , et du temps s'écrit :

$$dG = \frac{\partial G}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial G}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial G}{\partial t} dt + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial x_1^2} dx_1^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial x_2^2} dx_2^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial t^2} dt^2 + \frac{\partial^2 G}{\partial x_1 \partial x_2} dx_1 dx_2 + \frac{\partial^2 G}{\partial x_1 \partial t} dx_1 dt + \frac{\partial^2 G}{\partial x_2 \partial t} dx_2 dt.$$

Comme dans le cas d'une seule variable stochastique, on a: $dx_1^2 \approx b_1^2 dt$ et $dx_2^2 \approx b_2^2 dt$.

De même, on a : $dx_1 dx_2 = a_1 a_2 dt^2 + (b_1 a_2 U_1 + b_2 a_1 U_2) dt^{3/2} + b_1 b_2 U_1 U_2 dt$.

A l'ordre dt , on peut écrire :

$$E(dx_1 dx_2) \approx b_1 b_2 E(U_1 U_2) dt = b_1 b_2 dt \text{cov}(U_1 U_2) = b_1 b_2 dt.$$

$$\text{Var}(dx_1 dx_2) \approx b_1^2 b_2^2 dt^2 E(U_1 U_2 - E(U_1 U_2))^2 = b_1^2 b_2^2 dt^2 E(U_1 U_2 - \rho)^2.$$

Comme $U_1 U_2 \neq \rho$, à l'ordre dt , on peut faire l'approximation : $dx_1 dx_2 \approx b_1 b_2 \rho dt$.

Ainsi, à l'ordre dt , on aura :

$$dG = \frac{\partial G}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial G}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial G}{\partial t} dt + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial x_1^2} b_1^2 dt + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial x_2^2} b_2^2 dt + \frac{\partial^2 G}{\partial x_1 \partial x_2} b_1 b_2 \rho dt + \dots$$

Soit:

$$dG = \left(\frac{\partial G}{\partial x_1} a_1 + \frac{\partial G}{\partial x_2} a_2 + \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial x_1^2} b_1^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial x_2^2} b_2^2 + \frac{\partial^2 G}{\partial x_1 \partial x_2} b_1 b_2 \rho \right) dt + \frac{\partial G}{\partial x_1} b_1 dz_1 + \frac{\partial G}{\partial x_2} b_2 dz_2 + \dots$$

Cette équation constitue donc l'application du lemme d'Itô à une fonction du temps, et de deux variables d'états.

2-5-3 La version générale du lemme d'Itô

Soit C une fonction du temps t , et de n variables stochastiques (des variables d'états) $x_1, x_2, x_3, \dots, x_i, \dots, x_n$ suivant chacune un processus d'Itô. Les drifts réels instantanés de ces variables sont respectivement $a_1, a_2, a_3, \dots, a_i, \dots, a_n$. Leurs écarts types instantanés sont respectivement $b_1, b_2, b_3, \dots, b_i, \dots, b_n$. Ainsi, on peut écrire : $dx_i = a_i dt + b_i dz_i, 1 \leq i \leq n$.

Où les $dz_i, 1 \leq i \leq n$, sont des processus de Wiener. Les drifts réels sont des fonctions du temps, et des n variables d'états : $a_i = a_i(x_1, x_2, x_3, \dots, x_i, \dots, x_n, t)$.

Modélisation Stochastique pour l'Evaluation des Stock-options

écarts types sont également des fonctions du temps, et des n variables d'états :

$$b_i = b_i(x_1, x_2, x_3, \dots, x_i, \dots, x_n, t).$$

On peut écrire également : $dx_i = a_i dt + b_i U_i \sqrt{dt}$, $1 \leq i \leq n$. Où les U_i sont des variables aléatoires normales centrées réduites. Le coefficient de corrélation entre deux variables U_i et U_j est noté : $\rho_{ij} = \rho(U_i, U_j)$.

Le développement en série de Taylor de la fonction $C = C(x_1, x_2, x_3, \dots, x_i, \dots, x_n, t)$. s'écrit :

$$dC = \sum_{i=1}^n \frac{\partial C}{\partial x_i} dx_i + \frac{\partial C}{\partial t} dt + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 C}{\partial x_i \partial x_j} dx_i dx_j + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 C}{\partial x_i \partial t} dx_i dt + \dots$$

En se référant aux calculs relatifs à la démonstration du lemme d'Itô, dans le cas d'une variable, et dans le cas de deux variables stochastiques, nous pouvons écrire, à l'ordre dt :

$$dx_i^2 \approx b_i^2 dt$$

$$dx_i dx_j \approx b_i b_j \rho_{ij} dt$$

$$dx_i dt \approx 0.$$

Ces équivalences sont d'autant plus vraies que dt est proche de zéro. Lorsque dt tend vers zéro, tous les termes d'un ordre supérieur à dt sont négligés, et la différentielle de la fonction C peut s'écrire :

$$dC = \sum_{i=1}^n \frac{\partial C}{\partial x_i} dx_i + \frac{\partial C}{\partial t} dt + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 C}{\partial x_i \partial x_j} b_i b_j \rho_{ij} dt.$$

Soit en remplaçant dx_i par son expression, nous obtenons la forme générale du lemme d'Itô :

$$dC = \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial C}{\partial x_i} a_i + \frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 C}{\partial x_i \partial x_j} b_i b_j \rho_{ij} \right) dt + \sum_{i=1}^n \frac{\partial C}{\partial x_i} dx_i dz_i \quad (1.2-4)$$

Cette équation constitue alors la forme la plus générale du lemme d'Itô.

2-5-4 Raisonnement risque-neutre

Si l'on considère que le prix du sous-jacent, et la valeur de l'option suivent des mouvements Brownien géométriques, tel que : $\frac{dS}{S} = \rho_s dt + \sigma_s dZ$ et $\frac{dC}{C} = \rho_c dt + \sigma_c dZ$.

Le drift du prix de l'option, ainsi que sa volatilité peuvent être déterminés, à partir du lemme d'Itô.

La valeur de l'option est indépendante du comportement de l'investisseur face au risque puisque celle-ci ne figure pas dans l'équation d'évaluation. Aucun des paramètres relatifs à l'attitude de l'investisseur vis-à-vis du risque ne figure dans l'équation d'évaluation. Ainsi, pour simplifier l'évaluation des options, celle-ci se fera dans un monde risque-neutre, où la rentabilité espérée de l'option et celle du sous-jacent sont égales au taux d'intérêt sans risque. En d'autres termes, le drift de la valeur de l'option et celui de la valeur du sous-jacent sont égaux au taux d'intérêt sans risque.

Si l'on suppose que ce taux est constant, le raisonnement risque neutre peut s'écrire :

$$E\left(\frac{S_T}{S_t}\right) = e^{r(T-t)}$$

$$E\left(\frac{C_T}{C_t}\right) = e^{r(T-t)}$$

Comme $C_T = \max(S_T - X; 0)$, on a $C_t = e^{-r(T-t)} E(\max(S_T - X; 0))$ (1.2-5)

L'opérateur espérance est relatif à une distribution de probabilité correspondante à la neutralité du risque. Celle-ci est log-normale avec un drift égal au taux d'intérêt sans risque.

Si $f(S_T, S_t)$ désigne la fonction densité de probabilité de transition du prix du sous-jacent sachant le prix du sous-jacent S_t à l'instant t , l'équation (1.2-5) s'écrit :

$$C_t = e^{-r(T-t)} \int_0^{+\infty} \max(S_T - X; 0) f(S_T, S_t, \rho_s) dS_T.$$

Où $f(S_T, S_t, \rho_s)$ est la fonction densité de transition du prix du sous-jacent correspondant au drift ρ_s .

Le prix de l'option est actualisé au taux ρ_c .

Les valeurs espérées du sous-jacent, et de l'option sont données par les équations :

$$E_s\left(\frac{S_T}{S_t}\right) = e^{\rho_s(T-t)}$$

$$E_c\left(\frac{C_T}{C_t}\right) = e^{\rho_c(T-t)}$$

Où E_s et E_c sont les espérances en considérant les drifts respectivement ρ_s , et ρ_c . Ces paramètres ne sont pas faciles à estimer, et le raisonnement risque neutre résout ce problème puisqu'on peut écrire : $\rho_s = \rho_c = r$. Le raisonnement risque neutre est basé sur l'égalité du prix du risque du marché du sous-jacent et de l'option : $\frac{\rho_s - r}{\partial_s} = \frac{\rho_c - r}{\partial_c} = \lambda$. Comme on considère que $\rho_s = \rho_c = r$, ceci implique que le prix du marché du risque est considéré comme nul : $\lambda = 0$.

En considérant cette égalité, et en considérant la distribution de probabilité correspondante aux taux d'intérêt sans risque r , on peut écrire que : $E\left(e^{-r(T-t)} \frac{S_T}{S_t} / S_t\right) = S_t$. Ceci veut dire que la quantité $e^{-r(T-t)} S_T$ est une martingale qui a donc un drift égal à zéro. Cette propriété implique que la connaissance de l'historique des cours ne permet pas de prévoir leurs évolutions dans l'avenir. Une martingale apparaît comme un processus pour lequel l'anticipation rationnelle coïncide avec l'anticipation naïve.

Section 3 : OPTIONS SUR INDICES BOURSIERS

Les idées de base pour cette section s'appuient sur Quitard-Pinon [19], Fama E. [30], et sur Janvresse, S. Pergamenchtchikov, P. R. de Fitte [37].

3-1 Les options sur indices

3-1-1 Historique

Les options sur indices boursiers sont apparues en 1983 sur les marchés d'options négociables de Chicago, le Chicago Board Options Exchange (CBOE), et le Chicago Mercantile Exchange (CME).

Ce type d'option a connu un énorme succès suite au développement de la théorie, et de la pratique financière, et suite à l'essor des marchés d'options négociables dès 1973 à Chicago. Ce succès est également une conséquence de l'attention croissante des praticiens à la gestion indicielle, et au risque du marché. Certains chercheurs ont contribué, par leurs travaux, au succès de ces marchés en

démontrant que des marchés financiers complets pouvaient être engendrés par contrats d'options sur un portefeuille représentatif du marché financier dans son ensemble.

Le succès des options sur indices aux Etats-Unis a été suivi par la création de marchés de ce type en Asie, et en Europe. Ainsi, les gestionnaires de portefeuilles disposent d'une large gamme d'options sur indices, et peuvent gérer le risque des principaux marchés boursiers du monde avec plus de flexibilité.

Ce type d'option concerne uniquement le marché des actions qui soulève le plus d'intérêt en matière de gestion des risques, et des activités spéculatives, et qui reflète le mieux le potentiel de croissance d'une économie à moyen, et long terme.

Les options sur indices permettent la répartition des risques dans l'économie, et la contribution à la complétude des marchés. De plus, elles ont un rôle informationnel : information-volatilité anticipée-prix des options sur indices-couverture qui se base sur un prix de couverture connu.

3-1-2 Indice boursier : définition et méthodologie de calcul

Un indice boursier est une mesure statistique de la performance d'un marché d'action ou d'un segment de marché d'action.

Un indice boursier ne comprend pas tous les titres du marché. Il doit être conçu de manière à ce que l'échantillon des titres sélectionnés fournisse une bonne approximation du marché à analyser. Il doit refléter la performance et le risque du marché, dans son ensemble, afin de servir comme point de repère dans la mesure des performances des portefeuilles boursiers.

Outre le nombre de titres qui composent l'indice, et sa bonne correspondance avec l'indice de marché, la méthode de calcul de l'indice est aussi déterminante. Il existe principalement trois méthodes de calcul : la moyenne arithmétique simple, la moyenne géométrique, et la moyenne arithmétique pondérée.

C'est donc la troisième méthode, à savoir celle de la moyenne arithmétique pondérée par les capitalisations boursières des titres qui composent l'indice, qui est la plus utilisée pour le calcul des indices boursiers des marchés financiers.

La formule permettant de calculer l'indice est la suivante :

Indice pondéré par le prix

Un indice pondéré par le prix mesure en quelque sorte la performance d'un portefeuille constitué d'une action de chaque entreprise incluse dans l'indice. L'importance attribuée à une compagnie dans l'indice est proportionnelle au prix de son action plutôt qu'à la valeur marchande totale de ses actions en circulation.

La valeur au temps t d'un indice pondéré par le prix se calcule à partir de l'expression suivante :

$$I(t) = \frac{\sum_{i=1}^n P_{it}}{\sum_{i=1}^n P_{i0}} * I(0)$$

Où $I(t)$: valeur de l'indice au temps t

P_{it} : Prix du titre i au temps t

P_{i0} : Prix du titre i le jour de base $t=0$

N : nombre de titres inclus dans l'indice

$I(0)$: Base ou valeur initiale attribuée à l'indice au temps $t=0$.

Indice pondéré par le nombre d'actions en circulation

Avec cette méthode de calcul, l'importance de chaque compagnie dans l'indice est fonction de la valeur marchande de l'ensemble de ses actions. Par ailleurs, des ajustements sont habituellement faits pour tenir compte des blocs de contrôle d'actions.

La valeur au temps t d'un indice tenant compte de la capitalisation se calcule ainsi :

$$I(t) = \frac{\sum_{i=1}^n P_{it} N_{it}}{k_t \sum_{i=1}^n P_{i0} N_{i0}} * I(0)$$

Où $I(t)$: valeur de l'indice au temps t

P_{it} : Prix du titre i au temps t

P_{i0} : Prix du titre i l'instant $t=0$

N_{it} : Nombre de titres en circulation de la compagnie i à l'instant t

N_{i0} : Nombre d'actions en circulation de la compagnie i à l'instant $t=0$

$P_{it} N_{it}$: Capitalisation boursière du titre i à l'instant t

$P_{i0} N_{i0}$: Capitalisation boursière du titre i le jour de base

$I(0)$: Base ou valeur initiale attribuée à l'indice au temps $t=0$.

k_t : Coefficient d'ajustement de la base qui tient compte des admissions, et des radiations de l'échantillon, ainsi que des opérations modifiant le capital des entreprises de l'échantillon.

Les indices boursiers, tel que le CAC40, sont ajustés lors d'opération affectant la capitalisation boursière d'un titre ou la modification de la composition de l'indice.

La formule précédente peut être réécrite pour faire apparaître le caractère de moyenne arithmétique pondérée.

$$I(t) = I(0) \sum_{i=1}^n W_i \frac{P_{it}}{P_{i0}} \quad \text{Où } W_i = \frac{P_{i0} N_{it}}{k_t \sum_{i=1}^n P_{i0} N_{it}} : \text{coefficient de pondération du titre } i.$$

Le CAC40 (Cotation Assistée en Continu) a été lancé en juin 1988. Il est calculé à partir d'un échantillon de 40 valeurs parmi les valeurs les plus liquides du marché. Ces valeurs sont choisies selon des critères boursiers, et économiques. Elles doivent figurer parmi les cent premières capitalisations boursières de la place de Paris, et doivent avoir un flottant important de l'ordre de 65%. Une valeur de l'échantillon qui ne répond plus à ces critères sort de l'échantillon, et sera remplacée par une autre valeur.

L'indice CAC40 est calculé en permanence, et à chaque nouveau cours coté de l'une des valeurs de l'échantillon. Il est diffusé toutes les 30 secondes, en temps réel.

3-1-3 Spécificité du contrat d'option sur indice et les risques inhérents

Les caractéristiques d'une option sur indice sont semblables à celles d'une option sur action. La principale différence réside dans les modalités d'exercice. Le détenteur d'une option sur action reçoit ou livre l'action en question en cas d'exercice. Ce ne peut être le cas du détenteur d'une option sur indice boursier, puisque ce sous-jacent est fictif, non négociable, et ne peut faire l'objet d'une transaction.

La bourse d'option attribue une valeur monétaire à l'indice afin de pouvoir l'utiliser comme sous-jacent d'une option. Il n'y aura pas de livraison du sous-jacent, mais le paiement de la différence, entre la valeur de l'indice, et le prix d'exercice. Dans le cas d'une option d'achat, si la taille d'un contrat d'option sur le CAC40 est de N , si le prix d'exercice est K et que la valeur de l'indice est I , le jour de l'exercice de l'option, le détenteur de l'option encaisse la somme :

$$\begin{cases} N(I - K) & \text{si } I \geq K \\ 0 & \text{si } I < K \end{cases}$$

La non-négociabilité des indices boursiers engendre trois difficultés, pour les détenteurs d'options sur indices, à savoir :

- a) Risque de réplication de l'indice
- b) Risque d'exercice
- c) La multiplicité des dividendes

Ces trois risques sont sources de difficultés pour l'évaluation des options par les modèles traditionnels basés sur l'hypothèse d'absence d'opportunité d'arbitrage.

3-1-4 Tracker

Le tracker constitue une réponse aux problèmes précités liés aux options sur indices boursiers. Le tracker (ou Exchange Traded Fund, « ETF ») est un fonds (OPCVM) indiciel négociable en bourse de la même manière qu'une action. Il est conçu pour répliquer la performance d'un indice boursier ou d'un panier d'actions. On dit alors qu'il traque l'indice d'où son nom tracker.

Négociés aussi facilement que des actions, ils constituent un investissement diversifié qui limite les risques inhérents à un investissement important en actions individuelles. L'achat ou la vente d'un tracker est plus avantageux que l'achat ou la vente de l'ensemble des actions constitutives du panier sous-jacent. En effet, l'achat (la vente) de l'ensemble des actions composant le tracker génère nécessairement plus d'ordres donc davantage de coûts de transaction, et peut impliquer des frais de courtage, des droits de gestion administrative plus importants.

Le tracker, comme sous-jacent d'un produit dérivé, présente un avantage par rapport à un indice boursier, car il est négociable, et qu'il a des performances qui sont quasiment les mêmes que celles de l'indice boursier. De ce fait, les risques liés à la gestion de produits dérivés sur indice disparaissent complètement lorsque le sous-jacent est un tracker.

Chapitre II : MODELE DE BLACK & SCHOLES

Le modèle de Black & Scholes [4] servant de référence pour les praticiens dans la cotation des options est un modèle populaire. Il a le mérite d'être un modèle paramétrique qui débouche sur une « closed form solution » facile d'utilisation.

Le modèle de Black & Scholes est basé sur une logique d'absence d'opportunité d'arbitrage, appliqué d'une manière continue dans le temps, et en supposant l'absence de cout de transaction, d'impôt, de compte de marge, et de toutes sortes de friction.

Dans le présent mémoire, le modèle de Black & Scholes sert de référence pour juger les performances des modèles paramétriques à volatilité stochastique aussi bien au niveau de l'évaluation qu'au niveau de la couverture.

Ce chapitre comporte deux parties dont la première commence par présenter les hypothèses du modèle de Black & Scholes. Ensuite, l'équation de Black & Scholes est établie en se basant, dans un premier temps, sur l'hypothèse d'absence d'opportunité d'arbitrage, et dans un second temps sur un raisonnement risque-neutre, appliqués d'une manière continue dans le temps.

Une fois établie l'équation de Black & Scholes, on procède à sa résolution, en considérant des changements de variables adéquates qui la ramène sous la forme canonique de l'équation de la chaleur. Connaissant la solution de cette dernière équation, on procède aux changements de variables, inverses à ces précités pour trouver la formule de Black & Scholes.

La 2^{ème} partie de ce chapitre porte sur la volatilité que ce soit historique et/ou implicite.

Section 1 : EVALUATION D'UNE OPTION AVEC LE MODELE DE BLACK & SCHOLES

1-1 Hypothèses et raisonnement d'arbitrage

L'étude des principaux déterminants du prix d'une option permet d'aborder les modèles d'évaluation des options, et essentiellement le modèle en temps continu de Fisher Black & Myron Scholes (1973) [4]. Ce dernier constitue le modèle de référence en matière d'évaluation des options.

Ce modèle a été développé en l'absence de dividendes pour l'évaluation des options sur actions. Il repose sur les hypothèses suivantes :

Il est admis que le marché est parfait, et est sans frictions. En d'autres termes, il n'existe pas de coût de transaction, ni d'asymétrie d'information, ni d'impôt. Les transactions peuvent prendre place de façon continue sans qu'elles soient pénalisées. Il est possible d'emprunter, et de prêter sans limitation à un taux sans risque ;

Les ventes à découvert sont autorisées ;

Le taux d'intérêt est supposé connu, et constant au cours du temps ;

La volatilité est supposée connue, et constante ;

Le cours de l'action suit un mouvement Brownien géométrique ;

Le titre sous-jacent ne paye pas de dividende pendant la vie de l'option ;

L'arbitrage n'est pas possible : l'intégration est parfaite entre le marché des options, et celui de leurs sous-jacent de manière à ce que tous les portefeuilles sans risque rapportent le même taux ;

Les titres sont divisibles.

Il convient de mentionner que la formule de Black & Scholes ne tient pas compte des préférences des investisseurs face au risque, car l'actif sous-jacent est négociable.

1-2 Marche au hasard du prix d'un sous-jacent (actif financier) [39]

La marche au hasard d'un actif financier, et d'une manière générale du prix du sous-jacent est due à l'hypothèse d'efficience du marché financier. L'efficience du marché, comme précisé dans le chapitre I, peut prendre trois formes qui sont l'efficience faible, l'efficience semi-forte, et l'efficience forte.

L'efficience, quelque soit sa forme, engendre les deux points suivants :

Modélisation Stochastique pour l'Evaluation des Stock-options

Les prix présents des actifs financiers reflètent leur historique ;

Le marché financier incorpore immédiatement toute nouvelle information concernant un actif financier.

Ainsi, la connaissance du passé du processus du cours du prix de l'actif ne fournit aucune information sur son évolution à venir, en dehors de celle contenue dans la valeur présente qui seule détermine la distribution future des cours, en l'absence de nouvelles informations. Il s'agit d'un processus markovien typique.

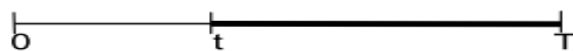
En cas d'absence de frictions, le rendement instantané du sous-jacent : $\frac{dS}{S}$. Où S est le prix de l'actif sous-jacent, et dS est la variation de son prix pendant un intervalle de temps infinitésimal dt . Ce rendement instantané $\frac{dS}{S} = \mu dt + \sigma dz$ est dû à deux contributions : la première est déterministe, et prévisible : μdt (où μ est une constante), et la deuxième représente la variation aléatoire du prix de l'actif (σdz), due à des effets extrêmes, comme des nouvelles inattendues, σ étant la volatilité du rendement de l'actif, et dz est un processus de Wiener-Levy.

1-3 Equation de Black & Scholes (couverture delta-neutre et absence d'arbitrage)

1-3-1 Processus stochastique du prix de l'option[41]

On considère une option de type quelconque, à la date courante t , émise à la date $t = 0$, et arrivant à échéance à la date T , sur un actif sous-jacent, dont le prix S , suit un mouvement Brownien géométrique : $dS = \mu_s dt + \sigma_s dz$

(2.1-1)



$T-t$ = durée de vie résiduelle de l'option

D'une manière générale, le prix d'une option C est fonction du prix de l'actif sous-jacent S qui suit un processus stochastique, et du temps t : $C(S, T)$.

En appliquant le lemme d'Itô, on trouve l'équation du processus suivi par le prix de l'option. Ainsi, la variation infinitésimale de la valeur d'une option est dC tel que :

$$dC = \left(\mu_s \frac{\partial C}{\partial S} + \frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} \right) dt + \frac{\partial C}{\partial S} \sigma_s dz \quad (2.1-2)$$

Cette équation donne l'équation de la marche au hasard suivi par la valeur d'une option C qui doit avoir une dérivée d'ordre 1 par rapport au temps, et deux dérivés d'ordre 1 et 2 par rapport au cours du sous-jacent S.

1-3-2 Elimination du risque couverture Delta-neutre [17]

Si on considère le portefeuille constitué de l'achat d'une option, et de la vente de l'actif sous-jacent, sa valeur est donc : $\pi = C - \Delta S$ (2.1-3)

Pendant un intervalle de temps infinitésimal dt , la quantité Δ reste inchangée, et la variation de la valeur du portefeuille est donc $d\pi = dC - \Delta dS$. En remplaçant dS , et dC par leurs expressions dans les équations (2.1-1) et (2.1-2), il vient :

$$d\pi = \left(\mu_s \frac{\partial C}{\partial S} + \frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} - \mu \Delta S \right) dt + \left(\frac{\partial C}{\partial S} - \Delta \right) \sigma_s dz$$

La marche au hasard de la valeur du portefeuille π est due à la partie aléatoire : $(\frac{\partial C}{\partial S} - \Delta) \sigma_s dz$. Si on veut éliminer cette partie aléatoire, on choisira : $\Delta = \frac{\partial C}{\partial S}$ (2.1-4)

$$\text{La variation } d\pi \text{ devient : } d\pi = \left(\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} \right) dt \quad (2.1-5)$$

1-3-3 Absence d'arbitrage [17]

Les variations du portefeuille π sont donc déterministes si, à chaque instant, la condition (2.1-4) est vérifiée. Le portefeuille π se comporte donc comme un actif sans risque. Ainsi, le placement d'un montant d'argent π rapportera pendant un intervalle de temps dt , la somme $r\pi dt$. En effet,

Si $\left(\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} \right) dt > r\pi dt$ un arbitragiste peut faire un profit sans risque en empruntant une somme π qu'il investit dans le portefeuille, et inversement.

Si $\left(\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} \right) dt < r\pi dt$ l'arbitragiste peut faire un profit en vendant le portefeuille, et en plaçant la somme correspondante dans l'actif sans risque.

D'après l'hypothèse d'absence d'opportunité d'arbitrage, et d'absence de cout de transaction, nous avons l'égalité : $\left(\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} \right) dt = r\pi dt$.

En remplaçant π par sa valeur, à partir des équations (2.1-3) et (2.1-4), on obtient la fameuse équation de Black & Scholes : $\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} + rS \frac{\partial C}{\partial S} - rC = 0$ (2.1-6).

1-4 Equation de Black & Scholes avec la méthode risque-neutre

L'équation de Black & Scholes peut être établie suivant l'approche risque neutre (Cox-Ross, 1976) [28]. Dans ce contexte, le prix du sous-jacent S , et le prix de l'option C suivent des mouvements Browniens géométriques décrits par les équations suivantes :

$$\frac{dS}{S} = \mu_s dt + \sigma_s dZ \quad \Rightarrow \quad dS = \mu_s S dt + \sigma_s S dz \quad (2.1-7)$$

$$\frac{dC}{C} = \mu_c dt + \sigma_c dZ \quad \Rightarrow \quad dC = \mu_c C dt + \sigma_c C dz \quad (2.1-8)$$

Où μ_s et μ_c sont des drifts réels, respectivement, de l'actif sous-jacent et de l'option, alors que σ_s et σ_c sont leurs volatilités respectives.

Comme la valeur de l'option $C = C(S, t)$ est fonction de la valeur du sous-jacent et du temps, en appliquant le lemme d'Itô, il vient : $dC = \left(\mu_s S \frac{\partial C}{\partial S} + \frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} \right) dt + \frac{\partial C}{\partial S} S \sigma_s dz$ (2.1-9)

Par identification entre les équations (2.1-8) et (2.1-9), on obtient les égalités suivantes :

$$\mu_c = \frac{\mu_s S \frac{\partial C}{\partial S} + \frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2}}{C} \quad (2.1-10) \quad \text{et} \quad \sigma_c = \frac{S \sigma_s \frac{\partial C}{\partial S}}{C} \quad (2.1-11)$$

En réarrangeant l'équation (2.1-10), on obtient l'équation suivante :

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} + \mu_s S \frac{\partial C}{\partial S} - \mu_c C = 0 \quad (2.1-12)$$

Il s'agit d'une équation qui dépend des drifts réels du sous-jacent, et de l'option μ_s et μ_c . Pour résoudre un tel problème, il faut, dans un premier temps, déterminer ces deux paramètres.

Ceci peut se faire en formant un portefeuille sans risque de l'option C , et du sous-jacent S . Soit, en considérant les équations (2.1-7) et (2.1-8), on a :

$$\pi = (\sigma_c C)S - (\sigma_s S)C = SC(\sigma_c - \sigma_s) \quad (2.1-12).$$

Etant donné que le terme risqué est éliminé, il vient : $d\pi = SC (\mu_s \sigma_c - \mu_c \sigma_s) dt$.
(2.1-13)

D'autre part, comme π est sans risque, et en supposant l'absence d'opportunité d'arbitrage, on peut écrire : $d\pi = SC (\mu_s \sigma_c - \mu_c \sigma_s) dt = r\pi dt = r SC (\sigma_c - \sigma_s) dt$. (2.1-14)

Soit en simplifiant par la quantité $SCdt$, on a : $(\mu_s - r)\sigma_c = (\mu_c - r)\sigma_s$ (2.1-15).

On peut écrire cette équation sous la forme :

$$\frac{(\mu_s - r)}{\sigma_s} = \frac{(\mu_c - r)}{\sigma_c} = \text{prix du marché du risque.}$$

On en déduit que l'option et l'action ont donc le même prix de risque du marché. La relation (2.1-15) peut s'écrire : $\frac{\mu_c - r}{\mu_s - r} = \frac{\sigma_c}{\sigma_s}$. (2.1-16)

Soit, en remplaçant μ_c et σ_c par leurs valeurs, on obtient l'équation suivante :

$$\frac{\mu_s S \frac{\partial C}{\partial S} + \frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2}}{C} - r = \frac{S \sigma_s \frac{\partial C}{\partial S}}{C} (\mu_c - r). \quad (2.1-17) \text{ qui peut se mettre sous la forme :}$$

$\mu_s S \frac{\partial C}{\partial S} + \frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} - rC = (\mu_c - r) S \frac{\partial C}{\partial S}$. Soit, en simplifiant, on obtient l'équation de Black & Scholes : $\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} + rS \frac{\partial C}{\partial S} - rC = 0$. Cette équation ne dépend ni de μ_s ni de μ_c . Elle est identique à l'équation (2.1-11) si on remplace μ_s et μ_c par r .

Ainsi, on peut conclure que la valeur de l'option est indépendante du choix de l'investisseur puisque les drifts réels n'apparaissent pas dans cette équation. Donc, n'importe quel comportement de l'investisseur peut être utilisé pour trouver la valeur de l'option. Pour la simplicité, l'évaluation se fait dans un monde risque-neutre. Dans un monde risque-neutre, les valeurs espérées des rendements de l'action, et de l'option sont égales au taux d'intérêt sans risque.

1-5 Conditions aux limites

L'option d'achat (call) considérée est de type quelconque, dont la valeur est notée $C(S, t) = C$. Dans ce cas, pour que l'équation de Black & Scholes admette une solution unique, il faut avoir trois conditions aux limites. Une condition sur le temps t , et deux conditions sur le prix du sous-jacent.

