UNIVERSITE DE FIANARANTSOA
Ecole Normale Supérieure
Filière : MATHEMETIQUES

Mémoire de fin d'Etude pour l'obtention du :
Certificat d'Aptitude Pédagogique de l'Ecole Normale

(C.A.P.E.N.)

LA GEOMETRIE DANS L'ESPACE EN CLASSE SECONDAIRE

Présenté par : RAMAHERIJAONA Tony Haritsimba

Rapporteur : **Monsieur RASAMOEL Thierry**
Enseignant Chercheur à l'Ecole Normale Supérieure

Président de jury : **Monsieur RAKOTOSON Jean-Emile**
Maître de conférence à l'Ecole Normale Supérieure

Examinateur : **Monsieur RATSIMBAZAFY**
Enseignant Chercheur à l'Ecole Normale Supérieure

-Promotion 2006-

REMERCIEMENTS **5**

DEDICACE **6**

INTRODUCTION **7**

CHAP. I : IMPORTANCE DE LA GEOMETRIE DANS L'ESPACE **8**

1. BREF HISTORIQUE DE L'ENSEIGNEMENT DE LA GEOMETRIE DANS L'ESPACE A MADAGASCAR **9**

❖ **Espace vectoriel de dimension 3** **9**

❖ **Espace affine associé à un espace vectoriel de dimension 3** **9**

❖ **Les isométries vectorielles de E3 (où E3 étant un espace vectoriel euclidien de dimension 3 muni de la norme euclidienne) :** **9**

Rem arque **9**

❖ **Isométrie affines de ε_3 (où ε_3 désigne un espace affine euclidienne de dimension 3)** **9**

2. Son utilité : **10**

3. Sa place dans le programme scolaire : **10**

Programme scolaire en classe 1ère C : 10

a.notion de droite et de plans : 10

b.vecteur et point dans l'espace : 11

c.Etude analytique de droites et de plans : 12

Programme scolaire en classe terminal C : 12

CHAP. II : ELEMENTS DE GEOMETRIE DANS L'ESPACE **14**

1;**Quelques rappels de géométrie plane :** 15

a. Droite : 15

b.Point : 16

c.Produit scalaire de deux vecteurs : 16

2. Géométrie dans un espace de dimension 3 : 18

a. Plan 18

b. Droites : 20

c. Point : 24

d;Produit scalaire de deux vecteurs : 26

e. Produit vectoriel : 28

f. Produit mixte : 31

g. Double produit vectoriel : 33

3. Représentation de quelques corps physique dans l'espace : **34**

a. **Cube** : 34

b.**Equation du second degré :** 35

b. 1. Ellipsoïde : 36

b.2. Hyperboloïde : 39
b.3.**L'hyperboloïde à deux nappes :** 43

CHAP. III : PROPOSITION D'EXERCICES POUR 44

LES PREMIERES ANNEE........ 44

I. Intégrale triple :........ 45
a. En coordonnées cylindriques :........ 49
b. **En coordonnées sphériques :** 53
c. Application de l'intégrale triple à la physique :........ 57

II. PROPROSITION DES EXERCICES........ 59
a. Enoncés : 59
b. Solutions : 62

CONCLUSION........ 68

REMERCIEMENTS

Durant mon parcours dans la formation professionnalisante à l'Ecole Normale Supérieure de l'université de Fianarantsoa, j'ai été encadrée, aidée et soutenue par des collaborateurs compétents et dévoués.

Ainsi, je tiens d'abord à exprimer ma reconnaissance à Dieu tout puissant pour sa bénédiction.

J'exprime, par la suite ma profonde gratitude à touts les enseignants ainsi qu'au personnel administratif et technique de l'Ecole.

En particulier, je tiens à remercier :

- Monsieur RAKOTOSON Jean Emile, Directeur de l'ENS de Fianarantsoa qui m'a fait l'honneur d'accepter d'être président du Jury de ma soutenance de mémoire, malgré ses multiples occupations.
- Monsieur RATSIMBAZAFY, Enseignant chercheur de l'Ecole Normale Supérieure de Fianarantsoa, qui a bien voulu témoigner de l'intérêt pour ce travail et a accepté de siéger parmi les membres de Jury.
- Monsieur RASAMOEL Thierry, Enseignant chercheur de l'ENS de Fianarantsoa, qui s'est donné la peine de diriger se mémoire et qui n'a cessé de me donner des conseils pour l'amélioration de mon travail.