Les conditions aux limites, pour une option d'achat sont les suivantes : la valeur de l'option à l'échéance ($t = T$) est $C(S, T) = \max(S - K; 0)$. En effet, à l'échéance, la valeur de l'option est égale à sa valeur intrinsèque.

Les conditions aux limites, pour le prix du sous-jacent S sont les suivantes :

Pour $S=0$: $C(0, t)=0$, en effet, pour une valeur du sous-jacent nulle, la valeur de l'option est nulle car la valeur de l'option ne peut excéder la valeur du sous-jacent.

Pour $S \rightarrow +\infty$: $\left[\frac{\partial C}{\partial S}\right]_{S=+\infty} = 1$, en effet, quand la valeur du sous-jacent tend vers l'infini, la probabilité d'exercer l'option converge vers l'unité. Par conséquent, la valeur temps tend vers zéro et, la valeur de l'option converge vers sa valeur intrinsèque. Comme pour un call, en dedans, la valeur intrinsèque est représentée, dans le plan (S, C) , par une droite parallèle à la première bissectrice et, donc de pente égale à l'unité, alors la dérivée de la valeur de l'option par rapport à celle du sous-jacent, tend vers l'unité.

1-6 Résolution de l'équation de Black & Scholes

Compte tenu des conditions aux limites précitées, l'équation de Black & Scholes admet une solution analytique unique. Cette solution peut être déterminée analytiquement à partir de la solution de l'équation de la chaleur sous sa forme canonique.

1-6-1 Changements de variables

Pour être résolue, l'équation de Black & Scholes doit être mise sous la forme canonique de l'équation de la chaleur. Pour ce faire, nous posons, dans un premier temps :

$$\begin{aligned} S &= Ke^x \Rightarrow \frac{\partial S}{\partial x} = Ke^x \Rightarrow \frac{\partial x}{\partial S} = \frac{e^{-x}}{K} \\ t &= T - \frac{2 * \tau}{\sigma^2} \Rightarrow \frac{\partial t}{\partial \tau} = -\frac{2}{\sigma^2} \Rightarrow \frac{\partial \tau}{\partial t} = -\frac{\sigma^2}{2} \\ C &= KW(x, \tau) \Rightarrow \frac{\partial C}{\partial x} = K \frac{\partial W}{\partial x} \Rightarrow \frac{\partial C}{\partial \tau} = K \frac{\partial W}{\partial \tau} \end{aligned}$$

Ainsi, les dérivées du prix de l'option par rapport au temps, et par rapport au prix du sous-jacent, ainsi que sa dérivée seconde par rapport au prix du sous-jacent sont les suivantes :

$$\frac{\partial C}{\partial t} = \frac{\partial C \partial \tau}{\partial \tau \partial t} = -\frac{\sigma^2 K \partial W}{2 \partial \tau}$$

$$\frac{\partial C}{\partial S} = \frac{\partial C}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial S} = \frac{e^{-x}}{E} K \frac{\partial W}{\partial x} = e^{-x} \frac{\partial W}{\partial x}$$

La dérivée seconde de la valeur de l'option par rapport à la valeur du sous-jacent est donnée par l'équation suivante :

$$\frac{\partial^2 C}{\partial S^2} = \frac{\partial}{\partial S} \left(\frac{\partial C}{\partial S} \right) = \frac{\partial}{\partial S} \left(e^{-x} \frac{\partial W}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(e^{-x} \frac{\partial W}{\partial x} \right) \frac{\partial x}{\partial S}.$$

Soit, en remplaçant la dérivée de x par rapport à S , et en développant la dérivée du terme de la parenthèse par rapport à x , nous obtenons :

$$\frac{\partial^2 C}{\partial S^2} = \frac{e^{-x}}{K} \left(-e^{-x} \frac{\partial W}{\partial x} + e^{-x} \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right). \text{ Soit, après simplification, cette équation devient :}$$

$$\frac{\partial^2 C}{\partial S^2} = \frac{e^{-2x}}{K} \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} - \frac{\partial W}{\partial x} \right). \text{ Soit, en remplaçant les expressions de ces dérivées dans}$$

l'équation de Black & Scholes, on obtient l'équation différentielle en W suivante :

$$-\frac{1}{2} \sigma^2 K \frac{\partial W}{\partial \tau} + \frac{1}{2} \sigma^2 K^2 e^{2x} \frac{e^{-2x}}{K} \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} - \frac{\partial W}{\partial x} \right) + \sigma K e^x e^{-x} \frac{\partial W}{\partial x} - r K W = 0$$

Soit, après simplification et en divisant par E , on aura :

$$\frac{1}{2} \sigma^2 \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) \frac{\partial W}{\partial x} - \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial W}{\partial \tau} - r W = 0. \text{ En divisant par } \frac{\sigma^2}{2} \text{ et en posant } k = \frac{r}{\frac{\sigma^2}{2}},$$

$$\text{il vient : } \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + (k - 1) \frac{\partial W}{\partial x} - \frac{\partial W}{\partial \tau} - r W = 0.$$

Comme : quand $S = 0 \Rightarrow x \rightarrow -\infty$

Quand $S \rightarrow +\infty \Rightarrow x \rightarrow +\infty$

Quand $t = T \Rightarrow \tau = 0$

Les conditions aux limites deviennent :

$$C(0, t) = 0 \Rightarrow W(-\infty, \tau) = 0$$

$$\left[\frac{\partial C}{\partial S} \right]_{S=+\infty} = 1 \Rightarrow \left(\frac{\partial W}{\partial x} \right)_{x=+\infty} = (e^x)_{x=+\infty} = +\infty$$

$$C(S, T) = \max(S - K; 0) \Rightarrow W(x, 0) = \max(e^x - 1; 0).$$

Pour arriver à la forme canonique de l'équation de la chaleur, un deuxième changement de variable est nécessaire. Ainsi, on pose : $W(x, \tau) = e^{\alpha x + \beta \tau} U(x, \tau)$ et, on peut écrire :

$$\frac{\partial W}{\partial \tau} = e^{\alpha x + \beta \tau} \left(\beta U + \frac{\partial U}{\partial \tau} \right)$$

$$\frac{\partial W}{\partial x} = e^{\alpha x + \beta \tau} \left(\alpha U + \frac{\partial U}{\partial x} \right)$$

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} = e^{\alpha x + \beta \tau} (\alpha^2 U + 2 * \alpha \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial^2 U}{\partial x^2})$$

Après simplification, l'équation devient :

$$\alpha^2 U + 2 * \alpha \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + (k - 1)(\alpha U + \frac{\partial U}{\partial x}) - \left(\beta U + \frac{\partial U}{\partial \tau} \right) - kU = 0.$$

En réarrangeant les termes de cette équation, on obtient l'équation suivante :

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + (2 * \alpha + k - 1) \frac{\partial U}{\partial x} + (\alpha^2 + \alpha(k - 1) - \beta - k)U = \frac{\partial U}{\partial \tau}.$$

Pour trouver la forme canonique de l'équation de la chaleur, il suffit de choisir α et β suivant le système

$$\begin{cases} 2\alpha + k - 1 = 0 \Rightarrow \alpha = -\frac{1}{2}(k - 1) \\ \alpha^2 + \alpha(k - 1) - \beta - k = 0 \Rightarrow \beta = -\frac{1}{4}(k - 1)^2 - k = -\frac{1}{4}(k + 1)^2 \end{cases}$$

Le changement de variables est donc :

$$W(x, \tau) = e^{-\frac{1}{2}(k-1)x - \frac{1}{4}(k+1)^2\tau} U(x, \tau) \quad , \text{ avec } k = \frac{2r}{\sigma^2}$$

$$\text{Soit } U(x, \tau) = e^{\frac{1}{2}(k-1)x + \frac{1}{4}(k+1)^2\tau} W(x, \tau).$$

L'équation prend donc la forme canonique de l'équation de la chaleur :

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \frac{\partial U}{\partial \tau}.$$

Les conditions aux limites deviennent :

$$C(0, t) = 0 \Rightarrow W(-\infty, \tau) = 0 \Rightarrow U(-\infty, \tau) = 0$$

$$\left[\frac{\partial C}{\partial S} \right]_{S=+\infty} = 1 \Rightarrow \left(\frac{\partial W}{\partial x} \right)_{x=+\infty} = (e^x)_{x=+\infty} = +\infty$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\partial U}{\partial \tau} \right)_{x=+\infty} = \left(e^{\frac{1}{2}(k-1)x + \frac{1}{4}(k+1)^2\tau} \left(\frac{1}{2}(k-1)W(x, \tau) + \frac{\partial W}{\partial x} \right) \right)_{x=+\infty}$$

$$= \left(\frac{1}{2}(k-1) e^{\frac{1}{2}(k-1)x + \frac{1}{4}(k+1)^2\tau} \right)_{x=+\infty}$$

$$= +\infty$$

$$C(S, T) = \max(S - K; 0) \Rightarrow W(x, 0) = \max(e^x - 1; 0)$$

$$\Rightarrow U(x, 0) = e^{\frac{1}{2}(k-1)x} \max(e^x - 1; 0) \Rightarrow U(x, 0) = \max\left(e^{\frac{1}{2}(k+1)x} - e^{\frac{1}{2}(k-1)x}; 0\right) \text{ or,}$$

$$\text{On a: } e^{\frac{1}{2}(k+1)x} - e^{\frac{1}{2}(k-1)x} > 0 \Rightarrow e^{\frac{1}{2}(k+1)x} > e^{\frac{1}{2}(k-1)x} \Rightarrow x > -x \Rightarrow 2 * x > 0 \Rightarrow x > 0$$

Ainsi, la fonction $U(x, 0)$ est définie comme suit :

$$\text{Si } x > 0 \Rightarrow U(x, 0) = e^{\frac{1}{2}(k+1)x} - e^{\frac{1}{2}(k-1)x} \quad (2.1-18)$$

$$\text{Si } x \leq 0 \Rightarrow U(x, 0) = 0 \quad (2.1-19)$$

1-6-2 Résolution de l'équation de la chaleur sous sa forme canonique

On a vu que l'équation de la chaleur, sous sa forme canonique s'écrit :

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \frac{\partial U}{\partial \tau}, \tau > 0 \text{ et } x \in \mathbb{R}.$$

Pour résoudre une telle équation, il faut déterminer sa solution générale ainsi qu'une solution particulière. Si $U(x, t)$ est une solution de cette équation, alors à l'instant $t = 0$, la solution de cette équation est notée : $U(x, 0) = U_0(x)$. D'après les équations (2.1-18) et (2.1-19), cette solution s'écrit : $U_0(x) = \max\left(e^{\frac{1}{2}(k+1)x} - e^{\frac{1}{2}(k-1)x}; 0\right)$. La solution générale de cette équation est :

$$U(x, \tau) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\tau}} \int_{-\infty}^{+\infty} U_0(S) e^{-\frac{(x-S)^2}{4\tau}} dS.$$

$$\text{Si on pose } y = \frac{(S-x)}{\sqrt{2\tau}} \Rightarrow S = x + y\sqrt{2\tau}$$

$$U(x, \tau) \text{ devient : } U(x, \tau) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} U_0(x + y\sqrt{2\tau}) e^{-\frac{1}{2}y^2} dy.$$

$$\text{Si } S > 0 \Rightarrow U_0(S) = e^{\frac{1}{2}(k+1)S} - e^{\frac{1}{2}(k-1)S} \text{ et donc si } y > \frac{-x}{\sqrt{2\tau}}$$

$$\Rightarrow U_0(x + y\sqrt{2\tau}) = e^{\frac{1}{2}(k+1)(x+y\sqrt{2\tau})} - e^{\frac{1}{2}(k-1)(x+y\sqrt{2\tau})}$$

$$\text{Si } S \leq 0 \Rightarrow U_0(S) = 0 \text{ et donc si } y \leq \frac{-x}{\sqrt{2\tau}} \Rightarrow U_0(x + y\sqrt{2\tau}) = 0.$$

Ainsi, la solution de l'équation de la chaleur s'écrit :

$$U(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{x}{\sqrt{2\tau}}}^{+\infty} e^{\frac{1}{2}(k+1)(x+y\sqrt{2\tau})} e^{-\frac{1}{2}y^2} dy - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{x}{\sqrt{2\tau}}}^{+\infty} e^{\frac{1}{2}(k-1)(x+y\sqrt{2\tau})} e^{-\frac{1}{2}y^2} dy = I_1 - I_2.$$

Elle se calcule comme la différence des quantités I_1 et I_2 . L'intégrale I_1 se calcule comme suit :

$$I_1 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{x}{\sqrt{2\tau}}}^{+\infty} e^{\frac{1}{2}(k+1)(x+y\sqrt{2\tau})} e^{-\frac{1}{2}y^2} dy$$

$$\text{Comme } \frac{-1}{2} \left(y - \frac{1}{2}(k+1)\sqrt{2\tau}\right)^2 = -\frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2}(k+1)y\sqrt{2\tau} - \frac{1}{4}(k+1)^2\tau$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}(k+1)y\sqrt{2\tau} - \frac{1}{2}y^2 = -\frac{1}{2}\left(y - \frac{1}{2}(k+1)\sqrt{2\tau}\right)^2 + \frac{1}{4}(k+1)^2\tau \text{ Soit donc :}$$

$$I_1 = \frac{e^{\frac{1}{2}(k+1)x + \frac{1}{4}(k+1)^2\tau}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{x}{\sqrt{2\tau}}}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}\left(y - \frac{1}{2}(k+1)\sqrt{2\tau}\right)^2} dy \quad . \text{ Si nous posons } z = y - \frac{1}{2}(k+1)\sqrt{2\tau} \Rightarrow dz = dy, \text{ on aura :}$$

$$I_1 = \frac{e^{\frac{1}{2}(k+1)x + \frac{1}{4}(k+1)^2\tau}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{x}{\sqrt{2\tau}} + \frac{1}{2}(k+1)\sqrt{2\tau}}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz \quad \text{La fonction à intégrer étant paire,}$$

l'intégrale I_1 peut s'écrire :

$$I_1 = \frac{e^{\frac{1}{2}(k+1)x + \frac{1}{4}(k+1)^2\tau}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{x}{\sqrt{2\tau}} + \frac{1}{2}(k+1)\sqrt{2\tau}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz.$$

La fonction intégrable $f(z)$ suit une loi normale centre réduite et si on désigne par $N(\cdot)$ sa fonction de répartition, on peut écrire :

$$I_1 = e^{\frac{1}{2}(k+1)x + \frac{1}{4}(k+1)^2\tau} N(d_1), \text{ avec } d_1 = \frac{x}{\sqrt{2\tau}} + \frac{1}{2}(k+1)\sqrt{2\tau}.$$

Le calcul de I_2 est analogue à celui de I_1 , il suffit de remplacer $(k+1)$ par $(k-1)$. Ainsi, l'intégrale I_2 s'écrit : $I_2 = e^{\frac{1}{2}(k-1)x + \frac{1}{4}(k-1)^2\tau} N(d_2)$ avec $d_2 = \frac{x}{\sqrt{2\tau}} + \frac{1}{2}(k-1)\sqrt{2\tau} = d_1 - \sqrt{2\tau}$.

Etant donné que la fonction $U(x, \tau)$ est la différence des intégrales I_1 et I_2 , on peut l'écrire sous la forme :

$$U(x, \tau) = I_1 - I_2 = e^{\frac{1}{2}(k+1)x + \frac{1}{4}(k+1)^2\tau} N(d_1) - e^{\frac{1}{2}(k-1)x + \frac{1}{4}(k-1)^2\tau} N(d_2)$$

1-6-3 Solution de l'équation de Black & Scholes

En considérant l'expression de W en fonction de U , on peut écrire :

$$\begin{aligned} W(x, \tau) &= e^{-\frac{1}{2}(k-1)x - \frac{1}{4}(k+1)^2\tau} (I_1 - I_2) \\ &= e^{-\frac{1}{2}(k-1)x - \frac{1}{4}(k+1)^2\tau} \left[e^{\frac{1}{2}(k+1)x + \frac{1}{4}(k+1)^2\tau} N(d_1) - e^{\frac{1}{2}(k-1)x + \frac{1}{4}(k-1)^2\tau} N(d_2) \right] \\ &= e^x N(d_1) - e^{-k\tau} N(d_2) \end{aligned}$$

Soit en remplaçant la valeur de l'option C , par son expression en fonction de W , on a :

Modélisation Stochastique pour l'Evaluation des Stock-options

$C(S, t) = KW(x, \tau) = Ke^x N(d_1) - Ke^{-k\tau} N(d_2)$. Comme, on a : $e^x = \frac{S}{K}$ et $k = \frac{2r}{\sigma^2}$, on obtient : $C(S, t) = SN(d_1) - Ke^{-\frac{2r}{\sigma^2}\tau} N(d_2)$. Or, on a : $2\tau = (T - t)\sigma^2$, d'où, en conjuguant ces deux dernières équations, on obtient l'expression définitive de la valeur de l'option qui correspond à la formule de Black & Scholes : $C(S, t) = SN(d_1) - Ke^{-r(T-t)} N(d_2)$. Où

$$d_1 = \frac{x}{\sqrt{2\tau}} + \frac{1}{2}(k + 1)\sqrt{2\tau}, \text{ avec } x = \ln \frac{S}{K} \text{ et } k = \frac{2r}{\sigma^2} \text{ donc}$$

$d_1 = \frac{1}{\sqrt{2\tau}} \left(\ln \frac{S}{K} + \left(\frac{2r}{\sigma^2} + 1 \right) \tau \right) = \frac{1}{\sqrt{\sigma^2(T-t)}} \left(\ln \frac{S}{K} + \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2 \right) (T - t) \right)$. En définitive, on a :

$$d_1 = \frac{\ln \frac{S}{K} + \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2 \right) (T - t)}{\sigma\sqrt{T-t}}, \text{ alors que } d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}.$$

La solution de l'équation de Black & Scholes, pour une option d'achat, en l'absence de distribution de dividendes, est la suivante :

$$C(S, t) = SN(d_1) - Ke^{-r(T-t)} N(d_2). \quad (2.1-20)$$

$$\text{avec } d_1 = \frac{\ln \frac{S}{K} + \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2 \right) (T - t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \quad (2.1-21)$$

$$\text{et } d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}. \quad (2.1-22)$$

D'après cette formule, il s'avère bien que cinq variables suffisent pour déterminer la valeur d'une option. Trois d'entre elles sont directement définies, à savoir, le cours du titre S , le prix d'exercice K , et la durée de vie T . Les deux autres variables restantes, le taux d'intérêt r , et la volatilité σ , sont plus délicates à définir.

En ce qui concerne le taux d'intérêt, il peut être observé sur le marché ou estimé implicitement à partir d'un modèle d'évaluation d'options. Quant à la volatilité, elle exige une estimation puisqu'elle n'est pas directement observable sur le marché.

1-7 Formule de Black & Scholes par raisonnement risque neutre

La formule de Black & Scholes peut apparaître énigmatique au prime abord, son interprétation est facilitée par le recours à un argument de neutralité par rapport au risque découvert par Cox et Ross (1976) [28].

Cet argument part de la constatation suivante : le drift μ n'apparaît nulle part, ni dans l'équation différentielle ni dans la formule. Or, ce paramètre n'est autre que la rentabilité espérée, qui à l'équilibre, dépend des anticipations des investisseurs, et de leurs préférences. Ces préférences se traduisent sur les marchés par un niveau de prime de risque déterminé, c'est-à-dire un surplus de rentabilité réclamé à tout investissement risqué par rapport à un investissement non risqué.

Dans une telle économie, tous les actifs doivent offrir, par définition, la même rentabilité, celle du taux sans risque. Donc le titre aura, dans cette économie neutre au risque, une rentabilité espérée μ , égale à r , et sa valeur à l'échéance S_T suivra une loi log-normale.

L'option, pour sa part, aura aussi une rentabilité espérée égale au taux sans risque. Soit sur la période de vie résiduelle, on peut écrire :

$$E(C_T) = C_t e^{-r\tau}. \text{ Ce qui s'inverse, sous la forme : } C_t = e^{r\tau} E(C_T).$$

Pour calculer la valeur de l'option C_t , à un instant t , il suffit donc de savoir calculer l'espérance de la valeur de l'option à l'échéance $E(C_T)$. Or à l'échéance on a

$$C_T = \max(S_T - K; 0) \text{ qui peut s'écrire sous la forme : } C_T = \begin{cases} S_T - K & \text{si } S_T > K \\ 0 & \text{si } S_T \leq K \end{cases}$$

Donc $E(C_T)$ est l'espérance mathématique de $(S_T - K)$ pondérée par la probabilité que S_T soit supérieur au prix d'exercice, à l'échéance, dans l'économie neutre au risque considérée. Le passage de la probabilité réelle, pour laquelle S_T atteint une certaine valeur x , à la probabilité risque neutre, pour laquelle S_T atteigne cette même valeur x , s'effectue simplement en remplaçant le drift μ par le taux de l'actif sans risque r dans la fonction densité de S_T , et dans les formules d'espérance, et de variance.

Cette procédure d'évaluation, dite en risque neutre, découle uniquement de la condition d'absence de stratégies d'arbitrage non gagnantes.

$$dS_t = rS_t dt + \sigma S_t dz \text{ Soit } \frac{dS_t}{S_t} = r dt + \sigma dz.$$

$$\text{En appliquant le lemme d'Itô, il vient } d\ln S_t = \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) dt + \sigma dz.$$

En intégrant membre à membre l'équation s'écrit : $\int_t^T d \ln S_t = \int_t^T \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) dt + \sigma U \int_t^T \sqrt{dt}$ avec $U \sim \mathcal{N}(0,1)$. Le logarithme du prix du sous-jacent à l'échéance est donc donné par l'équation suivante : $\ln S_T = \ln S_t + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T - t) + \sigma U \sqrt{T - t}$. En posant, on déduit que ce logarithme suit une loi normale de moyenne a , et d'écart type b : $\ln S_T \sim \mathcal{N}(a, b)$, tel que $a = \ln S_t + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)\tau$ et $b = \sigma\sqrt{\tau}$.

Si l'on désigne par $f(S)$ la fonction densité de probabilité du prix du sous-jacent, à l'échéance, on peut écrire : $E(C_T) = \int_K^{+\infty} (S - K)f(S)dS$. Vu la distribution de $\ln S_T$, la variable aléatoire $U = \frac{\ln S_T - a}{b}$ suit une loi normale centrée réduite. On peut écrire : $S_T = e^{a+bU}$.

Si l'on désigne par $g(u)$ la fonction de densité de probabilité de U , on peut écrire :

$g(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}u^2}$. Par ailleurs, on a $g(u) = f(S)dS$ et si on pose $X = \frac{\ln K - a}{b}$, on aura : $E(C_T) = \int_X^{+\infty} (e^{a+bU} - K)g(u)du$. Soit en remplaçant $g(u)$ par son expression, on obtient : $E(C_T) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_X^{+\infty} e^{a+bU} e^{-\frac{1}{2}u^2} du - K \int_X^{+\infty} g(u) du$. En considérant la fonction de répartition $N(\cdot)$ de la loi normale centrée réduite (loi de U), cette équation peut s'écrire sous la forme : $E(C_T) = \frac{e^a}{\sqrt{2\pi}} \int_X^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}(u^2 - 2bu)} du - K(1 - N(X))$. En considérant l'égalité $u^2 - 2bu = (u - b)^2 - b^2$, l'équation devient

$$E(C_T) = \frac{e^{a+\frac{b^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \int_X^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}(u-b)^2} du - K(1 - N(X)).$$

Si on pose $v = u - b \Rightarrow dv = du \Rightarrow X \rightarrow X - b$, l'équation devient :

$$E(C_T) = \frac{e^{a+\frac{b^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \int_{X-b}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}v^2} dv - Ke^{-r\tau}(1 - N(X)).$$

Soit, en considérant la fonction de répartition $N(\cdot)$ de la loi normale centrée réduite une nouvelle fois, l'équation peut s'écrire : $C_T = \frac{e^{-r\tau+a+\frac{b^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} (1 - N(X - b)) - Ke^{-r\tau}(1 - N(X))$. (2.1-23)

Or, d'une part, on a : $-r\tau + a + \frac{b^2}{2} = -r\tau + \ln S_t + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)\tau + \frac{(\sigma\sqrt{\tau})^2}{2} = \ln S_t$ et donc on a : $e^{-r\tau+a+\frac{b^2}{2}} = S_t$. D'autre part, on a :

$$X = \frac{\ln K - a}{b} = \frac{\ln K - \ln S_t - \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}} = \frac{\ln \frac{S_t}{K} + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}} = -d_2 \text{ et}$$

$$X - b = -d_2 - b = -(d_2 + b).$$

La dernière équation peut s'écrire :

$$X - b = -\frac{\ln \frac{S_t}{K} + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)\tau + \sigma^2\tau}{\sigma\sqrt{\tau}} = -\frac{\ln \frac{S_t}{K} + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}} = -d_1.$$

Ainsi, l'équation (2.1-23) devient : $C_T = S_t(1 - N(-d_1)) - Ke^{-r\tau}(1 - N(-d_2))$.

En simplifiant, on obtient la formule de Black & Scholes :

$$C_T = S_t N(d_1) - Ke^{-r\tau} N(d_2).$$

$$\text{Avec } d_1 = \frac{\ln \frac{S}{K} + \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \text{ et } d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}.$$

1-8 Valeur d'une option sur un sous-jacent payant des dividendes

Dans le cas de distribution de dividendes, l'hypothèse à retenir est celle qui stipule que les versements de dividendes pendant la durée résiduelle de l'option soit une fonction continue du temps, et/ou du prix du sous-jacent. Dans le cas contraire, une autre source d'incertitude vient s'ajouter aux variations du prix du sous-jacent, et le prix de l'option s'en trouve affecter.

1-8-1 Versements des dividendes connus

Sous cette hypothèse, aussi bien le montant des dividendes à verser pendant la durée de vie résiduelle de l'option que les dates auxquelles ils seront versés ne sont soumis à aucune source d'incertitude.

Dans ce cas, pour déterminer la valeur de l'option, il suffit d'appliquer la formule de Black & Scholes en soustrayant au prix de l'action la valeur actualisée des dividendes qui seront versés d'ici à l'échéance de l'option. Ceci est cohérent avec le fait que le détenteur d'un call n'a aucun droit sur les dividendes qui seront versés d'ici à l'échéance de son option, puisque la valeur d'une telle option est toujours inférieure à celle d'une option identique dont le sous-jacent ne paie pas de dividendes.

Si on suppose que le dividende est d'un montant D , et qu'il est payé en t_1 , (avec $t < t_1 < T$) le prix de l'option est donné par les formules suivantes :

$$C = (S - De^{-rt_1})N(d_1) - Ke^{-r\tau}N(d_2) \text{ avec}$$

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S - De^{-rt_1}}{K}\right) + \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}, \text{ et } d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}, \tau_1 = t_1 - t.$$

1-8-2 Versements des dividendes inconnus

Lorsque ni le montant, ni la date de versement des dividendes ne sont connus, on suppose qu'ils sont une fonction connue du prix de l'action sous-jacente. Les modèles d'évaluation d'option dont la sous-jacente paie des dividendes reposent sur l'hypothèse d'un rendement en dividendes constant. Autrement dit, on suppose que le dividende versé par unité de temps représente une fraction $\delta(S, t) = \delta$.

Sous cette hypothèse, il suffit pour évaluer un call de soustraire au prix du sous-jacent la valeur actualisée du flux du dividende qui sera versé durant la vie de l'option. Cet ajustement est nécessaire car les détenteurs d'une option n'ont aucun droit sur les dividendes payés par l'action sous-jacente à leur option. Par conséquent, le prix d'un call dont le sous-jacent a un rendement en dividendes instantanés, égal à δ , est donné par les équations suivantes :

$$C = (S e^{-\delta\tau})N(d_1) - K e^{-r\tau}N(d_2) \text{ , avec}$$
$$d_1 = \frac{\ln \frac{S}{K} + \left((r-\delta) + \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \text{ , et } d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}$$

1-9 Evaluation des options sur indices boursiers

Evaluer une option sur indice revient à évaluer une option sur un tracker de cet indice. Le tracker est un portefeuille constitué des actions composant l'indice dans des proportions x_i ($1 \leq i \leq n$). Pour chaque action A_i , la proportion x_i correspondante est égale à sa capitalisation boursière divisée par la capitalisation de l'ensemble des actions composant l'indice. Soit : $x_i = \frac{CA_i}{\sum_{i=1}^n CA_i} = \frac{N_i S_i}{\sum_{i=1}^n N_i S_i}$.

Le tracker traque l'indice, en d'autres termes, sa valeur reproduit quasiment le mouvement de la valeur de l'indice.

On suppose que le prix du tracker suit une loi log-normale. C'est une hypothèse qui découle du fait que tous les prix des actions constituant le tracker sont supposés suivre chacun un processus log-normal.

Il faut cependant tenir compte des dividendes versés par les différentes actions A_i ($1 \leq i \leq n$) composant l'indice pendant la durée de vie résiduelle de l'option. Si on suppose qu'une action A_i ($1 \leq i \leq n$) verse des dividendes D_{ij} , à l'instant t_j ($1 \leq j \leq m$) et qu'il lui reste une durée T_{ij} jusqu'au versement des dividendes à la date t_j , alors le montant global des dividendes versés par les différentes actions constituant l'indice est la somme pondérée par les proportions x_i des dividendes actualisées à la date t de l'ensemble des actions composant l'indice.

$$\text{Soit } D = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m x_i D_{ij}, e^{-r\tau_{ij}}$$

Si on considère que la distribution des dividendes est continue dans le temps, la somme pondérée des dividendes actualisés D sera donnée par la formule suivante : $D = \int_t^T (\sum_{i=1}^n x_i D_{is}) e^{-r(T-t)} ds$.

Avec D_{is} : montant du dividende versé par l'action de rang i à l'instant $s > t$.

S'il y a versement de dividende à l'instant s , alors : $D_{is} \neq 0$;

S'il n'y a pas versement de dividende à l'instant s , alors : $D_{is} = 0$.

Si on désigne par I la valeur de l'indice, à l'instant t , et par I^* la valeur de cet indice diminué du montant des dividendes, alors la formule de la valeur d'une option d'achat sur indice boursier est la suivante : $C = I^* N(d_1) - K e^{-r(T-t)} N(d_2)$ avec

$$I^* = I - D \text{ et } d_1 = \frac{\ln(\frac{I^*}{K}) + ((r-\delta) + \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \text{ et } d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}.$$

En général, il est difficile de connaître le montant, et la date de distribution du dividende de chacune des actions qui composent l'indice. Cette formule est donc difficile à utiliser.

Section 2 : VOLATILITE

Dans le calcul de la valeur d'une option, la volatilité, et le taux d'intérêt sont deux paramètres inobservables. La volatilité est un paramètre déterminant dans le calcul de la valeur d'une option. C'est un paramètre stochastique contrairement à l'hypothèse de Black & Scholes qui le considère comme constant. Les principaux estimateurs de ce paramètre sont la volatilité historique, et la volatilité implicite.

2-1 Volatilité historique

La volatilité historique est mesurée par l'écart type du rendement R_t du sous-jacent, durant la période qui précède l'émission des options. Si on fait abstraction des dividendes, si on désigne par $S_t - dt$, et S_t le cours du sous-jacent respectivement au début, et à la fin de période, ce rendement s'écrit : $R_t = \frac{S_t - S_{t-dt}}{S_{t-dt}} = \frac{dS}{S} = d\ln S$.

Le rendement instantané du sous-jacent est supposé suivre un mouvement Brownien géométrique suivant l'équation : $\frac{dS}{S} = \mu dt + \sigma dz$. Où dz est un processus de Wiener-Levy suivant une loi normale centrée de variance dt . Il est équivalent d'affirmer que R_t suit une loi log-normale ou que $\ln(1 + R_t)$ suit une loi normale, ou

encore $\ln\left(\frac{S_t}{S_{t-\Delta t}}\right)$ suit une loi normale. Avec des observations du cours du sous-jacent, il est possible d'estimer la volatilité instantanée σ . Suivant l'hypothèse de constance de la volatilité de Black & Scholes, la meilleure estimation de la volatilité, pour des données journalières est la racine carrée de la variance empirique sans biais ($\hat{\sigma}^2$) donnée par les formules suivantes :

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n \left(\ln\left(\frac{S_t}{S_{t-1}}\right) - \hat{\mu} \right)^2 \text{ Où } \hat{\mu} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln\left(\frac{S_t}{S_{t-1}}\right).$$

Avec n le nombre de jours ouvrables passés, et par conséquent, le nombre d'observations à considérer pour le calcul de la volatilité.

Dans la formule de Black & Scholes, l'unité de temps pour mesurer les paramètres est, par convention, l'année. Ceci est vrai particulièrement pour la volatilité. Ainsi, si on considère un nombre de jours ouvrables de 250 par an, la volatilité annualisée est donnée par la formule suivante :

$$\sigma_{AN} = \hat{\sigma} \sqrt{\frac{250}{\Delta t}}$$

L'hypothèse de Black & Scholes concernant la stationnarité du prix du sous-jacent n'est pas conforme à la réalité. D'ailleurs la volatilité historique ne peut être que stochastique, rien qu'en considérant une période de calcul, sous la forme d'une fenêtre coulissante dans le temps.

2-2 Volatilité implicite

La volatilité implicite de Black & Scholes est définie comme la valeur de la volatilité σ qui égalise le prix de l'option donnée par la formule de Black & Scholes, et le prix de l'option observé sur le marché. Le calcul de la volatilité implicite nécessite donc l'inversion de la formule d'évaluation, en l'occurrence celle de Black & Scholes, tout en considérant la valeur de l'option sur le marché. Cette inversion est possible dans la mesure où la valeur du marché fonction de la volatilité est une bijection.

Pour calculer la volatilité implicite, on va utiliser un algorithme récursif. Pour cet algorithme, le calcul se fait d'une manière itérative, suivant une boucle en considérant 4 étapes. D'abord, on note que les quantités d_1 et d_2 de la formule de Black & Scholes peuvent se mettre sous la forme :

$$d_1 = \frac{A}{\sigma} + B\sigma, \text{ et } d_2 = \frac{A}{\sigma} - B\sigma$$

$$\text{Où } A = \frac{\ln(\frac{S}{Ke^{-r\tau}})}{\sqrt{\tau}} \text{ et } B = \frac{1}{2}\sqrt{\tau}.$$

Les 4 étapes de calcul sont les suivantes :

$\sigma = \sigma_0$ la volatilité est initialisée avec une valeur σ_0 d'où $N(d_1)$

$$d_1 = \frac{A}{\sigma} + B\sigma$$

$$N(d_2) = \frac{SN(d_1) - C}{Ke^{-r\tau}} \text{ d'où } d_2$$

$$\sigma = \frac{d_1 - d_2}{\sqrt{\tau}} \text{ puis retour à la case 1.}$$

Modélisation Stochastique pour l'Evaluation des Stock-options

Le calcul se fait jusqu'à ce que la différence des volatilités implicites correspondantes à deux itérations successives soit inférieure à un seuil donné ζ . La valeur de l'option C_t est stockée, après le calcul de la volatilité. La valeur minimale de l'écart $\varepsilon_t = |C_t - C|$ correspondra à la volatilité implicite recherchée. Cet algorithme est représenté par la figure suivante [28]:

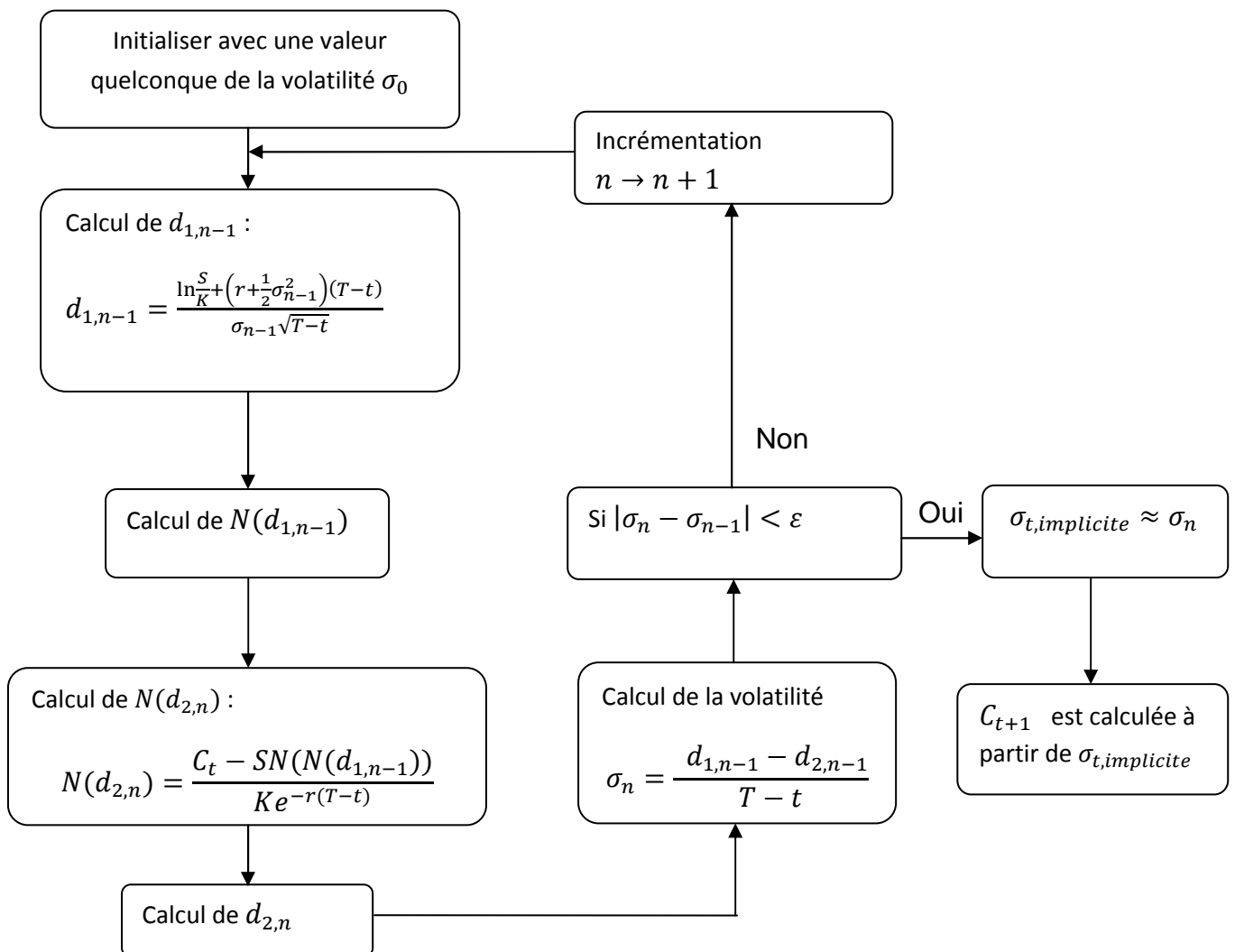


Figure 02 : Logigramme pour le calcul de la volatilité implicite

Conclusion

D'abord, la couverture delta-neutre nécessaire pour éliminer le risque est supposée continue dans le temps. Si cette couverture n'est pas continue, et qu'ils existent des intervalles de temps entre les différentes révisions du portefeuille, alors il y a un risque qui subsiste ; ce qui est en contradiction avec le modèle de Black & Scholes.

Ensuite, les coûts de transaction relatifs à la couverture du portefeuille sont supposés nuls. Ceci n'est pas du tout réaliste, car sur toutes les places du monde, il y a des coûts supports à la vente de produits financiers. Si ces coûts sont élevés, ceci va à l'encontre d'une couverture du portefeuille en continu.

Enfin, le modèle de Black & Scholes suppose que la volatilité du sous-jacent est, non seulement connue mais aussi constante. Or, la volatilité ne peut être directement observable, et sa mesure est très difficile. De plus, il est difficile de modéliser une variable qu'on ne peut pas observer.

CHAPITRE 3 : VALORISATION DES STOCK-OPTIONS

Dans cette partie, on se focalise sur les options de type américain. Comme son nom l'indique, les « Employées Stock-options » (ESO) attribuées dans le cadre d'une rémunération complémentaire des salariés sont des options américaines qui possèdent les caractéristiques suivantes : période d'indisponibilité (delayed vesting), non négociabilité, exercice anticipé, dilution, sans compter les éléments que la norme met à l'écart pour la valorisation. Ces options représentent un engagement pour l'entreprise qu'il faut désormais évaluer le plus justement possible, et à la date d'attribution.

Ce chapitre est organisé en quatre sections dont la première section traite l'état de l'art où on met en exergue l'état des lieux des travaux effectués sur le sujet d'une part, et on met l'accent sur le modèle retenu d'autre part.

La seconde section concerne l'approche analytique. Dans cette section, on décrit le modèle d'une ESO, et on calcule la valeur de l'option en question.

La troisième section est consacrée à l'approche par simulation de Monte-Carlo. Primo, on présente ce que la méthode de Monte-Carlo, après quoi on procède au choix des méthodes de simulation, et pour terminer avec cette partie, on effectue des simulations au cas par cas.

La quatrième section est destinée aux résultats des analyses, et commentaires. Et enfin, la cinquième section est consacrée aux limites, et aux améliorations possibles du modèle.

Section 1 : ETAT DE L'ART

1-1 Etat des lieux des travaux effectués sur le sujet

A l'origine, les stock-options étaient valorisées par leur valeur intrinsèque à la date d'attribution (APB 25), ce qui rendait inexistant tout modèle d'évaluation, d'autant plus que ces options étaient en général attribuées « at-the-money ». Les nouvelles normes SFAS 123 (du côté américain) et IFRS 2 (du côté européen) imposent de prendre en compte à la fois le comportement d'exercice anticipé des bénéficiaires, qui diminue significativement la valeur des options et les classes de risques différentes suivant les individus. Il est alors préconisé le recours au modèle de Black & Scholes (1973) [4] appliqué à des groupes de bénéficiaires de caractéristiques différentes, la maturité étant ramenée à la durée de vie attendue des options correspondant à

chaque classe de risque. Cependant, même si ce modèle est très avantageux d'un point de vue pratique (compréhensible, maniable, mise en œuvre simple et rapide), il surestime la valeur des options. Le modèle de Black & Scholes repose sur certaines hypothèses comme la continuité du processus de diffusion ou une volatilité constante et connue. Et la réalité, par l'évolution dans le temps de la volatilité d'une action, s'en éloigne sensiblement [26].

Le grand succès des stock-options dans les années 90 d'une part, et l'avènement des nouvelles normes comptables d'autre part ont conduit de nombreux analystes, et chercheurs à se pencher sur le problème de l'évaluation. En particulier, Rubinstein (1995) [22] a effectué une étude générale sur les caractéristiques spécifiques aux stock-options, les paramètres qui impactent la valorisation, et leur sensibilité. Pour cela, en utilisant un modèle d'arbre binomial, l'influence de chaque paramètre est analysée par comparaison du résultat avec celui obtenu par Black & Scholes dans le cas d'options classiques. De par leur flexibilité, les modèles binomiaux ont été employés par un grand nombre de chercheurs dans une optique d'évaluation mais, aussi d'analyse comparative des paramètres. Parmi eux, Carpenter (1998) [7] compare une approche d'utilité attendue avec le départ prématuré du bénéficiaire (valorisation du point de vue de la firme). De plus, il effectue une étude empirique minutieuse sur le comportement d'exercice des bénéficiaires.

On peut noter qu'il existe en fait deux façons de voir le pricing des stock-options : Hall-Murphy (2002) [13] se fonde sur l'étude de Carpenter pour conclure que la valeur des options est bien différente selon qu'il s'agit du point de vue du dirigeant ou celui de la firme. Chance, et Yang (2004) [9] s'attachent particulièrement à la valeur des options du côté de l'employé en étudiant l'effet des dividendes sur la valorisation. De façon générale, les employés ont plutôt une aversion pour le risque, et ne peuvent pas, de surcroît, diversifier ce risque sur le marché. A l'opposé, l'entreprise via ses actionnaires a la possibilité de se couvrir face à ce risque : les options possèdent alors une valeur plus importante au point de vue de la firme. Cette dernière mise donc sur l'aspect stimulant de ce mode de rémunération pour compenser la perte en valeur (et même espérer mieux) liée à l'attribution des options. La norme IFRS 2 concerne la valorisation de l'engagement de l'entreprise, c'est donc l'approche liée à la firme qui intéresse. Pour finir avec les modèles binomiaux, on peut citer Hull et White (2004) [14] qui se placent du point de vue de l'entreprise, et

modélisent l'exercice anticipé des bénéficiaires par deux facteurs supposés indépendants : le taux de départ (« exit rate ») relatif au départ volontaire ou non du salarié d'une part, et l'effet psychologique dû à la hausse du cours (exercice si dépassement d'une barrière) d'autre part. Ainsi, par rapport à cette dernière supposition, lorsqu'un employé possède une option fortement « in-the-money », il aura tendance à l'exercer par peur du risque de chute des cours, et la perte de la valeur temps de l'option. Cette approche est à la base des modèles analytiques les plus récents.

En parallèle avec l'engouement rattaché au pricing des options exotiques, plusieurs auteurs ont élaboré des formules fermées dans le cadre plus particulier des ESO. La plupart de ces modèles utilisent un temps d'arrêt (le premier instant de saut d'un processus de Poisson) pour décrire l'exercice anticipé des options. Ces modèles, bien connus sous le nom de modèle à intensité, ont eu un énorme succès pour modéliser la structure par terme des taux d'intérêt ou encore pour évaluer des dérivées de crédit en présence du risque de défaut : de nombreux résultats sont donc exploitables (voir [17]). Ainsi, Carr, et Linetsky (2000) [8] ont développé une formule fermée exclusivement basée sur le taux de départ, et élaborent deux approches : une intensité constante est plus importante dans le cas d'une option « in-the-money », et une intensité croissante en fonction de la valeur intrinsèque (plus l'option est « in-the-money », plus elle aura tendance à être exercée rapidement). Les auteurs ne prennent en compte ni la période d'indisponibilité ni la possibilité de départ brutal d'un salarié. De plus, la mise en place du modèle nécessite une intégration numérique, trop coûteux pour des calculs actuariels effectués sur différentes classes de risque. Raupach (2003) [20] trouve une formule semi-fermée (nécessitant une double intégration numérique) dans le cas du modèle élaboré par Hull, et White (barrière exponentielle combinée avec un taux de départ à intensité constante). Enfin, Cvitanic, Wiener, et Zapatero (2004) [10] se basent sur le même modèle mais trouvent une formule fermée.

L'évaluation analytique proposée dans ce document est l'adaptation de cette dernière approche aux contraintes de la norme IFRS 2.

1-2 Le modèle retenu

Avant de se lancer dans un choix définitif pour un modèle d'évaluation d'ESO, il est préférable d'étudier les avantages, et inconvénients des articles cités ci-dessus.

Comme on a pu le voir, deux voies principales ont été empruntées pour évaluer les ESO à leur juste valeur : les modèles analytiques, et les modèles à arbres binomiaux ou trinomiaux. On peut également utiliser des simulations de Monte-Carlo.

La première approche consiste à trouver une formule pour évaluer le prix des ESO. Elle nécessite des restrictions dans le choix des paramètres pour des raisons pratiques de calcul. Sont souvent mis à l'écart : l'effet dilutif, la volatilité stochastique du sous-jacent, les considérations liées à la théorie de l'agence (il est clair que certains dirigeants peuvent affecter avec leurs actions le prix des ESO), les conditions de performance boursière. Toutefois, la richesse du calcul stochastique a permis d'obtenir des résultats intéressants pour le prix des ESO, la date d'exercice attendue, et la valeur attendue de l'action à l'exercice, cela en prenant en compte les caractéristiques principales des ESO (voir [8], [10], [20]). De plus, l'avantage évident est double : implémentation relativement simple et rapidité de calcul.

La deuxième approche semble plus flexible dans le sens où elle permet de capter l'influence d'un plus grand nombre de facteurs. Cependant, certaines hypothèses plus complexes sur le comportement d'exercice des bénéficiaires paraissent difficiles à mettre en œuvre. Par exemple, un niveau de la barrière psychologique variable selon l'évolution plus ou moins récente du cours de l'action pose des difficultés à un modèle binomial puisque celui-ci ignore par quel chemin on a abouti à un nœud précis de l'arbre. De plus, comme expliqué Cvitanic, Wiener, et Zapatero, ces modèles convergent assez lentement, et la convergence n'est pas uniforme.

La troisième approche apparaît complémentaire car elle permet souvent de comparer, et de vérifier les résultats obtenus dans les deux cas précédents. De plus, les simulations de Monte-Carlo offrent une grande flexibilité face à la complexité du modèle choisi. Cependant, le talon d'Achille de cette méthode reste le temps d'attente exorbitant des résultats dès qu'on cherche un minimum de précision.

Définitivement, on n'a pas choisi de restreindre à une approche particulière : c'est plutôt la complémentarité de ces dernières qui a été retenue. En effet, même si, il faut le reconnaître, le mémoire est centré sur l'obtention d'une formule fermée, des simulations de Monte-Carlo ont été développées en parallèle dans un but de comparaison de résultat, et de validation de formules.

Section 2 : APPROCHE ANALYTIQUE

Le modèle analytique qu'on va développer s'appuie essentiellement sur J. Cvitanic, Z. Wiener et F. Zapatero [10] et P. Raupach [20] pour l'exercice anticipé des options, et sur P. Carr, et V. Linetsky [8], Nicole El Karoui, et Lionel Martellini [11], et sur D. Lando [17] pour les aspects mathématiques liés aux modèles à intensité d'une part, et, plus généralement, au pricing à horizon aléatoire d'autre part.

2-1 Description du modèle

Le modèle s'efforce de calculer la juste valeur du prix d'une ESO attribuée pour un individu donné sous une évaluation risque neutre du point de vue de la firme. En ce qui concerne ce risque, l'entreprise est moins pénalisée que l'employé par les problèmes de diversification du risque. En ayant une position courte sur les options attribuées, elle pourrait les racheter sous certaines conditions. De plus, les actionnaires qui autorisent l'attribution des ESO ont la possibilité d'échanger librement leurs actions, et d'investir dans l'actif sans risque. Les employés ne peuvent pas en général se couvrir à cause du caractère non négociable de ces options. Ainsi, d'autant plus qu'ils ont généralement une aversion pour le risque, on peut supposer que la firme est neutre au risque concernant son engagement.

Cours de l'action et formule de Black & Scholes

Comme dans le modèle de Black & Scholes [4], on suppose que le cours de l'action suit un processus log-normal : $\frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sigma dw_t$. Sous la mesure risque neutre, la dynamique du cours de l'action dévient : $\frac{dS_t}{S_t} = r dt + \sigma dw_t$. (3.2-1), et peut se mettre sous la forme : $S_t = S_0 \exp \left[\left(r - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) t + \sigma w_t \right]$ (3.2-2), avec μ le drift, σ la volatilité, r le taux sans risque. w_t est un mouvement Brownien standard sur un espace de probabilité complet $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ que l'on munira de la filtration $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \geq T_0}$ ⁽¹⁾.

Dans l'univers risque neutre, le processus de prix des actions est une martingale. La valeur C_t en t d'une option de maturité T peut se voir comme l'espérance actualisée de ses flux futurs : $C_t = E \left[e^{-r(T-t)} (S_t - K)^+ / \mathcal{F} \right]$

(1) On se place directement dans l'univers risque neutre et \mathbb{P} représente la probabilité dans cet univers.

On obtient pour $t = 0$ la formule de Black & Scholes qui dans le cas de dividende continu δ s'écrit : $C = (S_0 e^{-\delta T}) N(d_1) - K e^{-rT} N(d_2)$, avec

$$d_1 = \frac{\ln \frac{S}{K} + \left((r - \delta) + \frac{1}{2} \sigma^2 \right) T}{\sigma \sqrt{T}} \quad , \text{ et } \quad d_2 = d_1 - \sigma \sqrt{T} \quad (3.2-3)$$

L'exercice anticipé

Rien de tel qu'un petit dessin aide pour introduire les idées sous-jacentes à la modélisation du comportement d'exercice anticipé des optionnaires.

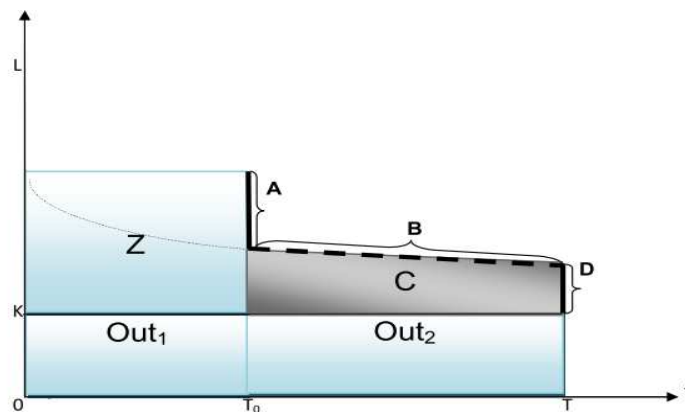


Figure 03: Les scénarios d'exercice des options

On fixe dorénavant T_a à 0. T_a est la date d'attribution ou « grant date ». Il s'agit de la date du jour où le droit est accordé. Elle figure dans la lettre de notification individuelle reçue par le salarié. A cette date, la juste valeur des options doit être calculée individuellement, et placée en charge dans le compte résultat.

L'intervalle $[T_a, T_0]$, où T_0 est la date à laquelle commence l'exercice des options, est la période d'indisponibilité ou « vesting period ». Ainsi, entre T_a et T_0 les bénéficiaires ne peuvent pas exercer leurs options. Cela revient à imposer une durée minimale de service dans l'entreprise. De ce fait, dans le cas d'un départ volontaire du salarié, d'une démission ou d'un licenciement pendant cette période, les options détenues par le salarié sont définitivement perdues. Comme les options sont attribuées en 0, et comme elles ne peuvent être exercées avant la date T_0 , elles sont donc abandonnées dans la région Z si l'employé quitte la firme avant T_0 .

On note $L_t = Le^{\alpha(t-T_0)}$ l'équation de la courbe B. On suppose que L et α sont deux réels⁽²⁾ tels que $L_t > K$ pour tout t dans $[T_0, T]$, ce qui impose $L > K$ et $\alpha > -\frac{1}{T-T_0} \ln(\frac{L}{K})$. $[T_0, T]$ est la période d'exercice. C'est la période pendant laquelle les options peuvent être exercées, la date T étant la date d'échéance des options. Cependant, le conseil d'administration a le droit de suspendre le droit de lever les options pendant un délai qui ne peut excéder 3 mois en cas d'opération exigeant une connaissance exacte, et préalable du nombre d'actions composant le capital social (augmentation de capital ou émission de valeur mobilières, donnant accès au capital, fusion ou scission, regroupement ou division d'actions par exemple).

Dans l'intervalle $[T_0, T]$, l'employé peut exercer ses options dans le cas des scénarios suivants :

Scénario A :

En T_0 , si le cours de l'action se situe sur la demi-droite A, c'est-à-dire lorsque $S_{T_0} \in [L, +\infty[$. Dans ce cas, il s'agit d'une option européenne d'échéance T_0 dont l'exercice est conditionné à une valeur intrinsèque (en T_0) supérieure à $L - K$.

Scénario B :

Entre T_0 et T , si le scénario A ne s'est pas produit⁽³⁾, les options sont exercées lorsque le cours de l'action dépasse pour la première fois la barrière exponentielle (courbe B) d'équation L_t . Appelons T_b le premier instant de franchissement de L_t après T_0 .

$$T_b = \inf\{t \geq T_0, S_t \geq L_t\} = \inf\{t \geq T_0, S_t e^{-\alpha(T-T_0)} \geq L\} \quad (3.2-4)$$

T_b est donc un temps d'arrêt adapté à la filtration \mathbb{F} car S_t est continu⁽⁴⁾.

(2) dans le cas d'une barrière exponentielle décroissante, qui incite les employés à exercer à mesure du rapprochement de la maturité, on choisit α négatif.

(3) Dans le cas où $S_{T_0} < L$

(4) Voir [16]

Scénario C

Entre T_0 et T , si les scénarios A et B ne se sont pas réalisés, au moment du premier instant \mathcal{T}_λ d'arrivée d'un processus d'intensité λ \mathbb{F} -prévisible : l'option pourra être exercée dans la région C en \mathcal{T}_λ si le pay-off est positif. Un lecteur non familier avec les processus à intensité, et plus particulièrement, les processus de Cox, pourra se reporter à l'Annexe B où une définition formelle est fournie, et plusieurs propriétés sont développées.

$$\mathcal{T}_\lambda = \inf \left\{ t \geq T_0, \int_{T_0}^t \lambda_s ds \geq E_1 \right\}$$

Avec E_1 est une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre 1 qu'on suppose indépendante de la filtration \mathbb{F} : \mathcal{T}_λ et \mathcal{T}_b sont donc deux variables aléatoires indépendantes.

A ce stade, il convient de préciser les filtrations utilisées pour le formalisme mathématique. On a vu que toutes les variables d'états étaient adaptées à la filtration \mathbb{F} . Cependant, cette filtration est trop pauvre pour capter le flux d'informations relatif au temps d'arrêt \mathcal{T}_λ . On fixe ainsi un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{G}, \mathbb{G}, \mathbb{P})$ suffisamment large pour supporter les processus S , λ , et le temps d'arrêt \mathcal{T}_λ . La filtration $\mathbb{G} = (\mathcal{G}_t)_{t \geq 0}$ capture toute l'information relative à toutes les sources d'aléa au fur et à mesure que le temps s'écoule. On peut donc séparer les flux d'informations de la façon suivante :

$$\mathcal{F}_t = \sigma\{S_u, \lambda_u, 0 \leq u \leq t\}$$

$$\mathcal{H}_t = \sigma\{\mathbb{1}_{\{\mathcal{T}_\lambda \leq s\}}, 0 \leq s \leq t\}$$

$$\mathcal{G}_t = \mathcal{F}_t \vee \mathcal{H}_t.$$

Avec \mathcal{F}_t qui représente l'information jusqu'au temps t relatif au processus (S, λ) et \mathcal{H}_t qui permet de dire si l'exercice a eu lieu avant t ou non (\mathbb{H} est la plus petite filtration pour laquelle \mathcal{T}_λ est un temps d'arrêt). On note également que la filtration \mathbb{F} ne fournit que l'information sur la tendance du taux d'exercice (l'évolution de λ_t) mais, ne permet pas de décider à un instant t si l'exercice a eu lieu. Cette information est contenue dans la filtration \mathbb{G} par rapport à laquelle λ est un temps d'arrêt. En résumé, même en connaissant la perspective d'exercice d'un bénéficiaire, l'événement

d'exercice est perçu comme une surprise totale, il est totalement imprévisible (tandis que la tendance λ l'est). Ce formalisme conduit à une grande maniabilité des processus à intensité. En effet, la fonction de survie conditionnelle et la densité conditionnelle de \mathcal{T}_λ s'écrivent :

$$E[\mathbb{1}_{\{\mathcal{T}_\lambda > t\}}/\mathcal{F}_t] = e^{-\int_{T_0}^t \lambda_s ds} \mathbb{1}_{\{t \geq T_0\}} \quad (3.2-5)$$

$$E[\mathbb{1}_{\{\mathcal{T}_\lambda > T\}}/\mathcal{F}_t \vee \mathcal{H}_t] = \mathbb{1}_{\{\min(T, \mathcal{T}_\lambda) \geq \max(t, T_0)\}} e^{-\int_{\max(t, T_0)}^T \lambda_s ds} \quad (3.2-6)$$

$$\frac{\partial}{\partial S} E[\mathbb{1}_{\{\mathcal{T}_\lambda \leq S\}}/\mathcal{F}_t \vee \mathcal{H}_t] = \mathbb{1}_{\{\min(S, \mathcal{T}_\lambda) > \max(t, T_0)\}} \lambda_S e^{-\int_{\max(t, T_0)}^S \lambda_u du} \quad (3.2-7)$$

Scénario D

A la maturité T , si aucun des trois scénarios précédents ne s'est réalisé, l'option est exercée sur le segment D si, bien entendu, $K \leq S_T \leq L e^{\alpha(T-T_0)}$.

La figure ci-après illustre un exemple concret d'une trajectoire du cours de l'action. On constate que on se situe soit dans le scénario B ($S_{T_0} < L$ et S_t atteint L_t avant T juste avant la 6^{ème} année), soit dans le scénario C en cas d'interruption brutale du contrat de travail avant T_b .