Je n'oublie pas de remercier ma famille qui a fourni tous les moyens possibles au cours de ma formation afin que je puisse mener à terme mes études.

Me remerciement s'adressent aussi à mes amis en particulier à Ravo et Victorine pour leurs soutient aussi bien moraux que pratique.

En fin, je suis très heureuse de pouvoir exprimer mes sentiments de gratitude envers tous ceux qui ont contribué de près ou de loin à la réalisations de ce mémoire.

DEDICACE

Je dédie ce mémoire à ma fille RAMAHERIJAONA Zara Ifaliana

INTRODUCTION

Bien que la géométrie dans l'espace figure toujours dans les programmes officiels de première et terminale C, on ne l'enseigne plus dans ces classes depuis longtemps. D'ailleurs dans les sujets de mathématiques qu'on donne actuellement à l'examen du baccalauréat scientifique, on ne rencontre que des problèmes de géométrie plane, si bien que l'élève lui-même ne ressent nullement la nécessité de connaître cette partie du programme.

Autrement dit, le bachelier malgache en arrivant à l'Université n'a pas la moindre idée de ce qu'est l'espace à trois dimensions.

Les conséquences sont fort négatives : en effet, en première année scientifique de l'Université, que ce soit en physique ou en mécanique ou dans d'autres disciplines, on travaille surtout en dimension trois.

Tout ceci nous a incité à rédiger le présent mémoire qui a pour objet l'enseignement de la géométrie dans l'espace. En premier chapitre, nous évoquons son importance et décrivons les différents points du programme.

Le deuxième chapitre du mémoire donne les notions essentielles de géométrie dans l'espace nécessaire à un futur universitaire.

Dans le troisième chapitre, nous proposons une série d'exercices que nous jugeons utiles afin que l'élève puisse vérifier sa compréhension et en même temps renforcer ses connaissances.

Chap. I : IMPORTANCE DE LA GEOMETRIE DANS L'ESPACE

1.BREF HISTORIQUE DE L'ENSEIGNEMENT DE LA GEOMETRIE DANS L'ESPACE A MADAGASCAR

En effectuant quelques enquêtes auprès d'anciens professeurs, nous avons appris que dans les années 70, le programme de mathématiques de 1er C et D comportait les points suivants :

❖ **Espace vectoriel de dimension 3**

Dans ce chapitre, on donne les définitions de partie génératrice, partie libre, base, etc…

On parle aussi des sous espaces vectoriels d'un espace vectoriel de dimension 3(droite vectorielle, plan vectoriel).

❖ **Espace affine associé à un espace vectoriel de dimension 3**

- Plans dans l'espace affine ε_3 : équation, vecteur normal à un plan, condition de parallélisme de deux plans, etc…

- Droite dans l'espace : équation, représentation paramétrique, vecteur directeur d'une droite, etc…

Toujours dans les années 70, le programme de mathématiques de terminal C comprenait entre autres :

❖ **Les isométries vectorielles de E3 (où E3 étant un espace vectoriel euclidien de dimension 3 muni de la norme euclidienne) :**

- les symétries vectorielles, propriétés
- les rotation vectorielles, propriétés
- orientation de E_3
- le produit vectoriel

Rem arque

Ici évidemment, les élèves sont déjà initiés au calcul du déterminant d'ordre 3 ainsi qu'à la théorie des matrices (ce qui n'est pas le cas actuellement !)

❖ **Isométrie affines de ε_3 (où ε_3 désigne un espace affine euclidienne de dimension 3)**

- définitions
- déplacements de ε_3: translation, rotation affine, vissages (où déplacement hélicoïdaux), propriétés
- traduction analytique d'une rotation de ε_3
- antidéplacement de ε_3 : symétries orthogonales

Vers les années 80, tout ce que nos venons de citer a disparus complètement du programme. Notons que les programmes scolaires officiels sont élaborés par une « Unité d'Etude et de Recherche de Programme » (UERP). Ces programmes sont construits en fonctions des objectifs à atteindre et selon les réalités de l'époque.

Ce n'est qu'en 1995 que la géométrie dans l'espace réapparaît dans le programme du secondaire plus précisément de la Terminal C et en 1997 on peut aussi la trouver dans le programme de 1er C

2. Son utilité :

Actuellement, on n'étudie pas la géométrie dans l'espace en classe secondaire ; or ce chapitre à notre avis est très utile, nous vivons nous-même dans un espace à 3 dimensions.

D'autre part, les connaissances en géométrie dans l'espace sont nécessaires lorsqu'on veut approfondir d'autre discipline comme la mécanique, la physique.