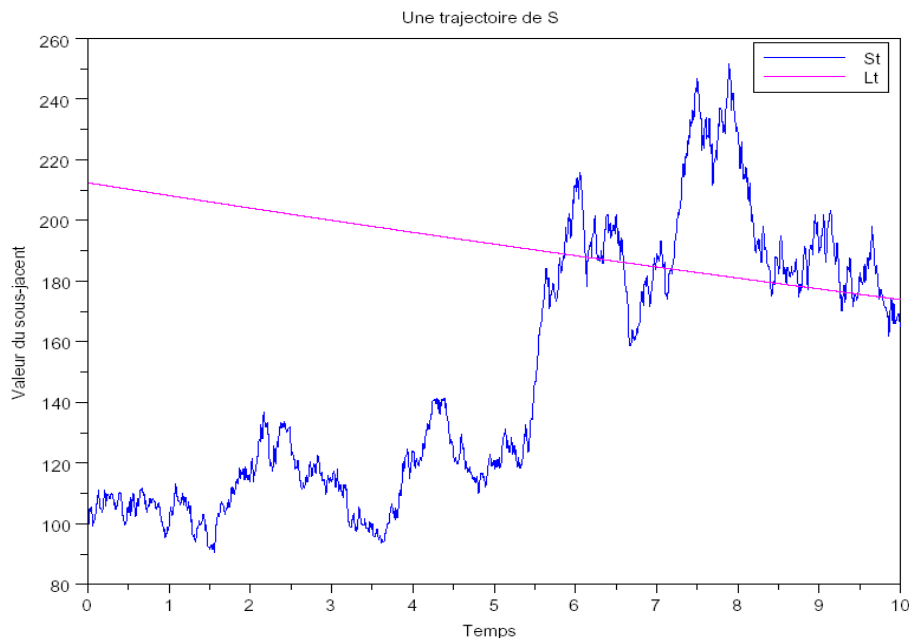


Figure 04 : Trajectoire de S dans le cas où $S_{T_0} = 100$, $r = 0.05$, $\sigma = 0.2$, $T_0 = 3$, $T = 10$, $L = 200$, et $\alpha = -0.02$.

On tient à préciser que cette trajectoire est la courbe représentative de la fonction du cours de l'action S_t de l'équation (3.2-2).

2-2 Calcul de la valeur de l'option

Dans cette partie, on évalue à la juste valeur une ESO en t dans le cadre du modèle décrit précédemment, et en utilisant la méthode de l'espérance actualisée des flux futurs. Dans un premier temps, notre évaluation se situe dans un contexte très général : taux d'intérêt stochastique (r est un processus \mathbb{F} -adapté), et intensité stochastique (λ est un processus \mathbb{F} -adapté aussi). En effet, dans l'optique d'une amélioration, et d'une extension future du modèle (Projet de Thèse que j'envisagerai de faire), on doit rester le plus large possible. On rétrécira ensuite le champ d'action, pour des raisons pratiques de calcul, à un taux d'intérêt, et une intensité constants.

De plus, les quatre classes de scénarios définis précédemment forment des ensembles disjoints d'événements :

$$\text{Scenario A: } E_a = \{S_{T_0} \geq L\}$$

$$\text{Scenario B: } E_b = \{S_{T_0} < L\} \cap \{T_b < T\} \cap \{T_\lambda > T_b\}$$

$$\text{Scenario C: } E_c = \{S_{T_0} < L\} \cap \{T_\lambda < T\} \cap \{T_b > T_\lambda\}$$

$$\text{Scenario D: } E_d = \{S_{T_0} < L\} \cap \{T_b > T\} \cap \{T_\lambda > T\}.$$

Si on note T le temps d'arrêt correspondant à la réalisation d'un des scénarios précédents, on a : $C_t = E \left[e^{-\int_t^T r_s ds} (S_T - K)^+ / \mathcal{G}_t \right]$ qui se décompose en quatre termes :

$$C_t = C_t^a + C_t^b + C_t^c + C_t^d \quad (3.2-8)$$

$$= E \left[e^{-\int_t^{T_0} r_s ds} (S_{T_0} - K)^+ \mathbb{1}_{\{S_{T_0} \geq L\}} / \mathcal{G}_t \right] \quad (3.2-9)$$

$$+ E \left[e^{-\int_t^{T_b} r_s ds} (Le^{\alpha(T_b - T_0)} - K) \mathbb{1}_{\{T_b < T\}} \mathbb{1}_{\{T_\lambda > T_b\}} / \mathcal{G}_t \right] \quad (3.2-10)$$

$$+ E \left[e^{-\int_t^T r_s ds} (S_{T_\lambda} - K)^+ \mathbb{1}_{\{T_\lambda < T\}} \mathbb{1}_{\{T_b > T_\lambda\}} \mathbb{1}_{\{S_{T_0} < L\}} / \mathcal{G}_t \right] \quad (3.2-11)$$

$$+ E \left[e^{-\int_t^T r_s ds} (S_T - K)^+ \mathbb{1}_{\{T_b > T\}} \mathbb{1}_{\{T_\lambda > T\}} \mathbb{1}_{\{S_{T_0} < L\}} / \mathcal{G}_t \right] \quad (3.2-12)$$

Grace à (3.2-6) et (3.2-7), en conditionnant sur $\mathcal{F}_t \vee \mathcal{H}_t$, on obtient des expressions plus simples pour les C_t^x ($x \in \{a, b, c, d\}$), valeurs de l'option d'achat relatives aux quatre scénarios de la figure n°02. On donne dans les sous-titres suivants les expressions générales⁽⁵⁾ puis pratiques⁽⁶⁾ des C_t^x (r, λ constants et $t = 0$).

Calcul de C_t^a

$$\begin{aligned} C_t^a &= E \left[e^{-\int_t^{T_0} r_s ds} (S_{T_0} - K)^+ \mathbb{1}_{\{S_{T_0} \geq L\}} / \mathcal{G}_t \right] \\ &\doteq E \left[e^{-rT_0} (S_{T_0} - K)^+ \mathbb{1}_{\{S_{T_0} \geq L\}} \right] \end{aligned} \quad (3.2-13)$$

Calcul de C_t^b

$$\begin{aligned} C_t^b &= E \left[e^{-\int_t^{T_b} r_s ds} (Le^{\alpha(T_b - T_0)} - K) \mathbb{1}_{\{T_b < T\}} \mathbb{1}_{\{S_{T_0} < L\}} E[\mathbb{1}_{\{T_\lambda > T_b\}} / (\mathcal{F}_t \vee \mathcal{H}_t)] / \mathcal{G}_t \right] \\ &= E \left[e^{-\int_t^{T_b} r_s ds} e^{-\int_{T_0}^{T_b} \lambda_s ds} (Le^{\alpha(T_b - T_0)} - K) \mathbb{1}_{\{T_b < T\}} \mathbb{1}_{\{S_{T_0} < L\}} / \mathcal{G}_t \right] \\ &\doteq e^{\lambda T_0} E \left[e^{-(r+\lambda)T_b} (Le^{\alpha(T_b - T_0)} - K) \mathbb{1}_{\{T_b < T\}} \mathbb{1}_{\{S_{T_0} < L\}} \right] \end{aligned} \quad (3.2-14)$$

(5) Marqué par un « = »

(6) Marqué par un « \doteq »

Calcul de C_t^c

$$\begin{aligned} C_t^c &= E \left[\mathbb{1}_{\{S_{T_0} < L\}} E \left[e^{-\int_t^{T_\lambda} r_s ds} (S_{T_\lambda} - K)^+ \mathbb{1}_{\{T_\lambda < T\}} \mathbb{1}_{\{T_b > T_\lambda\}} / (\mathcal{F}_t \vee \mathcal{H}_t) \right] / \mathcal{G}_t \right] \\ &= E \left[\mathbb{1}_{\{S_{T_0} < L\}} \left[\int_{T_0}^T \lambda_u e^{-\int_t^u r_s ds} e^{-\int_{T_0}^u \lambda_s ds} (S_u - K)^+ \mathbb{1}_{\{T_b > u\}} \right] \right] \\ &\doteq \lambda e^{\lambda T_0} E \left[\mathbb{1}_{\{S_{T_0} < L\}} \int_{T_0}^T e^{-(r+\lambda)u} (S_u - K)^+ \mathbb{1}_{\{T_b > u\}} du \right] \quad (3.2-15) \end{aligned}$$

Calcul de C_t^d

$$\begin{aligned} C_t^d &= E \left[e^{-\int_t^T r_s ds} (S_T - K)^+ \mathbb{1}_{\{T_b > T\}} \mathbb{1}_{\{S_{T_0} < L\}} E[\mathbb{1}_{\{T_\lambda > T\}} / (\mathcal{F}_t \vee \mathcal{H}_t)] / \mathcal{G}_t \right] \\ &= E \left[e^{-\int_t^T r_s ds} e^{-\int_{T_0}^T \lambda_s ds} (S_T - K)^+ \mathbb{1}_{\{T_b > T\}} \mathbb{1}_{\{S_{T_0} < L\}} / \mathcal{G}_t \right] \\ &\doteq e^{-(r+\lambda)T} e^{\lambda T_0} E \left[(S_T - K)^+ \mathbb{1}_{\{T_b > T\}} \mathbb{1}_{\{S_{T_0} < L\}} \right] \quad (3.2-16) \end{aligned}$$

Pour des raisons de clarté, les calculs sont développés en annexe A. A titre indicatif, il s'agit de conditionner dans un premier temps par rapport à \mathcal{F}_{T_0} , et d'exploiter ensuite les résultats obtenus dans la littérature concernant la valorisation analytique des options à barrière.

Section 3 : APPROCHE PAR SIMULATION DE MONTE-CARLO

On va effectuer pour chaque sous-option les simulations de Monte-Carlo permettant de vérifier la cohérence des formules trouvées précédemment. Il a paru important d'exposer ici les problématiques rencontrées, et les solutions apportées lors de l'application des méthodes de Monte-Carlo au calcul des ESO, ne serait-ce que pour une extension future.

3-1 Préliminaire [48]

Les méthodes de Monte-Carlo reposent sur la loi des grands nombres : si $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes sur \mathbb{R} et g une fonction telle que $E[g(X_i)]$ existe pour tout $i \in \mathbb{N}$, alors $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n g(X_i) \rightarrow E[g(X)]$ (3.3-17) presque sûrement.

Pour simuler les scenarios conduisant à la valeur des sous-options, il faut d'abord savoir simuler un mouvement Brownien géométrique. Pour cela, on a besoin de simuler une variable aléatoire de loi normale centrée réduite ε . La simulation d'un mouvement Brownien géométrique peut s'effectuer de deux manières :

Soit directement, si on veut simuler la valeur du cours d'une action à un instant précis connaissant sa valeur initiale S_{T_0} , et toutes ses caractéristiques classiques :

$$S_t = S_{T_0} \exp \left(\left(r - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) t + \sigma \sqrt{t} \varepsilon \right)$$

Soit pas à pas en simulant successivement toutes les valeurs du Brownien entre l'instant initial, et la date de fin de simulation en discrétisant l'équation différentielle stochastique (3.2-1) vérifiée par le processus S :

$$\begin{cases} S_{T_0} = S \\ S_{t+\Delta t} = S_t (1 + r\Delta t + \sigma \sqrt{\Delta t} \varepsilon) \end{cases}$$

3-2 Choix des méthodes de simulation

A première vue, la méthode directe paraît attrayante car elle ne nécessite qu'une seule réalisation de ε pour générer la valeur d'une action à une date donnée. Mais, on a observé précédemment que la valeur de l'option dépendait de la totalité du chemin parcouru par le cours de l'action. La seconde méthode s'avère alors plus adaptée au problème. Cependant, la connaissance des densités de \mathcal{T}_b et \mathcal{T}_λ a permis de simuler ces deux dernières sources d'aléa intervenant dans le calcul de l'option : la méthode directe n'a donc pas dit son dernier mot ! Ainsi, pour la deuxième méthode, les étapes du calcul du prix d'un call par la méthode de simulation de Monte-Carlo sont les suivantes [48] :

- Diviser la durée T de l'option en m pas $\Delta t = \frac{T}{m}$. Δt est défini sur une base annuelle car tous les paramètres du call sont exprimés sur une base annuelle.
- Générer un premier nombre aléatoire ε et calculer S_{T_1} à partir de S_{T_0} (connu).
- Générer de façon séquentielle d'autres variables aléatoires et substituer dans (3.2-1).

On obtient en bout de piste une trajectoire de S . On calcule alors sa moyenne sur la trajectoire : $\bar{S} = \frac{\sum S_j}{m}$.

On calcule le cash-flow final de l'option pour cette trajectoire : $CF_i = (\bar{S}_i - K)$. On effectue N itérations de la sorte que N doit être important pour réduire autant que possible \hat{S} , et on obtient un cash-flow respectif pour chaque itération.

Modélisation Stochastique pour l'Evaluation des Stock-options

On obtient finalement le prix du call : $\hat{C} = e^{-r(T-t)} \sum_{i=1}^N \frac{CF_i}{N}$. L'écart type de cette estimation est le suivant : $\hat{S} = \frac{1}{\sqrt{N-1}} \sqrt{\sum_i (C_i - \hat{C})^2}$, avec $C_i = e^{-r(T-t)} CF_i$, i symbolise l'itération.

A titre illustratif, voici les graphiques de la densité de \mathcal{T}_b et \mathcal{T}_λ dans le cas où λ est supposé constant.

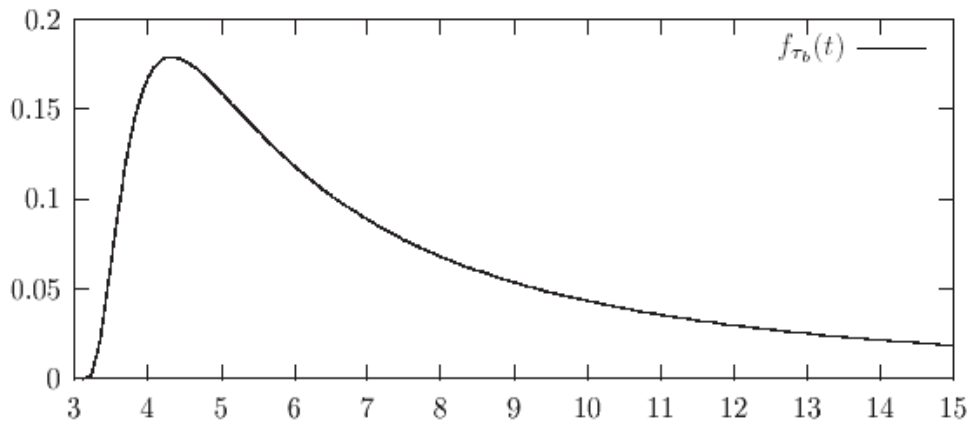


Figure 05 : Densité de \mathcal{T}_b pour $S_{T_0} = 100$, $r = 0.05$, $\sigma = 0.2$, $T_0 = 3$, $T = 15$, $L = 150$, et $\alpha = -0.02$.

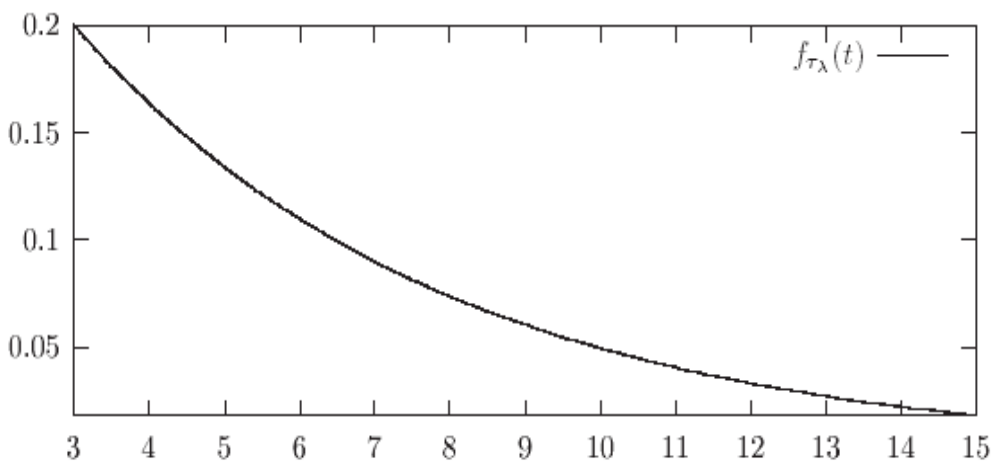


Figure 06 : Densité de \mathcal{T}_λ pour $T_0 = 3$ et $\lambda = 0.2$

On peut à partir de là, simuler une variable aléatoire de même loi que \mathcal{T}_b , en procédant par la méthode de rejet par exemple. Pour simuler \mathcal{T}_λ , il suffit de générer

une variable aléatoire E_1 de loi exponentielle de paramètre 1. On a donc $\mathcal{T}_\lambda = \inf\{t \geq T_0, \lambda(t - T_0) \geq E_1\} = T_0 + \frac{E_1}{\lambda}$.

3-3 Simulations au cas par cas [49]

Les simulations ont été réalisées à partir des formules suivantes :

$$C_t^a = e^{-rT_0} E \left[(S_{T_0} - K)^+ \mathbb{1}_{\{S_{T_0} \geq L\}} \right]$$

$$C_t^b = E \left[e^{-r\mathcal{T}_b} (Le^{\alpha(\mathcal{T}_b - T_0)} - K) \mathbb{1}_{\{\mathcal{T}_b < T\}} \mathbb{1}_{\{\mathcal{T}_\lambda > \mathcal{T}_b\}} \mathbb{1}_{\{S_{T_0} < L\}} \right]$$

$$C_t^c = E \left[e^{-r\mathcal{T}_\lambda} (S_{\mathcal{T}_\lambda} - K)^+ \mathbb{1}_{\{\mathcal{T}_\lambda > T\}} \mathbb{1}_{\{\mathcal{T}_b > \mathcal{T}_\lambda\}} \mathbb{1}_{\{S_{T_0} < L\}} \right]$$

$$C_t^d = e^{-rT} E \left[(S_{\mathcal{T}_\lambda} - K)^+ \mathbb{1}_{\{\mathcal{T}_b > T\}} \mathbb{1}_{\{\mathcal{T}_\lambda > T\}} \mathbb{1}_{\{S_{T_0} < L\}} \right]$$

On remarque que C^a nécessite seulement la simulation de S_{T_0} , ce qui ne pose aucun problème. De plus, pour C^b , il faut d'abord simuler S_{T_0} puis \mathcal{T}_b et \mathcal{T}_λ et, en fonction du résultat des tests effectués, calculer le « pay-off » futur. Ainsi, la simulation de C^b permet d'obtenir le graphique suivant :

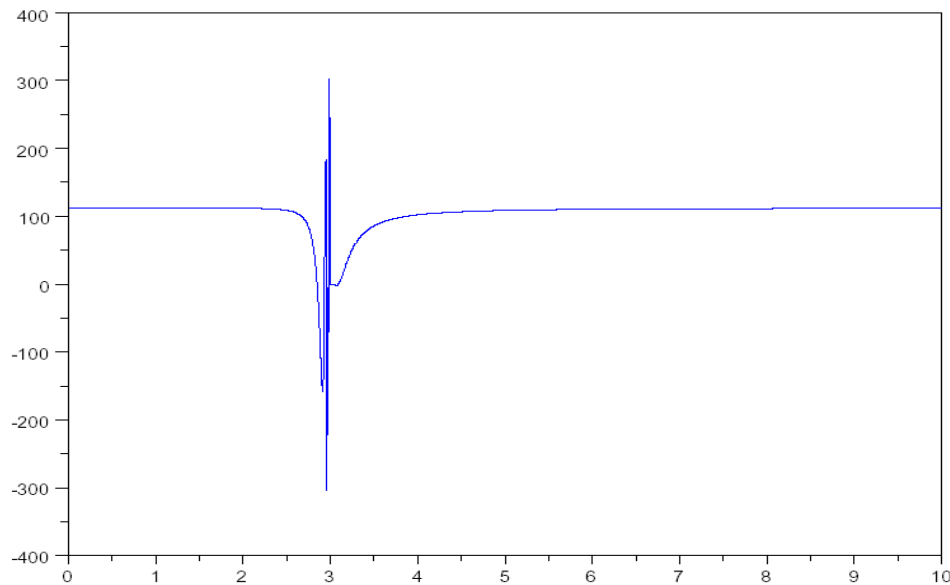


Figure 07 : courbe de C^b à valeur dans \mathbb{C} pour $S_{T_0} = 100$, $r = 0.05$, $\sigma = 0.2$, $T_0 = 3$, $T = 10$, $L = 200$, et $\alpha = -0.02$.

Cette courbe indique le moment opportun où la sous option C^b peut être exercée. La figure met donc en évidence que, juste avant la 6^{ième} année, la valeur de

la sous option C^b est optimale. On entend ici par valeur optimale le fait que la valeur résiduelle de l'option $(L_t - K)$ dépasse la barrière exponentielle d'équation L_t . On remarque que la valeur résiduelle oscille dans l'intervalle $[-400; 400]$. Cette valeur négative est due à la simulation de la densité de \mathcal{T}_b qui retourne de valeur complexe (dans \mathbb{C} , voir annexe A pour la densité de \mathcal{T}_b). En ne prenant que la valeur réelle, la figure se présente comme suit :

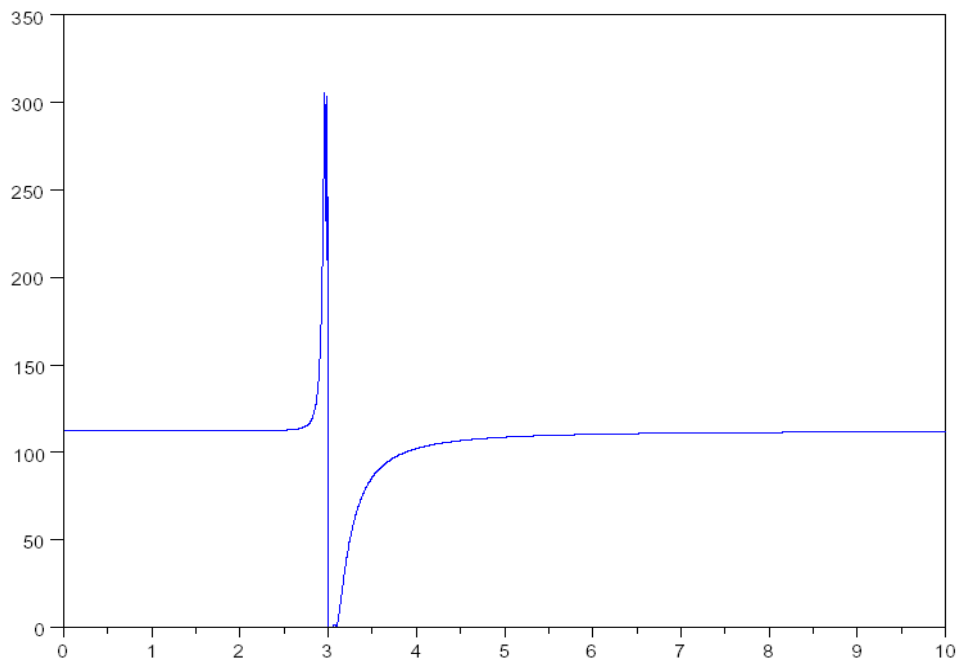


Figure 08 : courbe de C^b à valeur réelle pour $S_{T_0} = 100$, $r = 0.05$, $\sigma = 0.2$, $T_0 = 3$, $T = 10$, $L = 200$, et $\alpha = -0.02$.

On constate alors que la figure 08 est beaucoup plus facile à interpréter que la précédente. En effet, elle met en exergue que si l'optionnaire rate le moment opportun d'exercice de l'option, il doit attendre une année, et plus pour exercer son option. Ce qui n'est pas tout à fait évident pour la figure précédente. La figure 08 souligne également qu'il serait judicieux d'exercer l'option dès la levée de la date d'indisponibilité jusqu'à la 6^{ième} année.

La méthode directe est donc applicable dans ces deux premiers cas, et peut fournir des résultats plus rapidement si on utilise un algorithme efficace pour la simulation de \mathcal{T}_b .

En ce qui concerne C_t^c et C_t^d , on est contraint de procéder différemment dans la mesure où (respectivement) S_{T_λ} et S_T doivent être simulées. Dans ce cas, la simulation de T_b et la connaissance de S_{T_b} est corrélée avec les réalisations futures ou passées de S_{T_λ} et S_T . La simulation de C^c donne le résultat suivant :

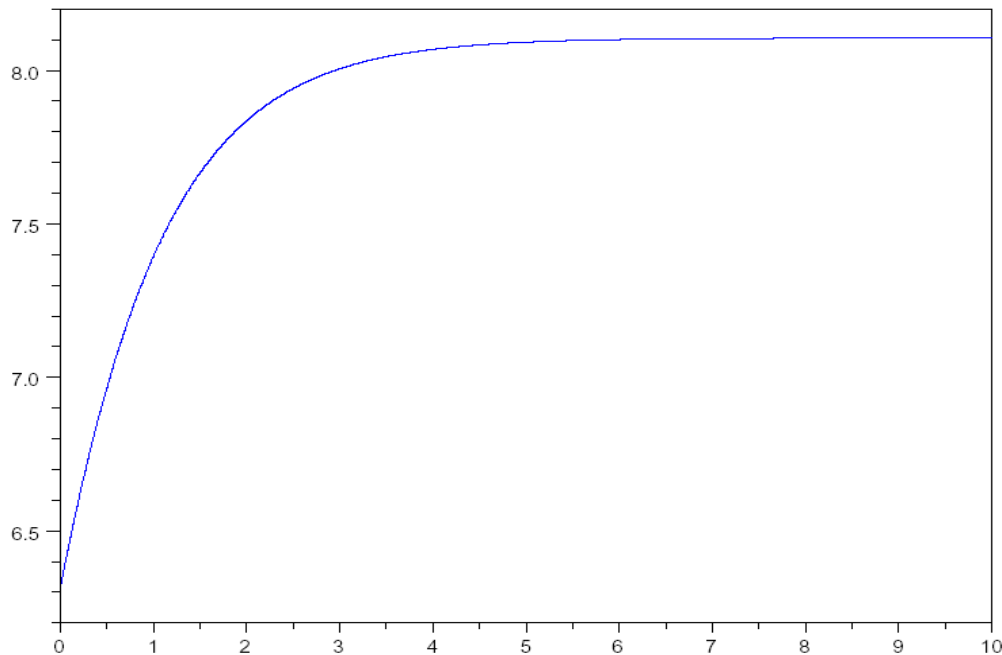


Figure 09 : courbe de C^c pour $S_{T_0} = 100$, $r = 0.05$, $\sigma = 0.2$, $T_0 = 3$, $T = 10$, $L = 200$, et $\alpha = -0.02$.

La figure 09 montre qu'à une certaine date le pay-off de sous option C^c ne cesse de monter. Cependant, plus le temps passe plus le pay-off tend vers une valeur constante. Ceci n'est pas étonnant puisque plus l'option atteint sa maturité, plus sa valeur temps se stabilise, et converge vers sa valeur intrinsèque. Quant à la simulation de C^d , elle est fortement semblable à celle de C^c .

Comme on peut le constater, les méthodes proposées ici sont très facilement exploitables⁽⁷⁾. De plus, si nous souhaitons étendre ou modifier notre modèle, il suffit de rectifier légèrement les codes des simulations alors que, dans le même sens, une approche analytique se complexifierait très rapidement et deviendrait inutilisable.

(7) un langage de programmation et un générateur aléatoire suffisent.

Cependant, l'implémentation de ces méthodes rencontre plusieurs limitations sur le plan de la précision et du temps de calcul.

3-4 Vitesse de convergence

En effet, même si, comme l'on a mentionné, les deux premières sous-options se calculent assez rapidement pour une certaine précision⁽⁸⁾, les temps de calculs s'explodent très vite pour les deux autres. De façon générale, dès qu'on recherche une plus grande précision ou bien lorsque l'évaluation des ESO s'effectue suivant les caractéristiques de chaque employé, sur un échantillon de taille élevé⁽⁹⁾, la durée d'attente pour l'obtention des résultats devient inacceptable. Une question qui semble naturelle est donc la vitesse de convergence des méthodes de Monte-Carlo.

En reprenant les notations introduites pour (3.3-17), le Théorème Central Limite assure que si $\hat{\sigma}^2 = \text{var}[g(X)] : \sum_{i=1}^n \frac{g(X_i) - E[g(X)]}{\hat{\sigma}\sqrt{n}} \rightarrow Y$ en loi. (3.3-18), où Y est une variable aléatoire de loi normale centrée réduite. Par conséquent, l'erreur d'estimation $\varepsilon_n = \left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n g(X_i) - E[g(X)] \right|$ satisfait : $\mathbb{P}\left(\frac{\varepsilon_n \sqrt{n}}{\hat{\sigma}} \leq 1.96\right) \cong \mathbb{P}(|Y| \leq 1.96) = 0.95$.

Ainsi, un intervalle de confiance pour $E[g(X)]$ au niveau 95% est alors :

$$\left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n g(X_i) - \frac{1.96\hat{\sigma}}{\sqrt{n}} , \quad \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n g(X_i) + \frac{1.96\hat{\sigma}}{\sqrt{n}} \right]$$

La vitesse de convergence est donc de l'ordre de $\frac{1}{\sqrt{n}}$. Il faut noter qu'elle soit également proportionnelle à $\hat{\sigma}$ et ce détail a bien souvent une influence considérable sur la qualité de l'approximation. A ce propos, la plupart des méthodes dites d'accélération de la convergence sont basées sur la minimisation de $\hat{\sigma}$ et la rapidité du générateur aléatoire.

Ainsi, l'implémentation a toujours été accompagnée d'une estimation de l'erreur, quantité indispensable pour pouvoir apporter une signification aux résultats trouvés. En effectuant, à l'aide d'une boucle, 1000 itérations, l'histogramme des simulations, de même que les principales statistiques, sont répertoriés à la figure 09.

(8) pour la plupart des applications une précision de 10^{-2} est acceptable.

(9) une centaine personnes par exemple.

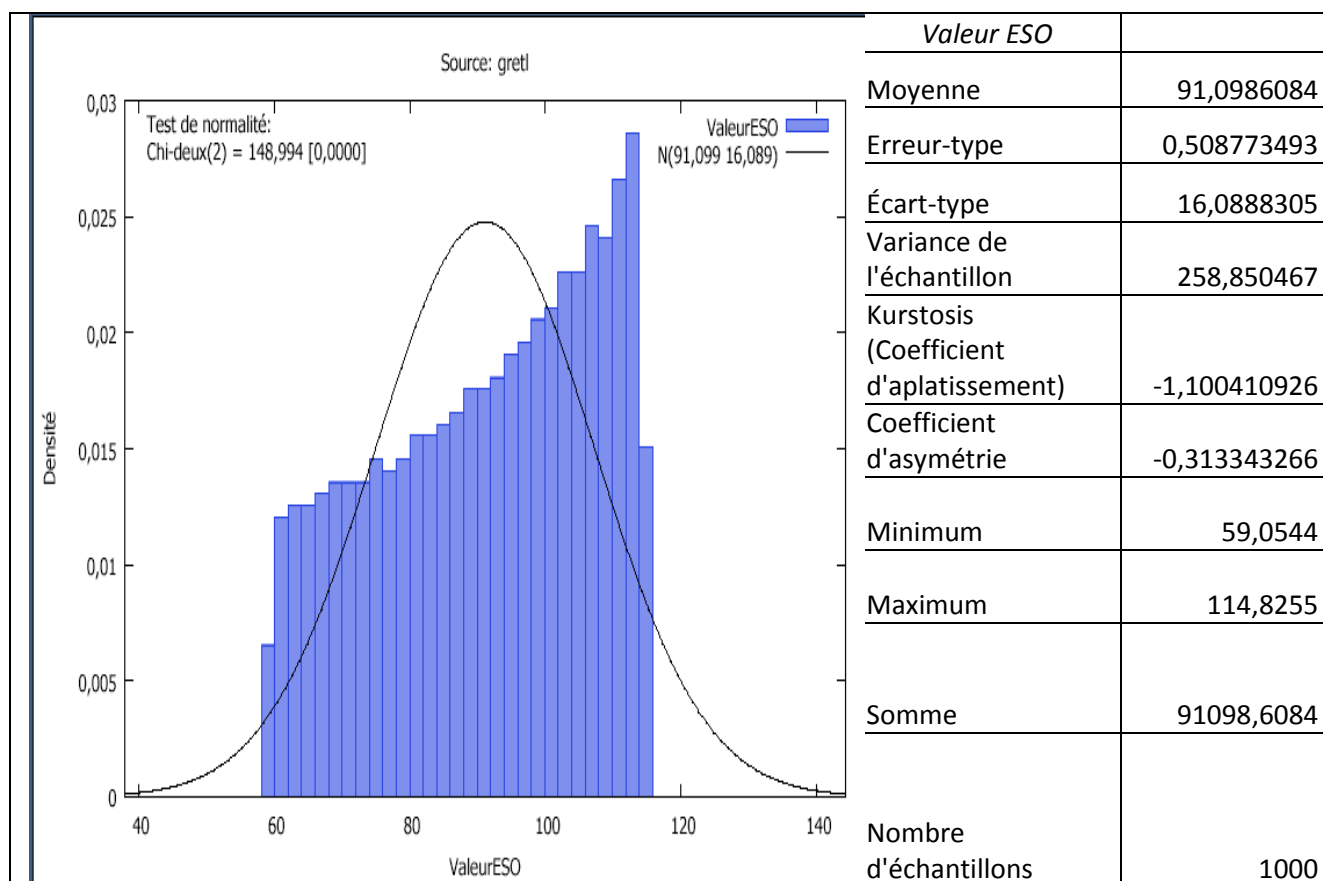


Figure 10 : Histogramme de distribution de la valeur de l'ESO et principales statistiques

Comme on peut le constater à la figure 10, le test d'hypothèse nulle de normalité est rejeté puisque le Chi-deux calculé est très grand par rapport à la valeur théorique. Ce qui est cohérent au fait que les pay-off d'une option n'obéissent pas à une distribution normale. Pour pallier à ce problème, on peut reprendre un grand nombre de fois la même simulation afin que la distribution des résultats doive tendre vers la normale. En outre, le coefficient d'aplatissement de Fisher qui est négatif indique que la distribution est plus aplatie que la courbe de Gauss, c'est-à-dire **platikurtique**. On remarque également que la courbe est étalée à gauche, et plus oblique à droite. Autrement dit, il y a asymétrie négative. Cet aspect est justifié par le coefficient d'asymétrie négatif de la figure 10. On constate également que, à hauteur de **16,0888305**, l'écart-type des simulations est important. L'intervalle pour un niveau de confiance de **95%** de la valeur de l'ESO est de **[90.100913; 92.096303]** qui se révèle assez important. Ce qui implique que le résultat obtenu est moins fiable pour un nombre d'itérations de 1000. Pour le réduire davantage, on peut augmenter le nombre d'itérations mais ces opérations finissent par consommer beaucoup de

temps. En effet, il existe diverses techniques aptes à réduire cet intervalle dans un laps de temps raisonnable. La plus simple utilisée est la technique des variables antithétiques. Pour ce faire, on définit des variables dites antithétiques dont la corrélation est de -1. C'est-à-dire que pour chaque scénario du prix de l'action, on aura les deux équations suivantes :

$$\begin{cases} S_{t+\Delta t} = S_t e^{(r-\frac{1}{2}\sigma^2)\Delta t + \sigma\varepsilon\sqrt{\Delta t}} \\ S_{t+\Delta t} = S_t e^{(r-\frac{1}{2}\sigma^2)\Delta t - \sigma\varepsilon\sqrt{\Delta t}} \end{cases}$$

La même variable aléatoire ε est d'abord introduite avec un signe positif pour calculer S puis avec un signe négatif. Il en résulte une corrélation de -1 entre les deux mouvements Browniens, ce qui accélère, pour un nombre d'itérations donné, la convergence vers la vraie valeur de l'ESO.

Section 4 : RESULTATS ET COMMENTAIRES

Cette partie du présent mémoire s'intéresse à l'estimation des paramètres liés au modèle, et élabore une étude de sensibilité de ces derniers sur les résultats.

4-1 Regroupement des individus par classes de risque

Les bénéficiaires n'adoptent pas tous les mêmes comportements quant à l'exercice de leurs options. Comme le préconise la norme, il est préférable de regrouper les individus par classes de risque, et d'estimer la valeur des options pour chacune d'entre elles. En effet, on prend pour exemple les trois personnages suivants :

Rakotovao a 27 ans, il est cadre informaticien dans une entreprise de service. Il travaille dans cette entreprise depuis un an, et il s'agit de son quatrième emploi. S'il se voyait attribuer des stock-options, il miserait sur la prudence, et exercerait le plus tôt possible ses options.

Barivelo a 40 ans. Chef de projet dans le secteur automobile, il travaille pour la même entreprise depuis 10 ans. Il connaît bien son entreprise et ses activités boursières. A ce propos, il possède plusieurs de ses actions. Il nous a confié qu'il exercerait ses options si le cours de l'action atteignait une fois et demie le prix d'exercice.

Ravelotsara a 55 ans. Il dirige le service commercial d'une société de transport aérien. Proche de la retraite, il compte 20 ans d'ancienneté dans cette entreprise. Le conseil d'administration lui a gracieusement attribué une grande quantité d'options. Il

a une excellente connaissance de l'activité de marché, et de son employeur. De plus, sa position lui permet de capter certaines informations qu'il pourra discrètement exploiter en sa faveur pour l'exercice de ses options.

4-2 Estimation des paramètres pour l'exercice anticipé

Comme on va le voir, l'évolution des ESO pour Rakotovao, Barivelo ou Ravelotsara apporte des résultats bien différents. En effet, le modèle soutient que l'exercice provient de deux phénomènes supposés indépendants :

Le premier concerne l'appréhension du risque par le bénéficiaire : paramètres L et α .

Le second est la rupture de son contrat de travail par démission, par licenciement, ou par décès : paramètre λ . On pourrait également inclure le départ en retraite mais il ne fait pas l'objet, en pratique, d'une perte du droit d'exercice. Il convient donc d'exclure son influence sur l'estimation de λ .

Ces paramètres conditionnent fortement le résultat de l'évaluation, et peuvent être naturellement « rapprochés » des caractéristiques de nos trois personnages. Rakotovao est en plein âge de jeunesse, mais reste quand même opportuniste : la probabilité qu'il décède pendant la période d'exercice est très faible mais son taux de turnover est relativement élevé. Il s'avère de plus avoir une aversion pour le risque. Barivelo, bien que dans la force de l'âge, possède une probabilité de décès un peu plus élevée que Rakotovao, et son taux de turnover reste faible. Il paraît déterminer quant à ses objectifs de gain. Enfin, Ravelotsara, quant à lui, il est le personnage possédant la probabilité de survie la plus petite, son ancienneté laisse présager un taux de turnover faible, et sa connaissance des marchés financiers lui confère une confiance certaine dans l'avenir du titre de sa société. A ce stade, il convient de se poser plusieurs questions : Quelles sont les caractéristiques suffisamment objectives et pertinentes pour être conservées ? Comment procéder pour intégrer ces dernières dans l'estimation des paramètres ? Par exemple, sur quels critères évaluer le comportement d'un individu face au risque ?

Pour apporter des réponses à ces interrogations, il faut tout d'abord, savoir que les informations personnelles fournies sur les bénéficiaires se limitent en général aux éléments suivants : le nom du bénéficiaire (salarié), sa date de naissance, son

ancienneté, son statut, sa rémunération, le nombre d'enfants, ses différents avantages sociaux, et particulièrement le nombre de stock-options attribué.

Le modèle analytique développé ici présente l'avantage de ne faire intervenir que trois paramètres « subjectifs », L , α et λ qui, à première vue, paraissent difficiles à estimer que ce soit au niveau individuel ou que ce soit au niveau de la firme. Cependant, Carpenter [7] a effectué une étude statistique sur l'exercice des stock-options à partir de 40 sociétés américaines d'où on a extrait dans le tableau ci-dessous les principaux résultats⁽¹⁰⁾.

Tableau 03 : Résultats d'étude statistique sur l'exercice des stock-options

Caractéristiques	Valeur moyenne	Ecart-type
1- Durée d'attente moyenne à l'exercice (années)	5.83	2.25
2- Ratio de performance moyen à l'exercice	2.75	1.42
3- Taux d'annulation annuel moyen	5.6%	5.1%
4- Volatilité moyenne	31%	10%
5- Taux de dividende moyen	3%	2%

Source : Carpenter, 1998.

Ce tableau doit être exploité avec beaucoup de précaution. En effet, il ne donne que des valeurs moyennes qui caractérisent un panel d'entreprises hétérogènes⁽¹¹⁾. De plus, l'analyse se base exclusivement sur des sociétés américaines, et les données exploitées datent d'une petite dizaine d'années. Cependant, peu d'études se sont intéressées au comportement d'exercice des optionnaires, et les chiffres donnés ci-dessus permettent toutefois de fixer un ordre de grandeur quant aux paramètres du modèle liés à l'exercice anticipé. Ainsi, ces résultats servent de référence en ce qui concerne l'exercice anticipé des options pour les paramètres du modèle.

Très subjectif, L et α pourront être choisis en fonction du ratio de performance moyen à l'exercice puis adaptés à la rémunération du salarié : un salarié bien rémunéré ayant généralement moins besoin de liquidité. Barivelo et Ravelotsara auront donc un paramètre L proportionnellement plus élevé que Rakotovao.

(10) $T_0 = 3$ ans et $T = 10$ ans

(11) En plus de cela les écart-types sont assez importants, ce qui déprécie la fiabilité de l'estimateur moyenne.

En ce qui concerne λ , le taux d'annulation annuel moyen, très volatile, pourra être ajusté par rapport au taux de turnover de la catégorie socio professionnelle du salarié, et à sa probabilité de décès. Ainsi, λ sera plus faible pour Ravelotsara que Rakotovao et Barivelo.

4-3 Résultats et commentaires

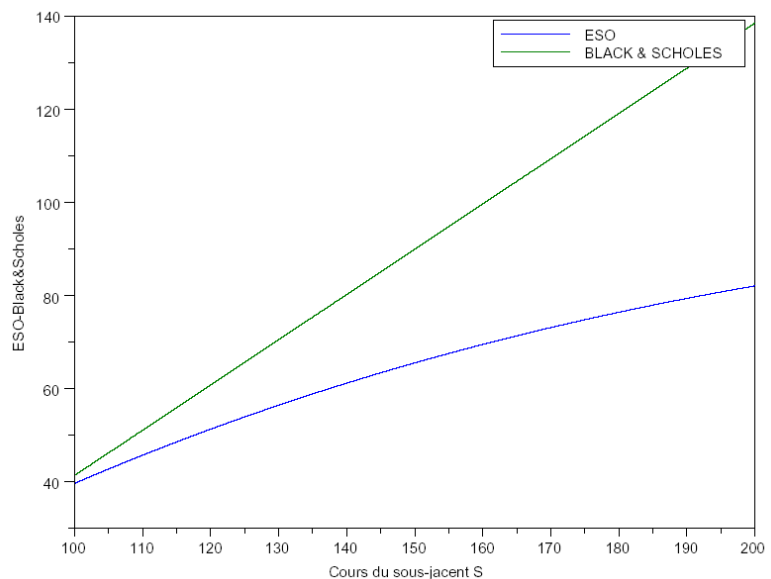
Dans ce paragraphe, on a réalisé une étude de sensibilité des paramètres qui interviennent pour l'évaluation des ESO. Dans chaque cas, une analyse comparative avec le modèle de Black & Scholes a été effectuée.

4-3-1 Les paramètres standards

Comparaison des résultats avec Black & Scholes en fonction de S_{T_0} , lorsque $r = 0.05$, $\sigma = 0.2$, $T_0 = 3$, $T = 15$, $L = 150$, et $\alpha = -0.02$, $K=100$, et $\lambda=0.04$ ⁽¹²⁾

Figure 11 : Comparaison des ESO et Black & Scholes en fonction de S_{T_0}

S_{T_0}	ESO	Black & Scholes
100	39.77438	41.37362
110	45.83736	51.08542
120	51.43623	60.79721
130	56.59572	70.50901
140	61.33945	80.22080
150	65.68992	89.93260
160	69.66855	99.64439
170	73.29578	109.3561
180	76.59109	119.0679
190	79.57300	128.7797
200	82.25919	138.4915



Comme prévu, on remarque que Black & Scholes surestime la valeur de l'option, et lorsque le prix d'exercice reste fixé, l'écart entre les deux modèles n'augmente que très légèrement. Les deux valeurs augmentent avec S_{T_0} , ce qui est cohérent : la plus value potentielle augmente lorsque S_{T_0} augmente.

(12) valeurs recueillies dans [10]

Modélisation Stochastique pour l'Evaluation des Stock-options

Cependant, on peut tenter, malgré la différence significative de ces deux modes d'évaluations, de faire un test d'égalité des moyennes. Ceci pour être sûr qu'il n'y a pas équivalence entre ces deux modèles. En posant comme hypothèse nulle que la valeur moyenne d'ESO est égale à la valeur moyenne de Black & Scholes, le test, au seuil de risque 5%, donne le résultat suivant :

Tableau 04 : Test d'égalité des moyennes des modèles d'évaluation

Test d'égalité des espérances: observations paires	<i>ESO</i>	<i>Black & Scholes</i>
Moyenne	63,8236973	89,9325682
Variance	199,202216	1037,50647
Observations	11	11
Différence hypothétique des moyennes	0	
Degré de liberté	10	
Statistique t	-4,73557885	
P(T<=t) bilatéral	0,00079742	
Valeur critique de t (bilatéral)	2,22813884	

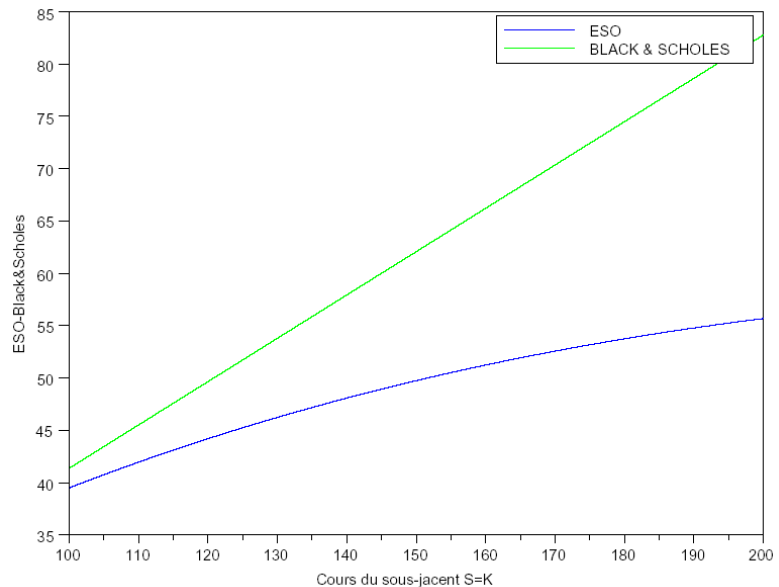
Il ressort de ce tableau qu'on rejette l'hypothèse nulle (égalité des moyennes) car le seuil calculé (valeur colorée en jaune dans le tableau) est largement inférieur au seuil de risque 5%.

Modélisation Stochastique pour l'Evaluation des Stock-options

Même comparaison, mêmes données sauf que nous faisons également évoluer K avec S_{T_0} en prenant $L=250$ ⁽¹³⁾.

Figure 12 : Comparaison des ESO et Black & Scholes en fonction de S_{T_0} et K

S_{T_0}	ESO	Black & Scholes
100	39.55449	41.37362
110	42.89572	45.51098
120	44.25644	49.64835
130	46.29544	53.78571
140	48.14183	57.92307
150	49.80645	62.06439
160	51.29960	66.19780
170	52.63112	70.33516
180	53.81036	74.47252
190	54.84622	78.60988
200	55.74716	82.74725



Ce cas illustre la situation réelle de l'attribution des stock-options « at-the-money ». On constate que l'écart augmente avec S_{T_0} et K . En effet, lorsque le prix d'exercice augmente de la même façon que S_{T_0} , la probabilité d'exercice par franchissement de la barrière augmente (avec S_{T_0}) alors que la plus-value potentielle de l'option diminue (lorsque K augmente). Ainsi, on constate ici à la fois une perte de plus-value, et une perte de time-value.

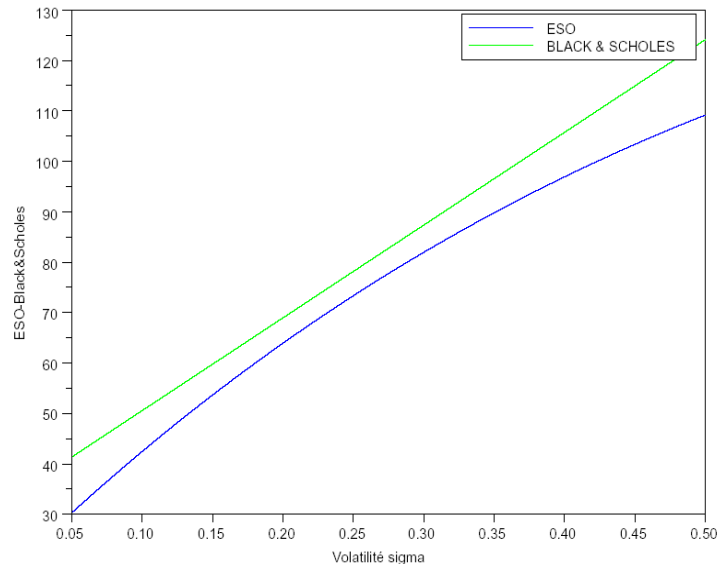
(13) pour des raisons de calculs, il faut prendre $L_t > K$ pour tout K et pour tout t , donc on a choisi $L=250$.

Modélisation Stochastique pour l'Evaluation des Stock-options

Comparaison des résultats avec Black & Scholes en fonction de la volatilité,
lorsque $S_{T_0} = 100$, $r = 0.05$, $T_0 = 3$, $T = 10$, $L = 150$, et $\alpha = 0$, $K=100$, et $\lambda=0.04$

Figure 13 : Comparaison des ESO et Black & Scholes en fonction de σ

Volatilité σ	ESO	Black & Scholes
0.05	30.15965	41.37362
0.095	41.13021	49.64835
0.14	51.31043	57.52307
0.185	60.74170	66.19780
0.23	69.46350	74.47252
0.275	77.51349	82.74725
0.32	84.92754	91.02197
0.365	91.73990	99.29670
0.41	97.98316	107.5714
0.455	103.6884	115.8461
0.5	108.8852	124.1208

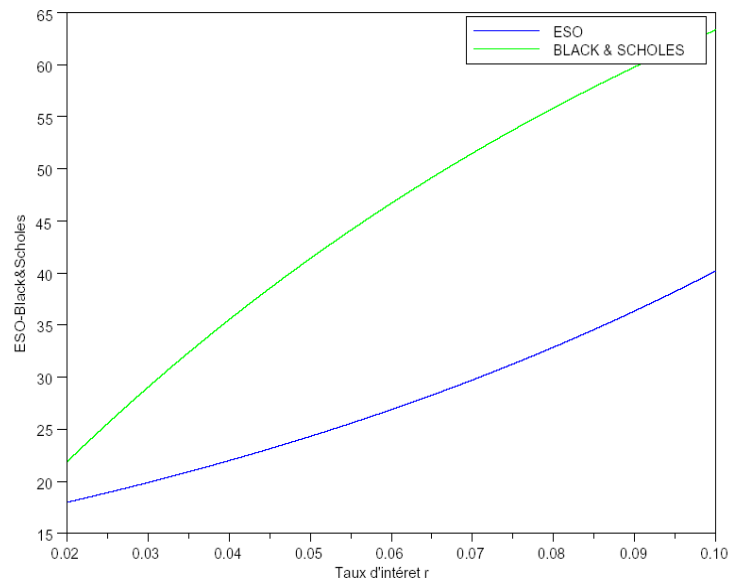


On voit que l'influence de la volatilité sur la valeur des ESO est aussi importante que pour le modèle de Black & Scholes, l'écart entre les deux valorisations restant à peu près constant. Plus généralement, la valeur d'une stock-option pour les deux évaluations augmente sensiblement, et pratiquement linéairement avec la volatilité prévue. Il faudra insister donc sur la précision lors de l'estimation de σ . C'est-à-dire que ce paramètre doit donc faire l'objet d'un examen particulièrement soigné dans les évaluations de stock-options. Ainsi, le fait que la volatilité pour le modèle de Black & Scholes soit constante n'est pas réaliste, puisque les marchés bougent ; pas toujours dans les mêmes proportions, ni avec les mêmes rythmes.

Comparaison des résultats avec Black & Scholes en fonction du taux d'intérêt r , $S_{T_0} = 100$, $T_0 = 3$, $T = 10$, $L = 150$, et $\alpha = -0.02$, $K=100$, $\sigma = 0.2$ et $\lambda=0.04$

Figure 14 : Comparaison des ESO et Black & Scholes en fonction du taux d'intérêt r

Taux d'intérêt r	ESO	Black & Scholes
0.02	18.04265	21.87098
0.028	19.55318	27.65624
0.036	21.19017	32.73971
0.044	22.96421	37.92658
0.052	24.88678	42.47743
0.06	26.97029	46.67840
0.068	29.22824	50.55637
0.076	31.67521	54.13620
0.084	34.32705	57.44079
0.092	37.20089	60.49132
1	40.31532	63.30731



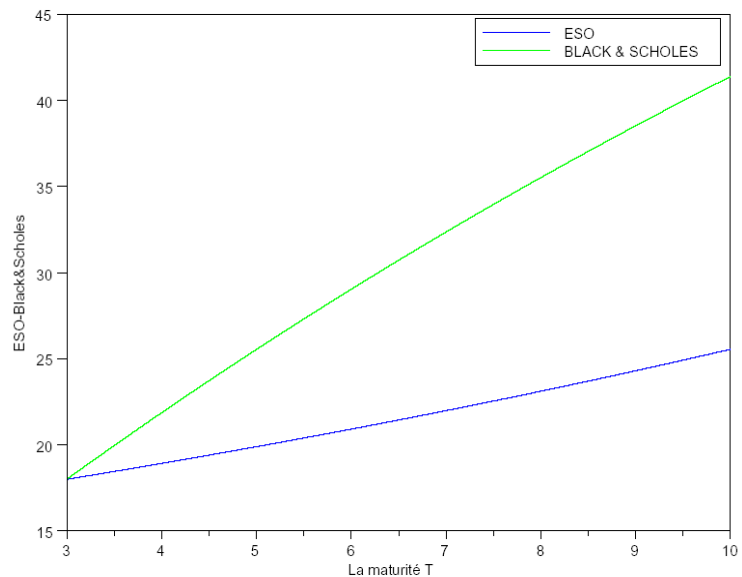
On remarque que, par rapport au modèle de Black & Scholes, l'évolution du taux d'intérêt a une influence assez faible sur la valeur des ESO. En d'autres termes, la valeur des ESO augmente modérément, et pratiquement linéairement, avec le taux d'intérêt sans risque. En outre, plus le taux d'intérêt augmente, plus l'écart s'élargit. Intuitivement, un exercice anticipé, et donc une maturité plus faible attendue diminue l'influence du taux d'intérêt.

Modélisation Stochastique pour l'Evaluation des Stock-options

Comparaison des résultats avec Black & Scholes en fonction de la maturité, lorsque $S_{T_0} = 100$, $r = 0.05$, $T_0 = 3$, $T = 10$, $L = 150$, et $\alpha = -0.02$, $K=100$, $\sigma = 0.2$ et $\lambda=0.04$

Figure 15 : Comparaison des ESO et Black & Scholes en fonction de la maturité T

Maturité T	ESO	Black & Scholes
3	18.15683	18.15893
3.7	18.80351	20.73376
4.4	19.47334	23.36097
5.1	20.13172	25.89781
5.8	20.88532	28.34739
6.5	21.62925	30.71273
7.2	22.39968	32.99671
7.9	23.19755	35.18046
8.6	24.02384	37.33170
9.3	24.87956	39.38802
10	25.76576	41.37362



L'influence de la maturité sur le prix des ESO reste faible en comparaison avec celui de Black & Scholes. On constate, de plus que, lorsque la maturité se rapproche de la date de début d'exercice, le prix obtenu par les deux évaluations se diffère progressivement. En effet, lorsque $T = T_0$, l'exercice anticipé est alors impossible, les ESO se comportent comme des options classiques.

4-3-2 Les paramètres relatifs aux ESO et à l'exercice anticipé

Evolution de la date de début d'exercice possible « T_0 »

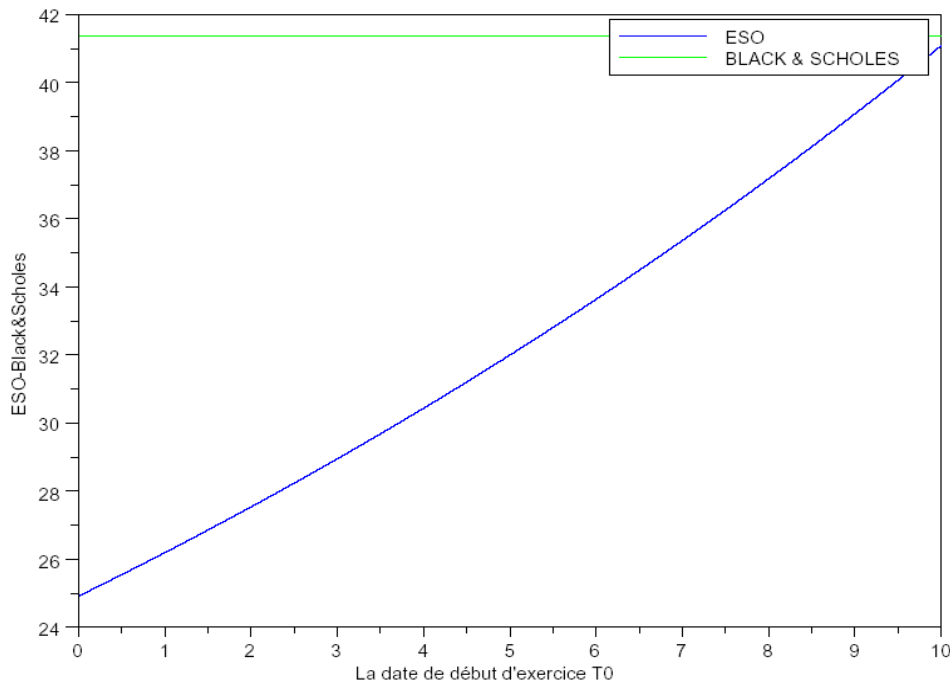


Figure 16 : Comparaison des ESO et Black & Scholes en fonction T_0

Avec $S_{T_0} = 100$, $r = 0.05$, $T = 10$, $L = 150$, et $\alpha = -0.02$, $K=100$, $\sigma = 0.2$ et $\lambda=0.04$

L'évaluation des ESO ne prend pas en compte les départs précédant la date de début d'exercice. L'augmentation de cette dernière a donc un effet positif car elle préserve la valeur temps de l'option. De plus, lorsque la date d'exercice se rapproche de la maturité, le prix obtenu par les deux évaluations se rapproche. Autrement dit, pour les mêmes raisons que précédemment, lorsque $T_0 = T$, le prix est le même que pour le modèle de Black & Scholes.

Evolution de la hauteur de la barrière « L »

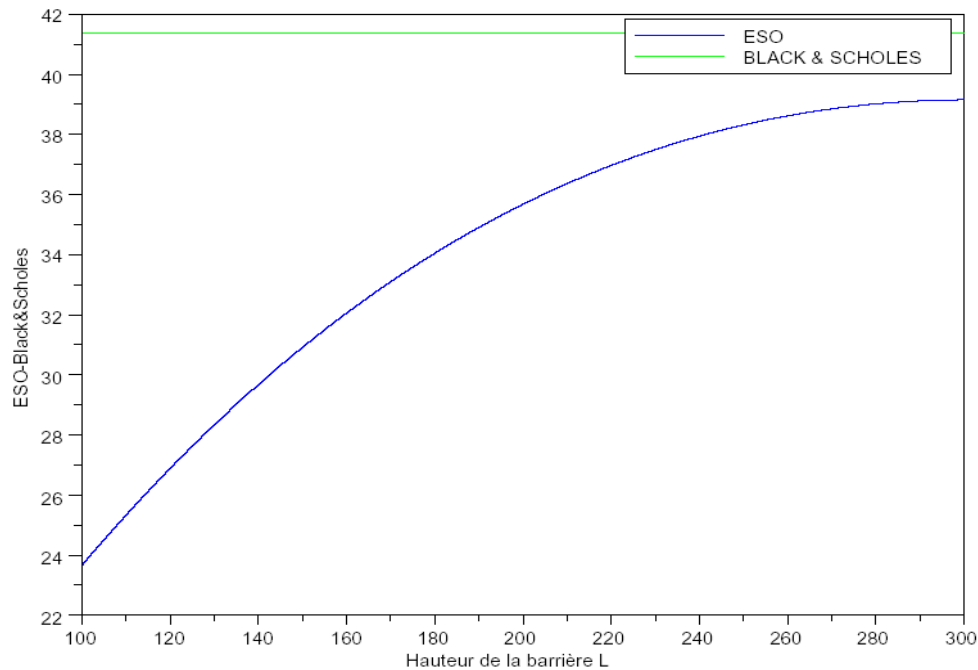


Figure 17 : Comparaison des ESO et Black & Scholes en fonction L

Avec $S_{T_0} = 100$, $T_0 = 3$, $r = 0.05$, $T = 10$, et $\alpha = 0$, $K=100$, $\sigma = 0.2$ et $\lambda=0.04$

Plus la barrière augmente, plus il est improbable que le cours de l'action la franchisse. On constate que le prix des ESO se stabilise pour des grandes valeurs de L , laissant de plus en plus de place aux options qui atteignent la maturité.