Ainsi par exemple en mécanique : quand on étudie le mouvement d'un point, on l'étudie dans l'espace à trois dimension.

3. Sa place dans le programme scolaire :

Programme scolaire en classe 1ère C :

Normalement, on devra enseigner la dimension 3 en classe de première C au lycée, mais très souvent, faute de temps le professeur ne traite pas cette partie.

Etudions ci après les notions de géométrie dans l'espace qui figurent facilement dans le programme de première C.

a. notion de droite et de plans :

Ce sous chapitre a pour objectifs généraux la capacité des élèves :

- d'acquérir les notions de points, de droites et de plan dans l'espace physique.
- de connaître certaines propriétés des points, droites et plans.
- d'utiliser ces propriétés à la résolution de problème simple de géométrie dans l'espace.

Ce premier sous chapitre comprend :

- la description et représentation de l'espace physique

- l'étude des positions relatives des droites et plans (définition et propriétés)
- la notion d'orthogonalité.

Quand on a fini ce paragraphe, les élèves devraient être capable :

d'imaginer un point, une droite et un plan dans l'espace physique,

de donner une représentation plane des points, des droites et des plans,

de reconnaître une configuration donnée dans l'espace comme :

des droites parallèles,

des plans parallèles,

une droite et un plan parallèle,

des droites et/ou des plans perpendiculaires.

b. <u>vecteur et point dans l'espace :</u>

- vecteur de l'espace :
  - définition,
  - opérations,
  - base,
  - repérage d'un point dans l'espace.
- produit scalaire :
  - définition,
  - propriétés,
  - bases orthogonales,
  - bases orthonormées
  - expression analytique dans une base orthonormée
  - repère orthonormé.

Objectif généraux de ce sous chapitre : les élèves sont capable :

- d'effectuer des calculs vectoriels et analytique relatif à l'espace physique,
- ils peuvent donner une interprétation géométrique des resultats de ces calculs.

Après ce paragraphe, l'élève doit être capable :

d'écrire une combinaison linéaire de vecteurs donnés et de vecteurs donnés comme combinaison linéaire de trois vecteurs de base.

de déterminer les composantes d'un vecteur suivant une base donnée.

de lire les coordonnées d'un point donné dans l'espace muni d'un repère et représenter dans un repère un point dont on connaît les coordonnées.

de justifier la colinéarité et l'orthogonalité de deux vecteurs dont on connaît les composantes dans une base orthonormée.

de calculer les composantes de vecteur $\overrightarrow{AB}$ et calculer la distance AB.

de déterminer les coordonnés du milieu I du segment $[AB]$.

de dessiner dans un repère donné la somme de deux vecteurs donnés et la représentation du vecteur produit d'un vecteur donné.

c. Etude analytique de droites et de plans :

C'est la dernière sous chapitre dans la géométrie dans l'espace de première C. Il a pour buts généraux la capacité des élèves de savoir utiliser l'outil vectoriel comme support de l'étude analytique de droite et de plan de l'espace physique.

Cette partie contient ;

la caractérisation vectorielle d'une droite et d'un plan

la représentation paramétrique et cartésienne

vecteur normal à un plan

distance d'un point à un plan

étude analytique du parallélisme et d'orthogonale de droites ou de plans

A la fin de cette étude, les élèves doivent savoir :

écrire des représentations paramétriques et cartésiennes d'une droite et d'un plan définis de plusieurs façons

déduire une représentation cartésienne d'une droite et d'un plan à partir d'une représentation paramétrique (et réciproquement)

étudier analytiquement les positions relatives des droites et/ou des plans.

de reconnaître un vecteur normal a un plan d'équation (cartésienne ou paramétrique) donnée.

de calculer la distance d'un point A (a, b) à la droite d'équation : $ax + by + cz = 0$.

résoudre analytiquement des problèmes de parallélisme et d'orthogonalité de droites et/ou de plans de l'espace physique.

Programme scolaire en classe terminal C :

En classe de terminal C, il n'y a pas de programme précis pour l'étude de la géométrie dans l'espace. Mais il y a seulement quelques instructions pour que les nouveaux bacheliers aient des notions sur la dimension.

On ne ferra aucune théorie, l'essentiel est que les élèves sachent analyser et interpréter une situation et aient le minimum sur l'espace de dimension trois.

Les élèves en terminal doivent maîtriser les notions de translations, l'homothétie, symétrie orthogonales par rapport à un plan ; par rapport à une droite.