Evolution de l'inclinaison de la barrière « α »

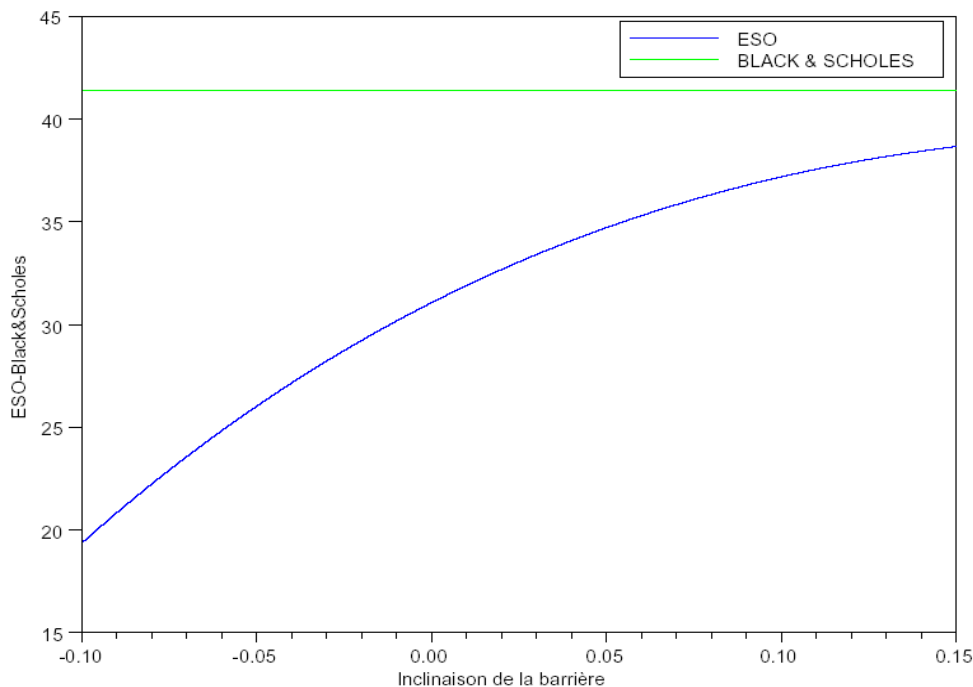


Figure 18 : Comparaison des ESO et Black & Scholes en fonction α

Avec $S_{T_0} = 100$, $T_0 = 3$, $r = 0.05$, $T = 10$, $L = 150$, $K=100$, $\sigma = 0.2$ et $\lambda=0.04$

Ici, on obtient le même effet que pour la hauteur de la barrière, les deux paramètres étant totalement liés. Cependant, il semblerait que l'influence de α soit plus faible sur la valorisation. Lorsque α est négatif, on a vu que les bénéficiaires se pressaient d'exercer leurs options à l'approche de la maturité en perdant ainsi la valeur temps associée.

Section 5 : LIMITES DU MODELE ET AMELIORATIONS POSSIBLES

La réalisation d'un modèle, le plus sophistiqué qu'il soit, n'est jamais exempt de limitations, et de points à améliorer. Le tout est de pouvoir apporter des arguments pour une amélioration potentielle. Il s'agit soit de pistes non encore exploitées, soit, faute de temps, d'éléments permettant l'intégration de nouveaux facteurs.

Ainsi, plusieurs éléments n'ont pas été pris en considération par le modèle. En voici les principaux :

Les conditions de marché imposées par le conseil d'administration pour l'attribution des options aux employés ont été écartées de l'évaluation analytique. Ce qui n'est pas trop pénalisant en pratique car, comme l'on a vu, elles ne sont

employées que dans un nombre restreint de pays. Pour palier à ce manque, il faudrait intégrer un nouveau temps d'arrêt \mathcal{T}_M correspondant au premier dépassement du Brownien au-delà d'une barrière horizontale M : $\mathcal{T}_M = \inf\{t \geq 0, S_t \geq M\}$. Alors, dans ce cas, les sous-options caractéristiques du comportement d'exercice à des dates particulières, auraient une valeur non nulle seulement si \mathcal{T}_M survient avant ces dates. Concrètement, le calcul analytique s'établirait de la même façon que pour le modèle précédent en rajoutant l'indicatrice :

$\mathbb{1}_{\{\mathcal{T}_0 \geq \mathcal{T}_M\}}$ pour le calcul de C_t^a ,

$\mathbb{1}_{\{\mathcal{T}_b \geq \mathcal{T}_M\}}$ pour le calcul de C_t^b ,

$\mathbb{1}_{\{\mathcal{T}_\lambda \geq \mathcal{T}_M\}}$ pour le calcul de C_t^c et

$\mathbb{1}_{\{\mathcal{T} \geq \mathcal{T}_M\}}$ pour le calcul de C_t^d .

De la même manière que pour \mathcal{T}_b , on connaît la loi de \mathcal{T}_M . Cependant, en gardant à l'esprit que ces deux dernières variables aléatoires sont étroitement corrélées, il faut donc établir la loi conditionnelle de \mathcal{T}_b sachant \mathcal{T}_M . Mais, même en disposant de cette dernière, les calculs deviendraient bien trop fastidieux. Pour introduire \mathcal{T}_M , on pourrait cependant alléger le modèle en supprimant le temps d'arrêt \mathcal{T}_b et en développant un peu comme [8] la modélisation par processus à intensité.

Si on connaît le taux de dividende annuel δ , son intégration dans le modèle est immédiate puisqu'il suffit, comme le modèle de Black & Scholes, de remplacer le taux d'intérêt r par $r - \delta$.

On a implicitement considéré que l'effet dilutif dû aux émissions d'actions à un prix inférieur à celui du marché a été intégré par ce dernier à l'annonce du plan de stock-option. Cependant, il se pourrait que cela ne fût pas toujours le cas, et que la dilution intervienne plus tard ou de façon progressive. Dans ce cas, c'est tout le modèle d'évolution de l'action qui est à revoir. Une solution serait de l'inclure dans le taux de dividende.

Le modèle ne prend pas en compte l'évolution de la volatilité. Cependant, l'introduction d'un processus stochastique pour la volatilité compliquerait grandement le calcul analytique. On pourrait néanmoins avoir recours aux simulations de Monte-Carlo.

On pourrait également intégrer l'évolution possible de la barrière psychologique en fonction de l'évolution récente du cours de l'action. Là encore, il semblerait que seules des simulations de Monte-Carlo pourraient porter secours.

Le modèle dans sa forme initiale intègre le caractère stochastique du taux d'intérêt, et de l'intensité d'exercice par départ anticipé du salarié. Cependant, pour exploiter cette voie, il est nécessaire d'introduire de nouveaux paramètres ne serait-ce que pour décrire les lois suivies des variables aléatoires régissant les processus, ce qui complique davantage le calcul analytique, et l'estimation des paramètres. Néanmoins, comme l'on a vu, les stock-options ont une durée de vie parfois supérieure à 10 ans. Il serait alors légitime de ne pas figer ces deux grandeurs.

Quant à l'estimation, et au choix des paramètres, il est clair que certaines solutions n'ont pas été envisagées. En effet, un calcul similaire à celui des sous-options permet de trouver la durée de vie moyenne d'une option, la moyenne de cours de l'action à l'exercice, et les probabilités inhérentes aux réalisations des différents scénarios d'exercice. L'estimation empirique de ces valeurs paraît aisément réalisable, il serait alors possible d'exploiter ces dernières pour calibrer les paramètres L , α et λ . Dans le cas où l'utilisateur ne souhaiterait employer qu'une partie de ces paramètres pour sa valorisation, leur influence peut être annihilée en choisissant, par exemple, une grande valeur pour L (ex : 100000), $\alpha=0$, et $\lambda=0$. On peut remarquer également que, bien souvent, très peu d'options atteignent la maturité. On pourra simplifier donc les calculs en faisant tendre cette dernière vers l'infini.

CONCLUSION GENERALE

Ce document traite la comparaison de modèles d'évaluation de stock-options, à savoir le modèle de Black & Scholes, et le modèle analytique. Cette comparaison se situe au niveau des performances de l'évaluation à la juste valeur des plans de stock-options.

Le modèle s'est efforcé d'intégrer les principales caractéristiques des stock-options comme la période d'indisponibilité, et le phénomène d'exercice anticipé. On a ainsi développé, et implémenté une formule qui donne, dans ce contexte, la juste valeur des stock-options. De plus, on a eu recours aux simulations de Monte-Carlo pour, dans un premier temps, vérifier les calculs analytiques, puis pour élargir les hypothèses du modèle. C'est ainsi que le recours à son algorithme était indispensable, puisqu'il est fiable, et qu'il permet d'atteindre n'importe quel niveau de précision.

Le modèle de Black & Scholes possède un énorme avantage grâce à sa simplicité de mise en œuvre. Un tableur, et quelques paramètres suffisent pour calculer le prix d'une stock-option. L'équivalence exacte entre la volatilité qui est le paramètre principale, et le prix permet de rapidement vérifier le résultat, et les hypothèses de l'évaluation. Ainsi, un prix d'option correspond sans équivoque à la volatilité dite implicite qui permet d'obtenir la valeur théorique identique. Cet aspect tend à assurer les auditeurs parce qu'il réduit un risque d'erreur ou de manipulation dans le calcul du prix par la société, à condition, bien sûr, de s'entendre sur le niveau de la volatilité implicite qui doit être utilisé. Mais le modèle n'évalue pas correctement les stock-options, et l'écart dépend de la position de la valeur de l'action par rapport au prix d'exercice. On a vu que le modèle de Black & Scholes surestime fortement la valeur des options attribuées aux employés. Hormis la volatilité, les paramètres intervenant dans cette approche ont une influence réduite sur la valorisation à cause de l'exercice anticipé, et de la perte de valeur temps de l'option.

Si le modèle de Black & Scholes est populaire grâce à sa simplicité, et à son niveau acceptable de précision, le modèle analytique est plus réaliste puisqu'il considère que la volatilité est stochastique. Celle-ci implique la non normalité des rendements. Alors que dans le modèle de Black & Scholes les rendements suivent

Modélisation Stochastique pour l'Evaluation des Stock-options

une loi de distribution normale, et donc de distribution log-normale de la valeur future de l'action. C'est pourquoi, dans la pratique, les opérateurs n'utilisent qu'occasionnellement cette formule de Black & Scholes car elle ne répond pas aux spécificités de la plupart des options sur actions (caractéristiques d'exercice anticipé,...).

La rapidité de calcul de la formule laisse libre recours à une évaluation au cas par cas : chaque bénéficiaire possède des caractéristiques qui lui sont propres en matière d'exercice anticipé.

Les contributions personnelles de l'auteur se situent sur les points suivants :

- a) Développer et détailler les démonstrations qui mènent aux lemmes et aux équations qui constituent les fondements pour les modèles paramétriques d'évaluation des produits dérivés et plus particulièrement des options,
- b) Détailler l'enchainement des calculs qui mènent à la solution analytique de Black & Scholes, aussi bien par résolution de l'équation de Black & Scholes, que par un raisonnement risque-neutre,
- c) Faire des simulations et des comparaisons afin de tester la validité du modèle.

GLOSSAIRE

A

Action (share stock) : est un titre de propriété délivré par une société de capitaux (i.e. Une société anonyme ou Société en commandite par actions). Elle confère à son détenteur la propriété d'une partie du capital, avec les droits qui y sont associés : Intervenir dans la gestion de l'entreprise et en retirer un revenu appelé dividende.

Arbitrage : est une opération financière assurant un gain positif ou nul de manière certaine.

Absence d'opportunité d'arbitrage :

On dit qu'il existe une opportunité d'arbitrage (arbitrage opportunity, free lunch) sur le marché financier lorsqu'il existe une stratégie sans risque d'achat et de vente de titres qui peut rapporter des gains strictement positifs. Ce qui n'existe en pratique que dans un temps très court.

Arbitragistes : acteurs sur les marchés dont le rôle est de détecter ce type d'opportunités et d'en profiter

Asset : actif financier, valeur.

At the money : à la monnaie, à parité : se dit d'une option dont le prix d'exercice est égal au prix à terme de l'actif sous-jacent ; ce terme s'oppose à **in the money** et à **out of the money**.

B

Bourse : C'est un marché financier avec un règlement spécifique choisi de manière à améliorer les conditions des transactions.

C

Call (option): option d'achat.

Cash flow : flux de trésorerie, ou elle est souvent utilisée dans le sens de "capacité d'autofinancement".

Contingent claim (actif contingent) : ou actif conditionnel, il s'agit d'un contrat entre agents ou instituants spécifiant des conditions pour qu'une certaine transaction financière soit réalisée.

Cours d'acquisition : Cours de l'action à la date d'acquisition.

Modélisation Stochastique pour l'Evaluation des Stock-options

Cours d'attribution : C'est la moyenne des cours de clôture de l'action des 20 jours qui précèdent celui de l'attribution pour une société cotée.

Cours de cession : Cours de l'action à la date de cession.

Couverture (hedging) : protection contre le risque généré par une position.

D

Date d'attribution : Date du jour où le droit est accordé. Elle figure dans le règlement du plan de stock-options et dans la lettre de notification individuelle reçue par le salarié.

Date d'acquisition : C'est la date à laquelle le salarié lève les stock-options et transforme celles-ci en actions. Il verse à ce moment-là le prix d'acquisition.

Date de cession : Date à laquelle le salarié vend ses actions provenant des stock-options.

Default risk : risque de défaut.

Délai d'exercice : Délai prévu par le plan durant lequel l'exercice est possible.

Discounted price : prix actualisé.

Dividende : c'est le revenu tiré d'un placement en titres de capital (action, certificats d'investissement,...).

Le dividende est généralement versé chaque année et varie en fonction des bénéfices réalisés par l'entreprise.

E

Equity : action, capital, fonds propres.

Exchange : taux de change.

F

Fair price : juste prix.

Fair value (juste valeur) : Le coût des options est mesuré à la date d'attribution en fonction de la valeur de l'octroi, et est actualisé sur la période de service soit, généralement, la période d'acquisition des droits.

Forward price : prix à terme.

Futures (contrat à terme) : le vendeur du contrat s'engage à acheter ou à vendre à l'échéance du contrat une quantité minimum (ou un multiple de ce minimum) à un cours négocié sur le marché organisé.

I

In the money : Une option est dite dans la monnaie (in the money) lorsque son exercice procure un gain à son détenteur. Elle est dite hors de la monnaie (out of the

Modélisation Stochastique pour l'Evaluation des Stock-options

money) dans le cas contraire. Enfin, si l'acheteur est indifférent, l'option est à la monnaie (at the money).

M

Marché financier : C'est un lieu (parfois virtuel) où l'on achète et vend des titres financiers (ou actifs financiers).

Mark to market : évaluer au prix du marché.

Maturity (maturité) : date d'échéance, date d'expiration (d'une option).

Montant : c'est la quantité d'actifs sous jacent à acheter ou à vendre.

O

Obligation (bond) : un titre de dette remboursable, que l'émetteur du titre doit rembourser au détenteur du titre à une certaine échéance.

Option : C'est un titre appelé option d'achat (call) ou option de vente (put).

Option abandonnée : Si l'option n'a pas été exercée à la date d'échéance.

Option américaine : Contrat qui donne à son détenteur le droit, non l'obligation, d'acheter ou de vendre une certaine quantité d'un actif financier à un prix, et jusqu'à une date fixée à l'avance.

Option asiatique : La valeur à l'échéance d'une option asiatique découle du prix moyen du sous-jacent sur la durée de l'option. Elle coûte moins cher que l'option vanille car la valeur moyenne d'un sous-jacent est moins volatile que sa valeur à un instant donné.

Option à barrière ou parisienne :

L'option à barrière activante (Knock-in option) à une valeur à l'échéance dépendant du fait que les sous-jacents atteignent ou non un certain niveau de cours dit barrière, pendant la durée de vie de l'option. L'option n'est active que si elle atteint la barrière, et, dans ce cas, à l'échéance sa valeur est la même qu'une option standard. En revanche elle coûte moins cher qu'une option vanille puisqu'elle est plus risquée.

L'option à barrière désactivante (knock-out option) fonctionne de la même manière que l'option à barrière activante sauf que l'option à barrière est désactivée lorsque l'actif sous-jacent atteint un certain niveau.

Option européenne : Contrat qui donne à son détenteur (celui qui achète le contrat) le droit, et non l'obligation, d'acheter ou de vendre une certaine quantité d'un actif financier (sous-jacent) à un prix fixé ou prix d'exercice (strike price) à une date fixée à l'avance (maturité).

Modélisation Stochastique pour l'Evaluation des Stock-options

Option simulable (ou répliquable) : une option est dite simulable si sa valeur à l'échéance est égale à la valeur finale d'une stratégie admissible.

P

Pay-off : Le résultat d'une option à son échéance (appelé couramment pay-off) ne dépend que du prix du sous-jacent, c'est la valeur terminale d'une option = gain.

Période d'indisponibilité : Période à laquelle les bénéficiaires ne peuvent pas exercer leurs options.

Plan de stock-options : C'est une politique incitative qui autorise toutes les sociétés par actions à offrir à certains salariés ou à l'ensemble du personnel des options de souscription ou d'achat d'actions.

Portefeuille (portefolio) : ensemble des titres détenus par une personne.

Prime (premiun) : C'est le droit d'acheter ou de vendre ou se négocie, sur un marché d'options spécialisé (géré par une bourse, ou au gré à gré), contre un certain prix, c'est le prix d'option elle même.

Prix d'acquisition (ou d'achat ou de souscription) : C'est le prix d'exercice des stock-options, il est fixé à l'attribution des options.

Prix d'exercice (Strike price) : le prix (fixé d'avance) auquel se fait la transaction en cas d'exercice de l'option.

Produits dérivés (dérivative Product) : un titre dont la valeur dépend d'un autre titre, ce sont : contrats à terme, futures et options.

Put (option) : option de vente.

R

Raisonnement risque neutre : C'est un raisonnement où les valeurs espérées des rendements de l'action et de l'option sont égales au taux d'intérêt sans risque.

Risk assesment : évaluation du risque.

Risk-neutral probability (probabilité risque -neutre) : est la probabilité sous laquelle le rendement instantané moyen de l'actif est égal à celui de l'actif sans risque. L'existence d'une telle probabilité est liée à l'une des hypothèses d'efficience du marché "l'absence d'opportunité d'arbitrage".

S

Scénario (scenario) : c'est une séquence d'actions qui illustrent un comportement.

Settlement price: forward price.

Share holder (actionnaire): détenteur des actions.

Modélisation Stochastique pour l'Evaluation des Stock-options

Short position selling (vendre à découvert) : vente par un agent d'un actif qu'il ne possède pas encore, l'agent espère que le prix de l'actif va baisser, ce qu'il permettra de l'acheter plus tard à un prix inférieur au prix de vente fixé.

Short rate : taux à court terme.

Simulation de Monte-Carlo : C'est une méthode visant à calculer une valeur numérique, et utilisant des procédés aléatoires, c'est-à-dire des techniques probabilistes.

Stock-option : c'est un ensemble de titres qui donnent le droit d'acheter des actions à un prix spécifié, le prix d'exercice, pendant une durée déterminée.

T

Tracker : c'est un fonds indiciaire négociable en bourse concevant pour répliquer la performance d'un panier d'actions.

U

Underlying asset (actif sous-jacent) : une quantité donnée d'un actif financier (action, obligation, indice boursier, devise, matière première, autre produit dérivé, etc.).

Les sous-jacents : actions, taux de change, obligations et taux d'intérêt.

V

Valeur temps (time value) : La valeur temps d'une option est la survalueur que le marché lui attribue en sus de sa valeur intrinsèque.

Valeur intrinsèque : La différence entre le prix d'exercice d'une option et la valeur de marché de l'actif sous-jacent. Les options qui sont dans la monnaie ou en dehors la monnaie n'ont pas de valeur intrinsèque.

Plain vanilla : se dit d'un produit ordinaire (simple et standard).

Vanilla option : option ordinaire (européenne ou américaine).

Volatilité historique : c'est l'amplitude de variation d'un titre, d'un fonds, d'un marché ou d'un indice sur une période donnée.

Volatilité implicite : Un chiffre dérivé du prix du marché d'une option. On peut analyser la volatilité implicite comme une mesure du risque d'un instrument ou d'un portefeuille au jour d'aujourd'hui, et non pas à un moment donné du passé (ce qui serait la volatilité historique).

W

Warrant : bon de souscription d'actions ; les warrants sont souvent émis par les compagnies sur leurs propres actions.

ANNEXE

Annexe A : Calcul des sous-options

Dans cette Annexe, l'expression des "sous-options" est reprise et le calcul analytique est achevé. Les démonstrations s'appuient essentiellement sur les propriétés de la gaussienne (dénnotée par $n(x)$) et du mouvement brownien pour la loi du premier instant de passage du processus au-delà d'une barrière. De plus, on a placé en Annexe B, les éléments mathématiques structurellement indépendants mais utiles au calcul des C^x .

Les démonstrations évoquées sont parfois assez fastidieuses. C'est pourquoi, un lecteur pressé pourra sauter certaines d'entre elles lors d'une première lecture. En outre, les formules développées dans cette Annexe ont été validées par simulation de Monte Carlo.

A.1 Calcul du prix de l'option dans le scénario A

$$\begin{aligned} C^a &= E \left[e^{-rT_0} (S_{T_0} - K)^+ \mathbb{1}_{\{S_{T_0} \geq L\}} \right] \\ &= e^{-rT_0} \left(E \left[S_{T_0} \mathbb{1}_{\{S_{T_0} \geq L\}} \right] - K \mathbb{P}(S_{T_0} \geq L) \right) \end{aligned}$$

Car on a $S_{T_0} \geq K$ sur l'ensemble $\{S_{T_0} \geq L\}$ puisque $L \geq K$.

Si on note $S_{T_0} = S$ et $r_d = r - d$ avec d le taux de dividende continu.

$$x_L = \frac{\ln \frac{L}{S}}{\sigma \sqrt{T_0}} - \left(r_d - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) \frac{\sqrt{T_0}}{\sigma}$$

$$x'_L = \frac{\ln \frac{L}{S}}{\sigma \sqrt{T_0}} - \left(r_d + \frac{1}{2} \sigma^2 \right) \frac{\sqrt{T_0}}{\sigma}$$

(A-1)

On a : $\mathbb{P}(S_{T_0} \geq L) = \int_{x_L}^{+\infty} n(t) dt = 1 - N(x_L) = N(-x_L)$ avec n la densité de la loi normale centrée réduite et N sa fonction de répartition. De plus :

$$\begin{aligned} E \left[S_{T_0} \mathbb{1}_{\{S_{T_0} \geq L\}} \right] &= S \int_{x_L}^{+\infty} \exp \left(\left(r_d - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) T_0 + \sigma t \sqrt{T_0} \right) n(t) dt \\ &= S e^{r_d T_0} \int_{x_L}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(t - \sigma \sqrt{T_0})^2} dt \\ &= S e^{r_d T_0} N(-x'_L) \end{aligned}$$

On a donc :

$$C^a = S e^{-dT_0} N(-x'_L) - K e^{-rT_0} N(-x_L) \quad (\text{A-2})$$

A-2 Calcul du prix de l'option dans le scénario B

On procède d'abord par conditionnement sur \mathcal{G}_{T_0} puis par calcul d'espérance s'appuyant sur la loi de \mathcal{T}_b :

$$\begin{aligned} C_t^b &= e^{\lambda T_0} E \left[e^{-(r+\lambda) \mathcal{T}_b} (L e^{\alpha(\mathcal{T}_b - T_0)} - K) \mathbb{1}_{\{\mathcal{T}_b < T\}} \mathbb{1}_{\{S_{T_0} < L\}} \right] \\ &= e^{\lambda T_0} E \left[\mathbb{1}_{\{S_{T_0} < L\}} (L e^{-\alpha T_0} E[e^{-(r-\alpha+\lambda) \mathcal{T}_b} \mathbb{1}_{\{\mathcal{T}_b < T\}} / \mathcal{G}_{T_0}] - K E[e^{-(r+\lambda) \mathcal{T}_b} \mathbb{1}_{\{\mathcal{T}_b < T\}} / \mathcal{G}_{T_0}]) \right] \end{aligned}$$

Pour cela, il faut calculer : $E[e^{-x \mathcal{T}_b} \mathbb{1}_{\{\mathcal{T}_b < T\}} / \mathcal{G}_{T_0}]$ (A-3)

Du paragraphe 3-5, p196 du livre de Karatzas et Shreve [16], on tire la loi de \mathcal{T}_b conditionnellement à l'information recueillie jusqu'en T_0 :

$$f_{\mathcal{T}_b}(t) = \frac{-\bar{L}}{\sigma \sqrt{2\pi(t-T_0)^3}} \exp\left(-\frac{(\bar{L} + y_\alpha(t-T_0))^2}{2\sigma^2(t-T_0)}\right) \mathbb{1}_{\{t \geq T_0\}} \quad (\text{A-4})$$

Avec

$$\begin{aligned} y_\alpha &= r_d - \alpha - \frac{\sigma^2}{2} \\ \bar{L} &= \ln\left(\frac{S_{T_0}}{L}\right) \end{aligned} \quad (\text{A-5})$$

Si on note $y_x = \sqrt{y_\alpha^2 + 2\sigma^2 x}$ (A-6)

De (A-4), (A-5) et (A-6) un calcul assez simple permet de transformer (A-3) en :

$$\begin{aligned} \int_{T_0}^T e^{-xt} f_{\mathcal{T}_b}(t) dt &= e^{-xT_0} \int_0^T e^{-xt} f_{\mathcal{T}_b}(t + T_0) dt \\ &= e^{-xT_0} e^{\frac{\bar{L} y_x - y_\alpha}{\sigma^2}} \underbrace{\int_0^{T-T_0} \frac{-\bar{L}}{\sigma \sqrt{2\pi t^3}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2 t} (\bar{L} + y_x t)^2} dt}_{I_1} \end{aligned}$$

I_1 peut se réécrire : $I_1 = \int_0^{T-T_0} \frac{-\bar{L}}{\sigma t^{3/2}} n\left(\frac{1}{\sigma} \left(\sqrt{t} y_x + \frac{\bar{L}}{\sqrt{t}}\right)\right) dt$

Modélisation Stochastique pour l'Evaluation des Stock-options

Il faut alors exploiter les propriétés de la gaussienne pour calculer cette dernière intégrale. En effet, on a :

$$e^{-\frac{\bar{L}^2 y_x}{\sigma^2}} n\left(\frac{1}{\sigma}\left(\sqrt{t}y_x - \frac{\bar{L}}{\sqrt{t}}\right)\right) = n\left(\frac{1}{\sigma}\left(\sqrt{t}y_x + \frac{\bar{L}}{\sqrt{t}}\right)\right) \quad (\text{A-7})$$

Et donc:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[N\left(\frac{1}{\sigma}\left(\sqrt{t}y_x + \frac{\bar{L}}{\sqrt{t}}\right)\right) + e^{-\frac{\bar{L}^2 y_x}{\sigma^2}} N\left(\frac{1}{\sigma}\left(-\sqrt{t}y_x + \frac{\bar{L}}{\sqrt{t}}\right)\right) \right] = \frac{-\bar{L}}{\sigma t^{3/2}} n\left(\frac{1}{\sigma}\left(\sqrt{t}y_x + \frac{\bar{L}}{\sqrt{t}}\right)\right) \quad (\text{A-8})$$

Si on note:

$$P(S, T, y) = \left(\frac{S}{\bar{L}}\right)^{\frac{y-y_a}{\sigma^2}} N\left(\frac{1}{\sigma}\left(\sqrt{t}y + \frac{\ln \frac{S}{\bar{L}}}{\sqrt{T}}\right)\right) + \left(\frac{S}{\bar{L}}\right)^{\frac{-(y+y_a)}{\sigma^2}} N\left(\frac{1}{\sigma}\left(-\sqrt{t}y + \frac{\ln \frac{S}{\bar{L}}}{\sqrt{T}}\right)\right) \quad (\text{A-9})$$

On trouve sur l'ensemble $\{S_{T_0} < L\}$:

$$E \left[e^{-x T_b} \mathbb{1}_{\{T_b < T\}} / \mathcal{G}_{T_0} \right] = e^{-x T_0} P(S_{T_0}, T - T_0, y_x) \quad (\text{A-10})$$

D'après les notations (A-5), (A-9) et la formule (A-10), on obtient alors:

$$\begin{aligned} C^b &= L e^{-r T_0} E \left[P \left(S_{T_0}, T - T_0, \sqrt{y_a^2 + 2\sigma^2(r - \alpha + \lambda)} \right) \mathbb{1}_{\{S_{T_0} < L\}} \right] \\ &\quad - K e^{-r T_0} E \left[P \left(S_{T_0}, T - T_0, \sqrt{y_a^2 + 2\sigma^2(r + \lambda)} \right) \mathbb{1}_{\{S_{T_0} < L\}} \right] \end{aligned} \quad (\text{A-11})$$

En reprenant la notation (A-1) et en notant :

$$p(x) = S e^{\left(r - \alpha - \frac{\sigma^2}{2}\right) T_0 + \sqrt{T_0} x} \quad (\text{A-12})$$

On a :

$$\begin{aligned} C^b &= L e^{-r T_0} \int_{-\infty}^{x_L} P \left(p(x), T - T_0, \sqrt{y_a^2 + 2\sigma^2(r - \alpha + \lambda)} \right) n(x) dx \\ &\quad - K e^{-r T_0} \int_{-\infty}^{x_L} P \left(p(x), T - T_0, \sqrt{y_a^2 + 2\sigma^2(r + \lambda)} \right) n(x) dx \end{aligned} \quad (\text{A-13})$$

A partir de (B-5)⁽¹⁾ et de (A-1), on peut écrire:

$$\begin{aligned}
 H(T, y) &= \int_{-\infty}^{x_L} P(p(x), T, y) n(x) dx \\
 &= \\
 &e^{-\sqrt{T_0} x_L \frac{y-y_\alpha}{\sigma}} B\left(\sqrt{T_0} \frac{y-y_\alpha}{\sigma}, \sqrt{\frac{T_0}{T}}, \frac{\sqrt{T}}{\sigma} y - \sqrt{\frac{T_0}{T}} x_L\right) + e^{\sqrt{T_0} x_L \frac{y-y_\alpha}{\sigma}} B\left(-\sqrt{T_0} \frac{y-y_\alpha}{\sigma}, \sqrt{\frac{T_0}{T}}, -\frac{\sqrt{T}}{\sigma} y - \sqrt{\frac{T_0}{T}} x_L\right)
 \end{aligned}
 \tag{A-14}$$

De (A-14) et de l'expression de C^b précédente (A-13), on obtient finalement :

$$C^b = L e^{-rT_0} H\left(T - T_0, \sqrt{y_\alpha^2 + 2\sigma^2(r - \alpha + \lambda)}\right) - K e^{-rT_0} H\left(T - T_0, \sqrt{y_\alpha^2 + 2\sigma^2(r + \lambda)}\right)
 \tag{A-15}$$

A-3 Calcul du prix de l'option dans le scénario D

Le calcul de C^c est une extension de celui qui mène à C^d . C'est pourquoi, dans un souci de cohérence, on a choisi de développer d'abord le chemin qui conduit à C^d . On procède comme pour C^b par conditionnement sur G_{T_0} . Puis on reconnaît une option à barrière de type "up-and-out" :

$$\begin{aligned}
 C^d &= e^{-(r+\lambda)} e^{\lambda T_0} E\left[(S_T - K)^+ \mathbb{1}_{\{T_b > T\}} \mathbb{1}_{\{S_{T_0} < L\}}\right] \\
 &= e^{-(r+\lambda)} e^{\lambda T_0} E\left[\mathbb{1}_{\{S_{T_0} < L\}} E\left[(S_T - K)^+ \mathbb{1}_{\{T_b > T\}} / G_{T_0}\right]\right] \\
 &= \\
 &e^{-\lambda(T-T_0)} e^{-rT_0} e^{-d(T-T_0)} E\left[\mathbb{1}_{\{S_{T_0} < L\}} E\left[e^{-(r_d-\alpha)(T-T_0)} (S_T e^{-\alpha(T-T_0)} - K e^{-\alpha(T-T_0)})^+ \mathbb{1}_{\{T_b > T\}} / G_{T_0}\right]\right]
 \end{aligned}$$

(1) Voir annexe B

Modélisation Stochastique pour l'Evaluation des Stock-options

On peut remarquer que E_{T_0} est le prix vu de T_0 d'un call « up-and-out » de barrière L dont les paramètres usuels sont résumés dans le tableau suivant :

Drift	Volatilité	Maturité	S(0)	Strike
$r_\alpha = r_d - \alpha$	σ	$T - T_0$	S_{T_0}	$K_\alpha(T - T_0) = Ke^{-\alpha(T-T_0)}$

(A-16)

La formule fermée d'une telle option est bien connue (Voir [19]). A partir des notations introduites dans le tableau (A-16), E_{T_0} peut s'écrire :

$$E_{T_0} = Q\left(S_{T_0}, T - T_0, K_\alpha(T - T_0)\right) \quad (\text{A-17})$$

Avec:

$$Q(S, T, K) = C(S, T, K) - C(S, T, L) - \left(\frac{L}{S}\right)^u \left[C\left(\frac{L^2}{S}, T, K\right) - C\left(\frac{L^2}{S}, T, L\right) \right],$$

$$\text{avec } u = \frac{2r_\alpha}{\sigma^2} - 1$$

(A-18)

Où l'expression $C(S, T, Y)$ est proche du prix d'un call en 0 de maturité T, de prix d'exercice Y, de drift r_α , de volatilité σ . La différence réside dans l'actualisation du second terme qui se fait au taux r au lieu de r_α . En effet :

$$C(S, T, Y) = SN(d_1(Y)) - Ke^{-rT}N(d_2(Y)), \text{ avec:}$$

$$d_1(Y) = \frac{\ln \frac{S}{Y} + \left(r_\alpha + \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}}, \quad d_2(Y) = \frac{\ln \frac{S}{Y} + \left(r_\alpha - \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

(A-19)

En reprenant les notations (A-1), (A-12), et (A-16), les formules (A-18) et (A-19), on a :

$$C^d = e^{-\lambda(T-T_0)} e^{-rT_0} e^{-d(T-T_0)} \int_{-\infty}^{x_L} Q(p(x), T - T_0, K_\alpha(T - T_0)) n(x) dx$$

(A-20)

Il faut donc détailler $Q(p(x), T, K)$. En notant :

$$Q(p(x), T, K) = C(p(x), T, K) - C(p(x), T, L) - e^{-u\sigma\sqrt{T_0}x} e^{u\sigma\sqrt{T_0}x_L} \left[C\left(\frac{L^2}{p(x)}, T, K\right) - C\left(\frac{L^2}{p(x)}, T, L\right) \right] \quad (\text{A-21})$$

A partir de (B-5)⁽¹⁾ et de la notation (A-1), on peut noter :

$$\begin{aligned} A_1(T, Y) &= \int_{-\infty}^{x_L} C(p(x), T, Y) n(x) dx \\ &= S e^{\left(r_d - \frac{\sigma^2}{2}\right) T_0} B\left(\sigma\sqrt{T_0}, \sqrt{\frac{T_0}{T}}, \frac{1}{\sigma\sqrt{T}} \left[\ln \frac{S}{Y} + \left(r_\alpha - \frac{\sigma^2}{2}\right) T_0 + \left(r_d + \frac{\sigma^2}{2}\right) T \right]\right) \\ &\quad - K e^{-r_d T} B\left(0, \sqrt{\frac{T_0}{T}}, \frac{1}{\sigma\sqrt{T}} \left[\ln \frac{S}{Y} + \left(r_\alpha - \frac{\sigma^2}{2}\right) T_0 + \left(r_d - \frac{\sigma^2}{2}\right) T \right]\right) \end{aligned} \quad (\text{A-22})$$

Et:

$$\begin{aligned} A_2(T, Y) &= \int_{-\infty}^{x_L} e^{-u\sigma\sqrt{T_0}x} C\left(\frac{L^2}{p(x)}, T, K\right) n(x) dx \\ &= \frac{L^2}{S} e^{-\left(r_d - \frac{\sigma^2}{2}\right) T_0} B\left(-(u+1)\sigma\sqrt{T_0}, -\sqrt{\frac{T_0}{T}}, \frac{1}{\sigma\sqrt{T}} \left[\ln \frac{L^2}{SY} - \left(r_\alpha - \frac{\sigma^2}{2}\right) T_0 + \left(r_\alpha + \frac{\sigma^2}{2}\right) T \right]\right) \\ &\quad - K e^{-r_d T} B\left(-u\sigma\sqrt{T_0}, -\sqrt{\frac{T_0}{T}}, \frac{1}{\sigma\sqrt{T}} \left[\ln \frac{L^2}{SY} - \left(r_\alpha - \frac{\sigma^2}{2}\right) T_0 + \left(r_\alpha - \frac{\sigma^2}{2}\right) T \right]\right) \end{aligned} \quad (\text{A-23})$$

De (A-21), (A-22), (A-23) et de l'expression de C^d précédente (A-20), on obtient enfin :

$$\begin{aligned} C^d &= e^{-\lambda(T-T_0)} e^{-rT_0} e^{-d(T-T_0)} \left[\left[A_1(T-T_0, K_\alpha(T-T_0)) - A_1(T-T_0, L) \right] - \right. \\ &\quad \left. e^{u\sigma\sqrt{T_0}x_L} \left[A_2(T-T_0, K_\alpha(T-T_0)) - A_2(T-T_0, L) \right] \right] \end{aligned} \quad (\text{A-24})$$

A-4 Calcul du prix de l'option dans le scenario C

On procède d'abord par conditionnement sur \mathcal{G}_{T_0} puis on se ramène au calcul de l'intégrale du cas précédent :

$$\begin{aligned}
 C^c &= \lambda e^{\lambda T_0} E[\mathbb{1}_{\{S_{T_0} < L\}} \int_{T_0}^T e^{-(r+\lambda)t} (S_t - K)^+ \mathbb{1}_{\{\mathcal{T}_b > t\}} dt] \\
 &= \lambda e^{\lambda T_0} E[\mathbb{1}_{\{S_{T_0} < L\}} \underbrace{E \left[\int_{T_0}^T e^{-(r+\lambda)t} (S_t - K)^+ \mathbb{1}_{\{\mathcal{T}_b > t\}} dt / \mathcal{G}_{T_0} \right]}_{E_{T_0}^I}] \\
 E_{T_0}^I &= \int_{T_0}^T E[e^{-(r+\lambda)t} (S_t - K)^+ \mathbb{1}_{\{\mathcal{T}_b > t\}} / \mathcal{G}_{T_0}] dt \\
 &= e^{-rT_0} \int_{T_0}^T e^{-\lambda t} e^{-d(t-T_0)} E \left[e^{-(r_d-\alpha)(t-T_0)} (S_t e^{-\alpha(t-T_0)} - K e^{-\alpha(t-T_0)})^+ \mathbb{1}_{\{\mathcal{T}_b > t\}} / \mathcal{G}_{T_0} \right] dt \\
 &= e^{-r_d T_0} \int_{T_0}^T e^{-(r+\lambda)t} Q(S_{T_0}, t - T_0, K e^{-\alpha(t-T_0)}) dt
 \end{aligned}$$

En utilisant les notations (A-16), (A-17) et (A-18), ainsi, C^c se réécrit :

$$C^c = e^{-rT_0} E \left[\mathbb{1}_{\{S_{T_0} < L\}} \int_0^{T-T_0} \lambda e^{-\lambda t} Q(S_{T_0}, t, K e^{-\alpha t}) dt \right] \quad (\text{A-25})$$

On va donc calculer :

$$J(S, T) = \int_0^T \lambda e^{-\lambda t} Q(S, t, K e^{-\alpha t}) dt \quad (\text{A-26})$$

Où on rappelle que :

$$\begin{aligned}
 Q(S, t, K e^{-\alpha t}) &= C(S, t, K e^{-\alpha t}) - C(S, t, L) - \left(\frac{L}{S} \right)^u \left[C\left(\frac{L^2}{S}, T, K e^{-\alpha t} \right) - C\left(\frac{L^2}{S}, T, L \right) \right], \\
 \text{avec } u &= \frac{2r_\alpha}{\sigma^2} - 1
 \end{aligned} \quad (\text{A-27})$$

Et:

$$C(S, t, Ke^{-\alpha t}) = SN \left(\frac{1}{\sigma} \left(\frac{\ln \frac{S}{K}}{\sqrt{t}} + \left(r + \frac{\sigma^2}{2} \right) \sqrt{t} \right) \right) - Ke^{-rt} N \left(\frac{1}{\sigma} \left(\frac{\ln \frac{S}{K}}{\sqrt{t}} + \left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) \sqrt{t} \right) \right)$$

$$C(S, t, L) = SN \left(\frac{1}{\sigma} \left(\frac{\ln \frac{S}{L}}{\sqrt{t}} + \left(r + \frac{\sigma^2}{2} \right) \sqrt{t} \right) \right) - Ke^{-rt} N \left(\frac{1}{\sigma} \left(\frac{\ln \frac{S}{L}}{\sqrt{t}} + \left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) \sqrt{t} \right) \right)$$

(A-28)

Introduisant les notations suivantes :

$$a(S, K) = \ln \frac{S}{K}$$

$$b(r) = r + \frac{\sigma^2}{2}$$

$$\hat{b}(r) = r - \frac{\sigma^2}{2}$$

$$b_\lambda(r) = \sqrt{\left(r + \frac{\sigma^2}{2} \right)^2 + 2\sigma^2\lambda}$$

$$c_\lambda(R, r) = \sqrt{\left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right)^2 + 2\sigma^2(\lambda + R)}$$

(A-29)

$$I_1(S, T, K, r) = S \int_0^T \lambda e^{-\lambda t} N \left(\frac{1}{\sigma} \left(\frac{\ln \frac{S}{K}}{\sqrt{t}} + \left(r + \frac{\sigma^2}{2} \right) \sqrt{t} \right) \right) dt$$

$$I_2(S, T, K, R, r) = -K \int_0^T \lambda e^{-(\lambda+R)t} N \left(\frac{1}{\sigma} \left(\frac{\ln \frac{S}{K}}{\sqrt{t}} + \left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) \sqrt{t} \right) \right) dt$$

(A-30)

A partir de (A-27), (A-28) et de (A-30), $J(S, T)$ peut s'écrire :

$$J(S, T) = I_1(S, T, K, r) + I_2(S, T, K, R, r) - I_1(S, T, L, r_\alpha) - \frac{K}{L} I_2(S, T, L, R, r_\alpha) - \left(\frac{L}{S}\right)^u \left[I_1\left(\frac{L^2}{S}, T, K, r\right) + I_2\left(\frac{L^2}{S}, T, K, r, r\right) - I_1\left(\frac{L^2}{S}, T, L, r_\alpha\right) + I_2\left(\frac{L^2}{S}, T, L, r, r_\alpha\right) \right] \quad (\text{A-31})$$

Calcul de $I_1(S, T, K, r)$

En utilisant les notations (A-29) et en omettant par commodité les arguments des fonctions définies, on a :

$$I_1(S, T, K, r) = S \int_0^T \lambda e^{-\lambda t} N\left(\frac{1}{\sigma}\left(\frac{a}{\sqrt{t}} + b\sqrt{t}\right)\right) dt = S \hat{I}_1(S, T, K, r)$$

Une intégration par partie donne :

$$\hat{I}_1(S, T, K, r) = \mathbb{1}_{\{S > K\}} + \frac{1}{2} \mathbb{1}_{\{S = K\}} - e^{-\lambda T} N\left(\frac{1}{\sigma}\left(\frac{a}{\sqrt{T}} + b\sqrt{T}\right)\right) + I_3(S, T, K, r)$$

Avec

$$I_3(S, T, K, r) = e^{\frac{\alpha(b_\lambda - b)}{\sigma^2}} \int_0^T \frac{1}{2\sigma} \left(\frac{b}{t^{1/2}} - \frac{a}{t^{3/2}} \right) n\left(\frac{1}{\sigma}\left(\frac{a}{\sqrt{t}} + b_\lambda \sqrt{t}\right)\right) dt \quad (\text{A-32})$$

On va pouvoir calculer cette dernière intégrale grâce à la remarque suivante :

$$\frac{d}{dt} N\left(\frac{1}{\sigma}\left(\frac{a}{\sqrt{t}} + b\sqrt{t}\right)\right) = \frac{1}{2\sigma} \left(\frac{b}{t^{1/2}} - \frac{a}{t^{3/2}} \right) n\left(\frac{1}{\sigma}\left(\frac{a}{\sqrt{t}} + b_\lambda \sqrt{t}\right)\right) \quad (\text{A-33})$$

Il faut également exploiter les notations (A-7) et (A-8) pour obtenir une expression analytique de I_3 . Ainsi, on a :

$$I_1(S, T, K, r) = S \left[\mathbb{1}_{\{S > K\}} + \frac{1}{2} \mathbb{1}_{\{S = K\}} - e^{-\lambda T} N\left(\frac{1}{\sigma\sqrt{T}} \ln \frac{S}{K} + \frac{b(r)\sqrt{T}}{\sigma}\right) \right] + I_3(S, T, K, r) \quad (\text{A-34})$$

$$\begin{aligned}
 I_3(S, T, K, r) = & \frac{1}{2} \left(1 + \frac{b(r)}{b_\lambda(r)} \right) e^{-\frac{b(r)-b_\lambda(r)}{\sigma^2} \ln \frac{S}{K}} N \left(\frac{1}{\sigma \sqrt{T}} \ln \frac{S}{K} + \frac{b_\lambda(r) \sqrt{T}}{\sigma} \right) \\
 & + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{b(r)}{b_\lambda(r)} \right) e^{-\frac{b(r)+b_\lambda(r)}{\sigma^2} \ln \frac{S}{K}} N \left(\frac{1}{\sigma \sqrt{T}} \ln \frac{S}{K} - \frac{b_\lambda(r) \sqrt{T}}{\sigma} \right) \\
 & - \frac{1}{2} \left(1 + \frac{b(r)}{b_\lambda(r)} \right) e^{-\frac{b(r)-b_\lambda(r)}{\sigma^2} \ln \frac{S}{K}} \mathbb{1}_{\{S > K\}} \\
 & - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{b(r)}{b_\lambda(r)} \right) e^{-\frac{b(r)+b_\lambda(r)}{\sigma^2} \ln \frac{S}{K}} \mathbb{1}_{\{S > K\}} \\
 & - \frac{1}{2} e^{-\frac{b(r)-b_\lambda(r)}{\sigma^2} \ln \frac{S}{K}} \mathbb{1}_{\{S = K\}}
 \end{aligned}
 \tag{A-35}$$

Calcul de $I_2(S, T, K, R, r)$

$$\begin{aligned}
 I_2(S, T, K, R, r) = & -\frac{\lambda K}{\lambda + R} [\mathbb{1}_{\{S > K\}} + \frac{1}{2} \mathbb{1}_{\{S = K\}} - e^{-(\lambda + R)T} N \left(\frac{1}{\sigma \sqrt{T}} \ln \frac{S}{K} + \frac{\hat{b}(r) \sqrt{T}}{\sigma} \right) + I_4(S, T, K, R, r)
 \end{aligned}
 \tag{A-36}$$

$$\begin{aligned}
 I_4(S, T, K, R, r) = & \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\hat{b}(r)}{c_\lambda(R, r)} \right) e^{-\frac{\hat{b}(r)-c_\lambda(R, r)}{\sigma^2} \ln \frac{S}{K}} \left[N \left(\frac{1}{\sigma \sqrt{T}} \ln \frac{S}{K} + \frac{c_\lambda(R, r) \sqrt{T}}{\sigma} \right) - \mathbb{1}_{\{S > K\}} \right] \\
 & + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\hat{b}(r)}{c_\lambda(R, r)} \right) e^{-\frac{\hat{b}(r)+c_\lambda(R, r)}{\sigma^2} \ln \frac{S}{K}} \left[N \left(\frac{1}{\sigma \sqrt{T}} \ln \frac{S}{K} - \frac{c_\lambda(R, r) \sqrt{T}}{\sigma} \right) - \mathbb{1}_{\{S > K\}} \right] \\
 & - \frac{1}{2} e^{-\frac{\hat{b}(r)-c_\lambda(R, r)}{\sigma^2} \ln \frac{S}{K}} \frac{1}{2} \mathbb{1}_{\{S = K\}}
 \end{aligned}
 \tag{A-37}$$

On peut remarquer que les expressions de I_3 et de I_4 sont très proches. En effet, pour passer de l'une à l'autre, il suffit de remplacer : $b(r)$ par $\hat{b}(r)$ et $b_\lambda(r)$ par $c_\lambda(R, r)$.

Retour sur le calcul de C^c

En reprenant les notations (A-1), (A-12) et les formules (A-25), (A-26), C^c peut s'écrire :

$$C^c = e^{-rT_0} \int_{-\infty}^{x_L} J(p(x), T - T_0) n(x) dx \quad (A-38)$$

A partir de (A-1), (A-27) et de (A-29), on peut noter:

$$x_y = \frac{\ln \frac{Y}{S}}{\sigma \sqrt{T_0}} - \left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) \frac{\sqrt{T_0}}{\sigma}, \quad \hat{S}_1 = S e^{\left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) T_0}, \quad \hat{S}_2 = L e^{(1+u)\sigma \sqrt{T_0} x_L}$$

$$\hat{S}_3 = e^{u\sigma \sqrt{T_0} x_L}, \quad d_1(Y) = \ln \frac{S}{Y} + \left(r_\alpha - \frac{\sigma^2}{2} \right) T_0, \quad d_2(Y) = \ln \frac{S}{Y} - \left(r_\alpha - \frac{\sigma^2}{2} \right) T_0$$

$$b_+(r) = b_\lambda(r) + b(r), \quad b_-(r) = b_\lambda(r) - b(r), \quad \hat{b}_+(R, r) = c_\lambda(R, r) + \hat{b}(r)$$

$$\hat{b}_-(R, r) = c_\lambda(R, r) - \hat{b}(r)$$

(A-39)

Calcul de $I_1(p(x), T, K, r)$ sur l'ensemble $\{x \neq x_K\}$

$I_1(p(x), T, K, r)$

$$\begin{aligned}
 &= \hat{S}_1 \left[e^{\sigma\sqrt{T_0}x} \mathbb{1}_{\{x > x_K\}} - e^{-\lambda T} e^{\sigma\sqrt{T_0}x} N \left(\sqrt{\frac{T_0}{T}} x + \frac{d_1(K)}{\sigma\sqrt{T}} + \frac{b(r)\sqrt{T}}{\sigma} \right) \right. \\
 &\quad + \frac{1}{2} \frac{b_+(r)}{b_\lambda(r)} e^{\frac{d_1(K)b_-(r)}{\sigma^2}} e^{\sigma\sqrt{T_0} \left(1 + \frac{b_-(r)}{\sigma^2}\right)x} N \left(\sqrt{\frac{T_0}{T}} x + \frac{d_1(K)}{\sigma\sqrt{T}} + \frac{b_\lambda(r)\sqrt{T}}{\sigma} \right) \\
 &\quad + \frac{1}{2} \frac{b_-(r)}{b_\lambda(r)} e^{-\frac{d_1(K)b_+(r)}{\sigma^2}} e^{\sigma\sqrt{T_0} \left(1 - \frac{b_+(r)}{\sigma^2}\right)x} N \left(\sqrt{\frac{T_0}{T}} x + \frac{d_1(K)}{\sigma\sqrt{T}} - \frac{b_\lambda(r)\sqrt{T}}{\sigma} \right) \\
 &\quad - \frac{1}{2} \frac{b_+(r)}{b_\lambda(r)} e^{\frac{d_1(K)b_-(r)}{\sigma^2}} e^{\sigma\sqrt{T_0} \left(1 + \frac{b_-(r)}{\sigma^2}\right)x} \mathbb{1}_{\{x > x_K\}} \\
 &\quad \left. - \frac{1}{2} \frac{b_-(r)}{b_\lambda(r)} e^{-\frac{d_1(K)b_+(r)}{\sigma^2}} e^{\sigma\sqrt{T_0} \left(1 - \frac{b_+(r)}{\sigma^2}\right)x} \mathbb{1}_{\{x > x_K\}} \right]
 \end{aligned}$$

(A-40)

Calcul de $I_2(p(x), T, K, R, r)$ sur l'ensemble $\{x \neq x_K\}$

$I_2(p(x), T, K, R, r) =$

$$\begin{aligned}
 &= -\frac{\lambda K}{\lambda + R} \left[\mathbb{1}_{\{x > x_K\}} - e^{-(\lambda+R)T} N \left(\sqrt{\frac{T_0}{T}} x + \frac{d_1(K)}{\sigma\sqrt{T}} + \frac{\hat{b}(r)\sqrt{T}}{\sigma} \right) \right. \\
 &\quad + \frac{1}{2} \frac{\hat{b}_+(R, r)}{c_\lambda(R, r)} e^{\frac{d_1(K)\hat{b}_-(R, r)}{\sigma^2}} e^{\sigma\sqrt{T_0} \frac{\hat{b}_-(R, r)}{\sigma^2} x} N \left(\sqrt{\frac{T_0}{T}} x + \frac{d_1(K)}{\sigma\sqrt{T}} + \frac{c_\lambda(R, r)\sqrt{T}}{\sigma} \right) \\
 &\quad + \frac{1}{2} \frac{\hat{b}_-(R, r)}{c_\lambda(R, r)} e^{-\frac{d_1(K)\hat{b}_+(R, r)}{\sigma^2}} e^{-\sigma\sqrt{T_0} \frac{\hat{b}_+(R, r)}{\sigma^2} x} N \left(\sqrt{\frac{T_0}{T}} x + \frac{d_1(K)}{\sigma\sqrt{T}} - \frac{c_\lambda(R, r)\sqrt{T}}{\sigma} \right) \\
 &\quad - \frac{1}{2} \frac{\hat{b}_+(R, r)}{c_\lambda(R, r)} e^{\frac{d_1(K)\hat{b}_-(R, r)}{\sigma^2}} e^{\sigma\sqrt{T_0} \frac{\hat{b}_-(R, r)}{\sigma^2} x} \mathbb{1}_{\{x > x_K\}} \\
 &\quad \left. - \frac{1}{2} \frac{\hat{b}_-(R, r)}{c_\lambda(R, r)} e^{-\frac{d_1(K)\hat{b}_+(R, r)}{\sigma^2}} e^{-\sigma\sqrt{T_0} \frac{\hat{b}_+(R, r)}{\sigma^2} x} \mathbb{1}_{\{x > x_K\}} \right]
 \end{aligned}$$

(A-41)

Calcul de $\left(\frac{L}{p(x)}\right)^u I_1\left(\frac{L^2}{p(x)}, T, K, r\right)$ sur l'ensemble $\{x \neq x_K\}$

$$\begin{aligned}
 & \left(\frac{L}{p(x)}\right)^u I_1\left(\frac{L^2}{p(x)}, T, K, r\right) \\
 &= \hat{S}_2 \left[e^{-\sigma\sqrt{T_0}(1+u)x} \mathbb{1}_{\left\{x < x_{L^2/K}\right\}} \right. \\
 & \quad - e^{-\lambda T} e^{-\sigma\sqrt{T_0}(1+u)x} N\left(-\sqrt{\frac{T_0}{T}}x + \frac{d_2\left(\frac{KS^2}{L^2}\right)}{\sigma\sqrt{T}} + \frac{b(r)\sqrt{T}}{\sigma}\right) \\
 & \quad + \frac{1}{2} \frac{b_+(r)}{b_\lambda(r)} e^{\frac{d_2\left(\frac{KS^2}{L^2}\right)b_-(r)}{\sigma^2}} e^{-\sigma\sqrt{T_0}\left(1+u+\frac{b_-(r)}{\sigma^2}\right)x} N\left(-\sqrt{\frac{T_0}{T}}x + \frac{d_2\left(\frac{KS^2}{L^2}\right)}{\sigma\sqrt{T}} + \frac{b_\lambda(r)\sqrt{T}}{\sigma}\right) \\
 & \quad + \frac{1}{2} \frac{b_-(r)}{b_\lambda(r)} e^{-\frac{d_2\left(\frac{KS^2}{L^2}\right)b_+(r)}{\sigma^2}} e^{-\sigma\sqrt{T_0}\left(1+u-\frac{b_+(r)}{\sigma^2}\right)x} N\left(-\sqrt{\frac{T_0}{T}}x + \frac{d_2\left(\frac{KS^2}{L^2}\right)}{\sigma\sqrt{T}} \right. \\
 & \quad \left. - \frac{b_\lambda(r)\sqrt{T}}{\sigma}\right) - \frac{1}{2} \frac{b_+(r)}{b_\lambda(r)} e^{\frac{d_2\left(\frac{KS^2}{L^2}\right)b_-(r)}{\sigma^2}} e^{-\sigma\sqrt{T_0}\left(1+u+\frac{b_-(r)}{\sigma^2}\right)x} \mathbb{1}_{\left\{x < x_{L^2/K}\right\}} \\
 & \quad \left. - \frac{1}{2} \frac{b_-(r)}{b_\lambda(r)} e^{-\frac{d_2\left(\frac{KS^2}{L^2}\right)b_+(r)}{\sigma^2}} e^{-\sigma\sqrt{T_0}\left(1+u-\frac{b_+(r)}{\sigma^2}\right)x} \mathbb{1}_{\left\{x < x_{L^2/K}\right\}} \right]
 \end{aligned}$$

(A-42)

Calcul de $\left(\frac{L}{p(x)}\right)^u I_2\left(\frac{L^2}{p(x)}, T, K, R, r\right)$ sur l'ensemble $\{x \neq x_K\}$

$$\begin{aligned}
 & \left(\frac{L}{p(x)}\right)^u I_2\left(\frac{L^2}{p(x)}, T, K, R, r\right) \\
 &= -\frac{\lambda K}{\lambda + R} \hat{S}_3 \left[e^{-\sigma u \sqrt{T_0} x} \mathbb{1}_{\left\{x < x_{L^2/K}\right\}} \right. \\
 & \quad - e^{-(\lambda+R)T} e^{-\sigma u \sqrt{T_0} x} N\left(-\sqrt{\frac{T_0}{T}} x + \frac{d_2\left(\frac{KS^2}{L^2}\right)}{\sigma \sqrt{T}} + \frac{\hat{b}(r)\sqrt{T}}{\sigma}\right) \\
 & \quad + \frac{1}{2} \frac{\hat{b}_+(R, r)}{c_\lambda(R, r)} e^{\frac{d_2\left(\frac{KS^2}{L^2}\right) \hat{b}_-(R, r)}{\sigma^2}} e^{-\sigma \sqrt{T_0} \left(\frac{\hat{b}_-(R, r)}{\sigma^2} + u\right) x} N\left(-\sqrt{\frac{T_0}{T}} x + \frac{d_2\left(\frac{KS^2}{L^2}\right)}{\sigma \sqrt{T}} \right. \\
 & \quad \left. + \frac{c_\lambda(R, r)\sqrt{T}}{\sigma}\right) \\
 & \quad + \frac{1}{2} \frac{\hat{b}_-(R, r)}{c_\lambda(R, r)} e^{-\frac{d_2\left(\frac{KS^2}{L^2}\right) \hat{b}_+(R, r)}{\sigma^2}} e^{\sigma \sqrt{T_0} \left(\frac{\hat{b}_+(R, r)}{\sigma^2} - u\right) x} N\left(-\sqrt{\frac{T_0}{T}} x + \frac{d_2\left(\frac{KS^2}{L^2}\right)}{\sigma \sqrt{T}} \right. \\
 & \quad \left. - \frac{c_\lambda(R, r)\sqrt{T}}{\sigma}\right) - \frac{1}{2} \frac{\hat{b}_+(R, r)}{c_\lambda(R, r)} e^{\frac{d_2\left(\frac{KS^2}{L^2}\right) \hat{b}_-(R, r)}{\sigma^2}} e^{-\sigma \sqrt{T_0} \left(\frac{\hat{b}_-(R, r)}{\sigma^2} + u\right) x} \mathbb{1}_{\left\{x < x_{L^2/K}\right\}} \\
 & \quad \left. - \frac{1}{2} \frac{\hat{b}_-(R, r)}{c_\lambda(R, r)} e^{-\frac{d_2\left(\frac{KS^2}{L^2}\right) \hat{b}_+(R, r)}{\sigma^2}} e^{\sigma \sqrt{T_0} \left(\frac{\hat{b}_+(R, r)}{\sigma^2} - u\right) x} \mathbb{1}_{\left\{x < x_{L^2/K}\right\}} \right]
 \end{aligned}$$