Normalement, le professeur dispose environ cinq semaines, soit 25 heures pour enseigner la géométrie dans l'espace en première C. Mais en réalité, on n'arrive jamais à cette partie là du programme soit par faute de temps, soit par pure négligence.

Le même problème se pose en classe de terminale. Ici les enseignants et les élèves savent qu'on ne donnera jamais de sujet de géométrie dans l'espace à l'examen du baccalauréat, ainsi ils délaissent complètement ce chapitre. Mais les problèmes surviennent dès que l'élève, après avoir réussi son baccalauréat, veut poursuivre ces études en filières scientifiques à l'Université.

Notons qu'une des raisons qu'il convient d'évoquer aussi est le fait que nous nous referons trop fidèlement au programme d'enseignement Français sans tenir compte de nos spécificité ce qui est vraiment regrettable.

Pour conclure, soulignons encore une fois, comme nous l'avons évoqué plus haut, les problèmes apparaissent en première année de l'Université.

En classe scientifique (mathématiques, physiques, E.N.S.) les professeurs sont obligés de consacrer plusieurs heures pour faire des rappels voire des séances de remise à niveau, ce qui occasionne beaucoup de perte de temps vu le contenu du programme des matières scientifique à l'Université.

.

Chap. II : ELEMENTS DE GEOMETRIE DANS L'ESPACE

Dans ce chapitre nous donnons un exposé élémentaire des notions essentielles de géométrie dans l'espace que doit connaître un étudiant en 1ère année scientifique. Nous insisterons un peut sur le produit vectoriel et le produit mixte de trois vecteurs ainsi que leur signification géométrique car souvent, les étudiants ont tendance à les oublier.

Quelques rappels de géométrie plane :

a. Droite :

Une droite est représentée par une équation du premier degré à deux inconnues :

$(D): ax + by + c = 0$

a.1. Droites parallèles :

Soit $(D): ax + by + c = 0$ de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$

$(D'): a'x + b'y + c' = 0$ de vecteur directeur $\vec{v}\begin{pmatrix} -b' \\ a' \end{pmatrix}$

Deux droites (D) et (D') sont parallèles si et seulement si le déterminant de leur vecteur directeur sont nuls (c'est à dire leurs coefficients sont proportionnels)

$$(D)//(D') \Leftrightarrow \det(\vec{u},\vec{v}) = 0$$
$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} -b & -b' \\ a & a' \end{vmatrix} = -ba' + b'a = 0$$
$$\Leftrightarrow b'a = ba'$$
$$\Leftrightarrow \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}$$

Remarque :

Si $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$ alors les deux droites sont confondues.

a.2. droites perpendiculaires :

Soit $(D''): a''x + b''y + c'' = 0$ de vecteur directeur $\vec{w}\begin{pmatrix} -b'' \\ a'' \end{pmatrix}$

Deux droites (D) et (D'') sont perpendiculaire si et seulement si le produit scalaire de leurs vecteurs directeurs est nul.

$$(D) \perp (D'') \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{w} = 0$$
$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -b'' \\ a'' \end{pmatrix} = 0$$
$$\Leftrightarrow bb'' + aa'' = 0$$

a.3. Demi-droite :

Une demi-droite est caractérisée par une équation et une inéquation de la forme :

$$\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ a'x + b'y + c' \succ 0 \end{cases} \quad \text{avec } a \neq a' \text{ et/ou } b \neq b'$$

Pour déterminer le point d'origine de la demi-droite on remplace les signe de l'inégalité ($\succ$) par un signe d'égalité.

b. <u>Point :</u>

Il est représenté par un système d'équations du premier degré :

$$\begin{cases} x = a \\ y = b \end{cases} a, b \in \mathbf{R}$$

On peut avoir un point par l'intersection de deux droites non parallèles

$$\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ a'x + b'y + c' = 0 \end{cases}$$

Pour déterminer les coordonnées du point, on résout ce système.

c.<u>Produit scalaire de deux vecteurs :</u>

On appelle produit scalaire de deux vecteurs, le nombre égal au produit des modules de ces vecteurs par le cosinus de l'angle de ces vecteurs.