(A-43)

En utilisant la remarque (B-4) et le paragraphe (B-2-2), on peut enfin calculer :

$$\begin{aligned}
 D_1(T, K, r) &= \int_{-\infty}^{x_L} I_1(p(x), T, K, r) n(x) dx \\
 &= \hat{S}_1 \left[e^{\frac{\sigma^2 T_0}{2}} [N(x_L - \sigma\sqrt{T_0}) - N(x_K - \sigma\sqrt{T_0})] - e^{-\lambda T} B \left(\sigma\sqrt{T_0}, \sqrt{\frac{T_0}{T}}, \frac{d_1(K)}{\sigma\sqrt{T}} + \frac{b(r)\sqrt{T}}{\sigma} \right) \right. \\
 &\quad + \frac{1}{2} \frac{b_+(r)}{b_\lambda(r)} e^{\frac{d_1(K)b_-(r)}{\sigma^2}} B \left(\sigma\sqrt{T_0} \left(1 + \frac{b_-(r)}{\sigma^2} \right), \sqrt{\frac{T_0}{T}}, \frac{d_1(K)}{\sigma\sqrt{T}} - \frac{b_\lambda(r)\sqrt{T}}{\sigma} \right) \\
 &\quad + \frac{1}{2} \frac{b_-(r)}{b_\lambda(r)} e^{-\frac{d_1(K)b_+(r)}{\sigma^2}} B \left(\sigma\sqrt{T_0} \left(1 - \frac{b_+(r)}{\sigma^2} \right), \sqrt{\frac{T_0}{T}}, \frac{d_1(K)}{\sigma\sqrt{T}} - \frac{b_\lambda(r)\sqrt{T}}{\sigma} \right) \\
 &\quad - \frac{1}{2} \frac{b_+(r)}{b_\lambda(r)} e^{\frac{d_1(K)b_-(r)}{\sigma^2}} e^{\frac{\sigma^2 T_0}{2} \left(1 + \frac{b_-(r)}{\sigma^2} \right)^2} \left[N \left(x_L - \sigma\sqrt{T_0} \left(1 + \frac{b_-(r)}{\sigma^2} \right) \right) \right. \\
 &\quad \left. - N \left(x_K - \sigma\sqrt{T_0} \left(1 + \frac{b_-(r)}{\sigma^2} \right) \right) \right] \\
 &\quad - \frac{1}{2} \frac{b_-(r)}{b_\lambda(r)} e^{-\frac{d_1(K)b_+(r)}{\sigma^2}} e^{\frac{\sigma^2 T_0}{2} \left(1 - \frac{b_+(r)}{\sigma^2} \right)^2} \left[N \left(x_L - \sigma\sqrt{T_0} \left(1 - \frac{b_+(r)}{\sigma^2} \right) \right) \right. \\
 &\quad \left. - N \left(x_K - \sigma\sqrt{T_0} \left(1 - \frac{b_+(r)}{\sigma^2} \right) \right) \right] \Bigg]
 \end{aligned}$$

(A-44)

$$\begin{aligned}
 D_2(T, K, R, r) &= \int_{-\infty}^{x_L} I_2(p(x), T, K, R, r) n(x) dx \\
 &= -\frac{\lambda K}{\lambda + R} \left[N(x_L) - N(x_K) - e^{-(\lambda+R)T} B \left(0, \sqrt{\frac{T_0}{T}}, \frac{d_1(K)}{\sigma\sqrt{T}} + \frac{\hat{b}(r)\sqrt{T}}{\sigma} \right) \right. \\
 &\quad + \frac{1}{2} \frac{\hat{b}_+(R, r)}{c_\lambda(R, r)} e^{\frac{d_1(K)\hat{b}_-(R, r)}{\sigma^2}} B \left(\sqrt{T_0} \frac{\hat{b}_-(R, r)}{\sigma}, \sqrt{\frac{T_0}{T}}, \frac{d_1(K)}{\sigma\sqrt{T}} + \frac{c_\lambda(R, r)\sqrt{T}}{\sigma} \right) \\
 &\quad + \frac{1}{2} \frac{\hat{b}_-(R, r)}{c_\lambda(R, r)} e^{-\frac{d_1(K)\hat{b}_+(R, r)}{\sigma^2}} B \left(-\sqrt{T_0} \frac{\hat{b}_+(R, r)}{\sigma}, \sqrt{\frac{T_0}{T}}, \frac{d_1(K)}{\sigma\sqrt{T}} - \frac{c_\lambda(R, r)\sqrt{T}}{\sigma} \right) \\
 &\quad - \frac{1}{2} \frac{\hat{b}_+(R, r)}{c_\lambda(R, r)} e^{\frac{d_1(K)\hat{b}_-(R, r)}{\sigma^2}} e^{\frac{T_0\hat{b}_-(R, r)^2}{2\sigma^2}} \left[N \left(x_L - \sqrt{T_0} \frac{\hat{b}_-(R, r)}{\sigma} \right) \right. \\
 &\quad \left. - N \left(x_K - \sqrt{T_0} \frac{\hat{b}_-(R, r)}{\sigma} \right) \right] \\
 &\quad - \frac{1}{2} \frac{\hat{b}_-(R, r)}{c_\lambda(R, r)} e^{-\frac{d_1(K)\hat{b}_+(R, r)}{\sigma^2}} e^{\frac{T_0\hat{b}_+(R, r)^2}{2\sigma^2}} \left[N \left(x_L + \sqrt{T_0} \frac{\hat{b}_+(R, r)}{\sigma} \right) \right. \\
 &\quad \left. - N \left(x_K + \sqrt{T_0} \frac{\hat{b}_+(R, r)}{\sigma} \right) \right] \Bigg]
 \end{aligned}$$

(A-45)

$$\begin{aligned}
 G_1(T, K, r) &= \int_{-\infty}^{x_L} \left(\frac{L}{p(x)} \right)^u I_1 \left(\frac{L^2}{p(x)}, T, K, r \right) n(x) dx \\
 &= \hat{S}_2 \left[e^{\frac{\sigma^2 T_0}{2}(1+u)^2} N \left(\min(x_L, x_{L^2/K}) + \sigma \sqrt{T_0}(1+u) \right) \right. \\
 &\quad - e^{-\lambda T} B \left(-\sigma \sqrt{T_0}(1+u), -\sqrt{\frac{T_0}{T}}, \frac{d_2 \left(\frac{KS^2}{L^2} \right)}{\sigma \sqrt{T}} + \frac{b(r)\sqrt{T}}{\sigma} \right) \\
 &\quad + \frac{1}{2} \frac{b_+(r)}{b_\lambda(r)} e^{\frac{d_2 \left(\frac{KS^2}{L^2} \right) b_-(r)}{\sigma^2}} B \left(-\sigma \sqrt{T_0} \left(1+u + \frac{b_-(r)}{\sigma^2} \right), -\sqrt{\frac{T_0}{T}}, \frac{d_2 \left(\frac{KS^2}{L^2} \right)}{\sigma \sqrt{T}} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{b_\lambda(r)\sqrt{T}}{\sigma} \right) \\
 &\quad + \frac{1}{2} \frac{b_-(r)}{b_\lambda(r)} e^{-\frac{d_2 \left(\frac{KS^2}{L^2} \right) b_+(r)}{\sigma^2}} B \left(-\sigma \sqrt{T_0} \left(1+u - \frac{b_+(r)}{\sigma^2} \right), -\sqrt{\frac{T_0}{T}}, \frac{d_2 \left(\frac{KS^2}{L^2} \right)}{\sigma \sqrt{T}} \right. \\
 &\quad \left. - \frac{b_\lambda(r)\sqrt{T}}{\sigma} \right) \\
 &\quad - \frac{1}{2} \frac{b_+(r)}{b_\lambda(r)} e^{\frac{d_2 \left(\frac{KS^2}{L^2} \right) b_-(r)}{\sigma^2}} e^{\frac{\sigma^2 T_0}{2} \left(1+u + \frac{b_-(r)}{\sigma^2} \right)^2} N \left(\min(x_L, x_{L^2/K}) \right. \\
 &\quad \left. + \left(1+u + \frac{b_-(r)}{\sigma^2} \right) \right) \\
 &\quad \left. - \frac{1}{2} \frac{b_-(r)}{b_\lambda(r)} e^{-\frac{d_2 \left(\frac{KS^2}{L^2} \right) b_+(r)}{\sigma^2}} N \left(\min(x_L, x_{L^2/K}) + \left(1+u - \frac{b_+(r)}{\sigma^2} \right) \right) \right]
 \end{aligned}$$

(A-46)

$$\begin{aligned}
 G_2(T, K, r) &= \int_{-\infty}^{x_L} \left(\frac{L}{p(x)} \right)^u I_2 \left(\frac{L^2}{p(x)}, T, K, R, r \right) n(x) dx \\
 &= \\
 &= -\frac{\lambda K}{\lambda + R} \hat{S}_3 \left[e^{\sigma^2 u^2 T_0} N \left(\min \left(x_L, x_{L^2/K} \right) + \sigma \sqrt{T_0} u \right) - e^{-(\lambda + R)T} B \left(-\sigma \sqrt{T_0} u, -\sqrt{\frac{T_0}{T}}, \frac{d_2 \left(\frac{KS^2}{L^2} \right)}{\sigma \sqrt{T}} + \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. \frac{\hat{b}(r) \sqrt{T}}{\sigma} \right) + \frac{1}{2} \frac{\hat{b}_+(R, r)}{c_\lambda(R, r)} e^{\frac{d_2 \left(\frac{KS^2}{L^2} \right) \hat{b}_-(R, r)}{\sigma^2}} B \left(-\sigma \sqrt{T_0} \left(\frac{\hat{b}_-(R, r)}{\sigma^2} + u \right), -\sqrt{\frac{T_0}{T}}, \frac{d_2 \left(\frac{KS^2}{L^2} \right)}{\sigma \sqrt{T}} + \frac{c_\lambda(R, r) \sqrt{T}}{\sigma} \right) + \right. \\
 &\quad \left. \frac{1}{2} \frac{\hat{b}_-(R, r)}{c_\lambda(R, r)} e^{-\frac{d_1(K) \hat{b}_+(R, r)}{\sigma^2}} B \left(\sigma \sqrt{T_0} \left(\frac{\hat{b}_+(R, r)}{\sigma^2} - u \right), -\sqrt{\frac{T_0}{T}}, \frac{d_2 \left(\frac{KS^2}{L^2} \right)}{\sigma \sqrt{T}} - \frac{c_\lambda(R, r) \sqrt{T}}{\sigma} \right) - \right. \\
 &\quad \left. \frac{1}{2} \frac{\hat{b}_+(R, r)}{c_\lambda(R, r)} e^{\frac{d_2 \left(\frac{KS^2}{L^2} \right) \hat{b}_-(R, r)}{\sigma^2}} e^{\frac{\sigma^2 T_0}{2} \left(u + \frac{\hat{b}_-(R, r)}{\sigma^2} \right)^2} N \left(\min \left(x_L, x_{L^2/K} \right) + \sigma \sqrt{T_0} \left(u + \frac{\hat{b}_-(R, r)}{\sigma^2} \right) \right) - \right. \\
 &\quad \left. \frac{1}{2} \frac{\hat{b}_-(R, r)}{c_\lambda(R, r)} e^{-\frac{d_1(K) \hat{b}_+(R, r)}{\sigma^2}} e^{\frac{\sigma^2 T_0}{2} \left(-u + \frac{\hat{b}_-(R, r)}{\sigma^2} \right)^2} N \left(\min \left(x_L, x_{L^2/K} \right) - \sigma \sqrt{T_0} \left(-u + \frac{\hat{b}_-(R, r)}{\sigma^2} \right) \right) \right] \quad (A-47)
 \end{aligned}$$

Ainsi, à partir de (A-26), (A-31), (A-38) et des notations (A-44), (A-45), (A-46) et (A-47), on trouve finalement :

$$\begin{aligned}
 C^c &= e^{-rT_0} \int_{-\infty}^{x_L} J(p(x), T - T_0) n(x) dx \\
 &= e^{-rT_0} [D_1(T - T_0, K, r) + D_2(T - T_0, K, r, r) - D_1(T - T_0, L, r_\alpha) - \frac{K}{L} D_2(T - T_0, L, r, r_\alpha) \\
 &\quad - G_1(T - T_0, K, r) - G_2(T - T_0, K, r, r) + G_1(T - T_0, L, r_\alpha) \\
 &\quad + \frac{K}{L} G_2(T - T_0, L, r, r_\alpha)] \quad (A-48)
 \end{aligned}$$

Annexe B : Processus à intensité

Cette présentation est tirée de [3] et [17]. Formellement, \mathcal{T}_λ peut être vu comme le premier instant de saut d'un processus de comptage M non explosif et adapté à \mathbb{F} : $\mathcal{T}_\lambda = \inf\{t \geq 0, M_t = 1\}$. On rappelle qu'un temps d'arrêt \mathcal{T}_λ admet une intensité λ si et seulement si λ est un processus prévisible positif tel que $\int_0^t \lambda_s ds < \infty$ p.s. $\forall t \geq 0$ et le processus compensé $M^1 = (M_t - \int_0^t \lambda_s ds)_{t \geq 0}$ est une \mathbb{G} -martingale locale. Si de plus, on a $E \left[\int_0^t \mu(s) ds \right] < \infty \forall t \geq 0$ alors M^1 est \mathbb{G} -martingale.

B-1 Processus de Cox

Si le processus de comptage M est un processus de Cox ou « doubly stochastic process » par rapport à une filtration \mathbb{F} de \mathbb{G} , d'intensité λ \mathbb{F} -prévisible. C'est-à-dire, conditionnellement à la connaissance de l'évolution de λ jusqu'à une date t , M_t est un processus de Poisson inhomogène de paramètre $\int_0^t \lambda_s ds$. On a donc

$$\text{pour } 0 \leq t \leq T : P(M_T - M_t = k / \mathcal{F}_t \vee \mathcal{G}_t) = \frac{\left(\int_t^T \mu(s) ds \right)^k}{k!} e^{-\int_t^T \mu(s) ds} \quad (\text{B-1})$$

La filtration \mathbb{F} fournit l'information sur la tendance du taux d'exercice (l'évolution de λ_t) mais ne permet pas de décider à un instant t si l'exercice a lieu. Cette information est contenue dans la filtration \mathbb{G} par rapport à laquelle λ est un temps d'arrêt. En résumé, même en connaissant la perspective d'exercice d'un bénéficiaire, l'événement d'exercice est perçu comme une surprise totale, il est totalement imprévisible (alors que la tendance λ l'est).

A partir de (B-1), nous pouvons définir la probabilité conditionnelle de survie et la densité conditionnelle de \mathcal{T} . En effet, si on se restreindra à l'événement $\{\mathcal{T} > t\}$, on a :

$$P(\mathcal{T} > t / \mathcal{G}_t) = E \left[e^{-\int_t^T \mu(s) ds} / \mathcal{G}_t \right] \quad (\text{B-2})$$

$$\text{Et } \frac{\partial}{\partial s} P(\mathcal{T} > t / \mathcal{G}_t) = E \left[\mu_s e^{-\int_t^T \mu(s) ds} / \mathcal{G}_t \right] \quad (\text{B-3})$$

On montre ici comment (B-1) conduit à (B-2) :

$$\begin{aligned} P(\mathcal{T} > t / \mathcal{G}_t) &= P(M_t = 0, M_T - M_t = 0 / \mathcal{G}_t) \\ &= \mathbb{1}_{\{M_t=0\}} P(M_T - M_t = 0 / \mathcal{G}_t) \\ &= \mathbb{1}_{\{\mathcal{T} > t\}} E[P(M_T - M_t = 0 / (\mathcal{F}_t \vee \mathcal{G}_t)) / \mathcal{G}_t] \\ &= \mathbb{1}_{\{\mathcal{T} > t\}} E \left[e^{-\int_t^T \mu(s) ds} / \mathcal{G}_t \right] \end{aligned}$$

B-2 Quelques outils mathématiques pour le calcul des sous-options

B-2-1 Exponentielle-gaussienne

$$\int_a^b e^{cx} n(x) dx = e^{\frac{c^2}{2}} [N(b-c) - N(a-c)] \quad (\text{B-4})$$

B-2-2 Loi normale bivariée

Toutes les intégrales peuvent se mettre sous forme combinaisons linéaires d'intégrales de la forme:

$$\begin{aligned} B(a, b, c) &= \int_{-\infty}^{x_L} e^{ax} N(bx + c) n(x) dx \\ &= \int_{-\infty}^{x_L} e^{ax} \int_{-\infty}^{bx+c} n(y) n(x) dy dx \\ &= \int_{-\infty}^{x_L} \int_{-\infty}^c e^{ax} n(bx + y) n(x) dy dx \\ &= e^{\frac{a^2}{2}} \int_{-\infty}^{x_L} \int_{-\infty}^c \frac{1}{2\pi} \exp\left(-\frac{1}{2}(1+b^2)(x-a)^2 - b(y+ab)(x-a) - \frac{1}{2}(y+ab)^2\right) dy dx \end{aligned}$$

En effet,

$$e^{ax} n(bx + y) n(x) = \frac{1}{2\pi} \exp(u)$$

$$\begin{aligned} \text{Avec : } u &= -\frac{1}{2}(1+b^2)x^2 + ax - bxy - \frac{1}{2}y^2 \\ &= -\frac{1}{2}(1+b^2)(x-a)^2 + \frac{1}{2}(1+b^2)a^2 - b^2ax - bxy - \frac{1}{2}y^2 \\ &= -\frac{1}{2}(1+b^2)(x-a)^2 - b(y+ab)(x-a) - \frac{1}{2}(y+ab)^2 + \frac{a^2}{2} \end{aligned}$$

On peut donc relier l'intégrale B à la fonction de répartition d'une loi normale bivariée. En effet :

$$B(a, b, c) = \int_{-\infty}^{x_L} e^{ax} N(bx + c) n(x) dx = e^{\frac{a^2}{2}} P(X \leq x_L; Y \leq c) \quad (\text{B-5})$$

Où (X, Y) est un couple aléatoire de loi normale bivariée de paramètres:

μ_X	μ_Y	σ_X^2	σ_Y^2	ρ	(B-6)
a	-ab	1	$1 + b^2$	$-\frac{b}{\sqrt{1+b^2}}$	

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [1] International Accounting Standards Board 2. Share-Based Payment, 2004.
- [2] Marc Amblard. La comptabilisation des stock-options : comptabilité d'entreprise ou comptabilité d'actionnaire? Working Paper, Université de Provence, 2002.
- [3] E. Biffis. Affine processes for dynamic mortality and actuarial valuations. Working Paper, Université Bocconi, 2004.
- [4] F. Black and M. Scholes. The Pricing of Options and Corporate Liabilities. *Journal of Political Economy*, 81:637–654, 1973.
- [5] Financial Accounting Standards Board. Accounting for Stock-Based Compensation. FASB Statement 123, 1995.
- [6] Financial Accounting Standards Board. Proposed Statement of Financial Accounting Standards. Share-Based Payment: an Amendment of FASB Statements 123 and 95, 2004a.
- [7] J. Carpenter. The Exercice and Valuation of Executive Stock Options. *Journal of Financial Economics*, 48(2):127–158, 1998.
- [8] P. Carr and V. Linetsky. The Valuation of Executive Stock Options in an Intensity-Based Framework. *European Finance Review*, 4:211–230, 2000.
- [9] Don M. Chance and Tung-Hsiao Yang. Expected Utility Valuation Of Executive Stock Options In A Binomial Framework: A Comparative Analysis. Working Paper, Luisiana State University, July 2004.
- [10] J. Cvitanic, Z. Wiener, and F. Zapatero. Analytic Pricing of Employee Stock Options. Working Paper, October 2004.
- [11] Nicole El Karoui and Lionel Martellini. Dynamic Asset Pricing Theory with Uncertain Time-Horizon. Working Paper, 2001.
- [12] Chloé Guillot-Soulez. Comment mesurer la performance des plans d'options sur actions ? Les liens inévitables entre le social et le financier. Working Paper, Doctorante GREGOR, 2004.
- [13] Brian J. Hall and Kevin J. Murphy. Stock options for undiversified investors. *Journal of Accounting and Economics*, 33:3–42, 2002.
- [14] J. Hull and A. White. How to Value Employee Stock Options. *Financial Analysts Journal*, 60(1):114–119, 2004.

- [15] Peter Lochte Jorgensen. American-style Indexed Executive Stock Options. *European Finance Review*, 6:321–358, 2002.
- [16] I Karatzas and S.E Shreve. *Brownian Motion and Stochastic Calculus – Second Edition*. Springer Verlag, New York, 1991.
- [17] D. Lando. On Cox processes and credit risky securities. *Review of Derivatives Research*, 2:99–120, 1998.
- [18] Frédéric Planchet and Pierre Therond. Evaluation de l'engagement de l'entreprise associé à un plan de stock-options. Working Paper, September 2003.
- [19] F. Quittard-Pinon. *Mathématiques financières*. ems, 2002.
- [20] P. Raupach. The Valuation of Employee Stock Options - How Good is the Standard? Working Paper, Goethe University Frankfurt am Main, January 2003.
- [21] P. Raupach. The Cost of Employee Stock Options. Working Paper, Goethe University Frankfurt am Main, February 2004.
- [22] M. Rubinstein. On the Accounting Valuation of Employee Stock Options. *Journal of Derivatives*, 3:8–24, 1995.
- [23] R. Sircar and W. Xiong. A general Framework for Evaluating Executive Stock Options. Working Paper, Princeton University, January 2005.
- [24] L. Tourtier, J. Lambrechts, and X. Paper. IFRS 2 : Pratique - Enjeux - Impact. *Rémunération Globale*, Janvier 2005.
- [25] Ernst & Young. IFRS 2 Share-Based Payment: An Overview of the New Standard. May 2004.
- [26] Didier Maillard : Que valent les stock-options ? Chaire de BANQUE, Septembre 2005.
- [27] Bacheliers L : Théorie de la spéculation. Paris : Gauthier-Villars, 1900.
- [28] Cox J.C. and Ross S.A.: The valuation of options for alternative stochastic processes. *Journal of financial economics* vol.3 pp 145-166, 1976.
- [29] Garman M.: A general theory of asset valuation under diffusion state processes; working paper N° 50 (Graduate School of Business Administration University of California Berkeley, CA), 1976.
- [30] Fama E.: Efficient capital market: a review of theory and empirical work; *Journal of Finance* vol25, 1970.

- [31] D. Applebaum, Lévy processes and stochastic calculus, Cambridge university Press, New York 2004.
- [32] R.F. Bass, Stochastic Differential equations with Jumps. Septembre 2003.
- [33] R. ELIE, Calcul stochastique appliqué à la finance, ENSAE Avril 2006.
- [35] A. Gerschenfeld & C. Nadal, Lois indéfiniment divisibles et processus de Lévy, DMA, Ecole Normale Supérieure, 24 juin 2006.
- [36] E. Gobet, G. Pagès, M.Yor, Mathématiques et finance.
- [37] E. Janvresse, S. Pergamenchtchikov, P. R.de Fitte, Mathématiques pour la finance et l'assurance.
- [38] T.G. Kurtz, Lectures on Stochastic Analysis, Departments of Mathematics and Statistics University of Wisconsin - Madison, Revised September 7, 2001.
- [39] D. Lamberton, B. Lapeyer. Introduction au Calcul Stochastique Appliqué à la Finance, Ellipses (2nd. ed.1997).
- [40] P.E. Protter, Stochastic Integration and Differential equations, Springer (1990, 2nd. ed.2003).
- [41] N. Rousseau, Introduction au Calcul Stochastique Appliqué à la Finance Laboratoire Dieudonné, Université de Nice - Sophia Antipolis January 29, 2007.
- [42] Merton : Option pricing when underlying stock returns are discontinuous. Journal of financial Economics, 1976.
- [43] Black F.: The pricing of commodity contracts, journal of financial economics vol.3. January-March, pp 167-179, 1976.
- [44] Francis Comut: Quel modèle utiliser pour valoriser les stock-options ?, Hors-série n°H8-lundi 7 Novembre 2005.
- [45] Stéphane Guimbert et Jean Christophe Vallat : La fiscalité des stock-options : une perspective internationale. N°344, 2001.
- [46] Hall B. J. et Liebman J.B. : Are CEOs Really Paid Like Bureaucrats ?, The Quarterly Journal of Economics, Vol. CXIII, 3, Août 1998.
- [47] Caillaud B. et Jullien B.: Managerial Incentives Based on Insider Information, document de travail du Cepremap n°9128, 1991.
- [48] François-Eric Racicot et Raymond Théorêt : La simulation de Monte-Carlo : Forces et Faiblesses. Cahier de recherche 11-2006.
- [49] Boyle P.P. : Options : A Monte-Carlo Approach, Journal of Financial Economics, p 323-338, 1977.

TABLE DES MATIERES

REMERCIEMENTS.....	i
LISTE DES ABREVIATIONS.....	ii
LISTE DES TABLEAUX ET DES FIGURES.....	iii
SOMMAIRE	iv
RESUME	v
INTRODUCTION GENERALE.....	1
Chapitre I : THEORIE DES OPTIONS ET ELEMENTS DE CALCUL STOCHASTIQUE	7
Section 1 : FONDEMENTS POUR L'EVALUATION D'UNE OPTION	9
1-1 Valeur d'une option et ses déterminants.....	9
1-2 Equilibre arbitrage et efficience d'un marché financier	14
1-3 Limites d'arbitrage et relation call-put.....	16
1-4 Les stock-options	20
Section 2 : CALCUL STOCHASTIQUE ET EVALUATION DES PRODUITS DERIVES	25
2- 1 Propriété de Markov	25
2-2 Mouvement Brownien (ou processus de Wiener).....	26
2-3 Mouvement Brownien géométrique	27
2-4 Processus d'Ornstein Uhlenbeck	28
2-5 Lemme d'Itô	30
Section 3 : OPTIONS SUR INDICES BOURSIERS.....	35
3-1 Les options sur indices	35
Chapitre II : MODELE DE BLACK & SCHOLES.....	40
Section 1 : EVALUATION D'UNE OPTION AVEC LE MODELE DE BLACK & SCHOLES	42
1-1 Hypothèses et raisonnement d'arbitrage	42
1-2 Marche au hasard du prix d'un sous-jacent (actif financier)	42
1-3 Equation de Black & Scholes (couverture delta-neutre et absence d'arbitrage)	43
1-4 Equation de Black & Scholes avec la méthode risque-neutre	45
1-5 Conditions aux limites	46
1-6 Résolution de l'équation de Black & Scholes	47
1-7 Formule de Black & Scholes par raisonnement risque neutre	53
1-8 Valeur d'une option sur un sous-jacent payant des dividendes	55

Modélisation Stochastique pour l'Evaluation des Stock-options

1-9 Evaluation des options sur indices boursiers	56
Section 2 : VOLATILITE	57
2-1 Volatilité historique.....	57
2-2 Volatilité implicite	59
CHAPITRE 3 :VALORISATION DES STOCK-OPTIONS	62
Section 1 : ETAT DE L'ART	63
1-1 Etat des lieux des travaux effectués sur le sujet.....	63
1-2 Le modèle retenu	65
Section 2 : APPROCHE ANALYTIQUE	67
2-1 Description du modèle	72
2-2 Calcul de la valeur de l'option.....	74
Section 3 : APPROCHE PAR SIMULATION DE MONTE-CARLO.....	74
3-1 Préliminaire.....	75
3-2 Choix des méthodes de simulation	77
3-3 Simulations au cas par cas	80
3-4 Vitesse de convergence	82
Section 4 : RESULTATS ET COMMENTAIRES.....	82
4-1 Regroupement des individus par classes de risque.....	82
4-2 Estimation des paramètres pour l'exercice anticipé	83
4-3 Résultats et commentaires.....	85
Section 5 : LIMITES DU MODELE ET AMELIORATIONS POSSIBLES	93
CONCLUSION GENERALE	96
GLOSSAIRE.....	I
ANNEXE	VI
Annexe A : Calcul des sous-options.....	VI
A.1 Calcul du prix de l'option dans le scénario A.....	VI
A-2 Calcul du prix de l'option dans le scénario B	VII
A-3 Calcul du prix de l'option dans le scénario D	IX
A-4 Calcul du prix de l'option dans le scénario C	XII
Annexe B : Processus à intensité	XXIV
B-1 Processus de Cox	XXIV
B-2 Quelques outils mathématiques pour le calcul des sous-options.....	XXV
B-2-1 Exponentielle-gaussienne	XXV
B-2-2 Loi normale bivariée	XXV

Modélisation Stochastique pour l'Evaluation des Stock-options

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES	XXVI
TABLE DES MATIERES	XXIX

RESUME

Dans ce document, on examine l'évaluation juste du régime d'option d'achat d'actions des employés (ESO) dans le contexte de la comptabilité IFRS standard 2 [1].

On présente un modèle qui intègre les propriétés principales caractérisant les ESO, en particulier, la période d'indisponibilité, la probabilité de l'exercice volontaire tôt et l'obligation de s'exercer immédiatement si l'employé quitte la société. Une formule analytique est dérivée pour le prix d'ESO, et ses propriétés et sa sensibilité sont analysées en ce qui concerne les paramètres du modèle. Le modèle considéré est ensuite comparé au modèle de Black & Scholes qui est un modèle de référence pour la valorisation des options [4]. Des simulations de Monte-Carlo ont été utiles pour faciliter la comparaison, et valider le modèle [48].

Mots clés: stock-option, fair value, modélisation, processus stochastique, simulation de Monte-Carlo, modèle analytique, norme comptable.

ABSTRACT

In this document, we considered the fair valuation of Employee Stock Option (ESO) in the context of the accounting standard IFRS 2 [1].

We introduce a model that contains the main properties that characterizing the ESO, in particular, the vesting period, the likelihood of early voluntary exercise and the obligation to exercise immediately if the employee leaves the firm. We derive an analytic formula is derived for the price of ESO, and its properties and sensitivity are analyzed with respect to the model parameters. This one is then compared with the model of Black & Scholes which is a model of reference for the valorization of the options [4]. Simulations of Monte-Carlo were useful to us to facilitate the comparison and to validate the model [48].

Key words: stock-option, fair value, modeling, stochastic process, simulation of Monte-Carlo, analytical model, countable standard.