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs,

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cos\theta \text{ où } \theta = mes\left(\vec{u}, \vec{v}\right)$$

c.1. Propriétés algébriques :

- Commutativité

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$$

- Associativité

$(\alpha\vec{u})\cdot\vec{v}=\alpha(\vec{u}\cdot\vec{v})$
$(\alpha\vec{u})\cdot(\beta\vec{v})=\alpha\beta(\vec{u}\cdot\vec{v})$

- Distributivité par rapport à l'addition

$\vec{u}(\vec{v}+\vec{w})=\vec{u}\vec{v}+\vec{u}\vec{w}$

c.2. Propriétés géométriques :

- Si $\cos\theta \succ 0$ c'est à dire $0\prec\theta\prec\frac{\pi}{2}$ alors $\vec{u}\cdot\vec{v}=|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cos\theta\succ 0$
- Si $\cos\theta\prec 0$ c'est à dire $\frac{\pi}{2}\prec\theta\prec\pi$ alors $\vec{u}\cdot\vec{v}=|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cos\theta\prec 0$
- Si $|\cos\theta|=1$ c'est à dire $\theta=0[\pi]$ alors $\vec{u}\cdot\vec{v}=|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|$ ($\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires)
- Si $\cos\theta=0$ c'est à dire $\theta=\frac{\pi}{2}[\pi]$ alors $\vec{u}\cdot\vec{v}=|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cos\theta=0$
- Si $|\vec{u}\cdot\vec{v}|=0$ alors $\cos\theta=0$ ou $\vec{u}=\vec{0}$ ou $\vec{v}=\vec{0}$

Si $\vec{u}\neq\vec{0}$ et $\vec{v}\neq\vec{0}$
$\vec{u}\cdot\vec{v}=0\Leftrightarrow\vec{u}\perp\vec{v}$

- $\vec{u}\cdot\vec{u}=|\vec{u}|^2$ c'est le carré scalaire de $\vec{u}$

c.3. expression analytique :

Soit $\Re(o,\vec{i},\vec{j})$ un repère orthonormé

Soit

$\vec{u}=x\vec{i}+y\vec{j}$
$\vec{v}=x'\vec{i}+y'\vec{j}$

$$(\vec{u}\cdot\vec{v})=(x\vec{i}+y\vec{j})(x'\vec{i}+y'\vec{j})$$
$$=xx'(\vec{i}\cdot\vec{i})+xy'(\vec{i}\cdot\vec{j})+yx'(\vec{j}\cdot\vec{i})+yy'(\vec{j}\cdot\vec{j})$$

Or les propriétés géométriques précédentes nous informe que :

Si $\theta=\frac{\pi}{2}$ alors $\vec{i}\cdot\vec{j}=0$ et $\vec{j}\cdot\vec{i}=0$

Et $\theta=0$ alors $|\vec{i}\cdot\vec{i}|=|\vec{i}|^2=1$ et $|\vec{j}\cdot\vec{j}|=|\vec{j}|^2=1$

Donc $\boxed{\vec{u} \cdot \vec{u} = xx' + yy'}$

2. Géométrie dans un espace de dimension 3 :

Désignons par $\Re\left(o, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ un repère orthonormé direct de dimension 3

a. Plan

Un plan est représenté par une équation du premier degré à trois inconnues :

$(\mathscr{P}):\ ax + by + cz + d = 0$

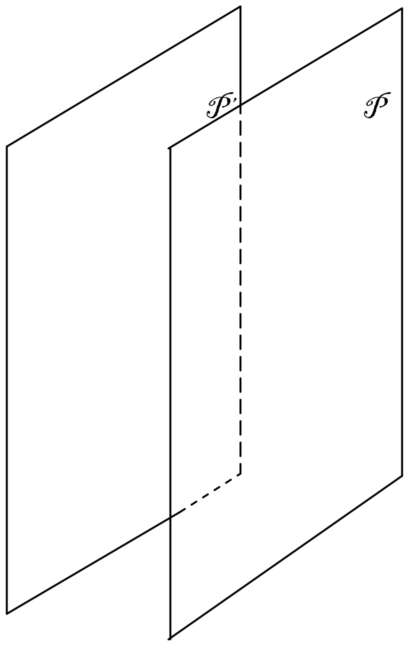
a.1. Plan parallèle :

Soient $(\mathscr{P}):\ ax + by + cz + d = 0$ de vecteur normal $\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$

$(\mathscr{P}'):\ a'x + b'y + c'z + d' = 0$ de vecteur normal $\vec{v}\begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}$

$(\mathscr{P})$ et $(\mathscr{P}')$ sont parallèles si et seulement si leurs vecteurs normaux sont colinéaires (c'est à dire leurs coefficients sont proportionnels).

$(\mathscr{P}) // (\mathscr{P}') \Leftrightarrow \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$



Remarque :

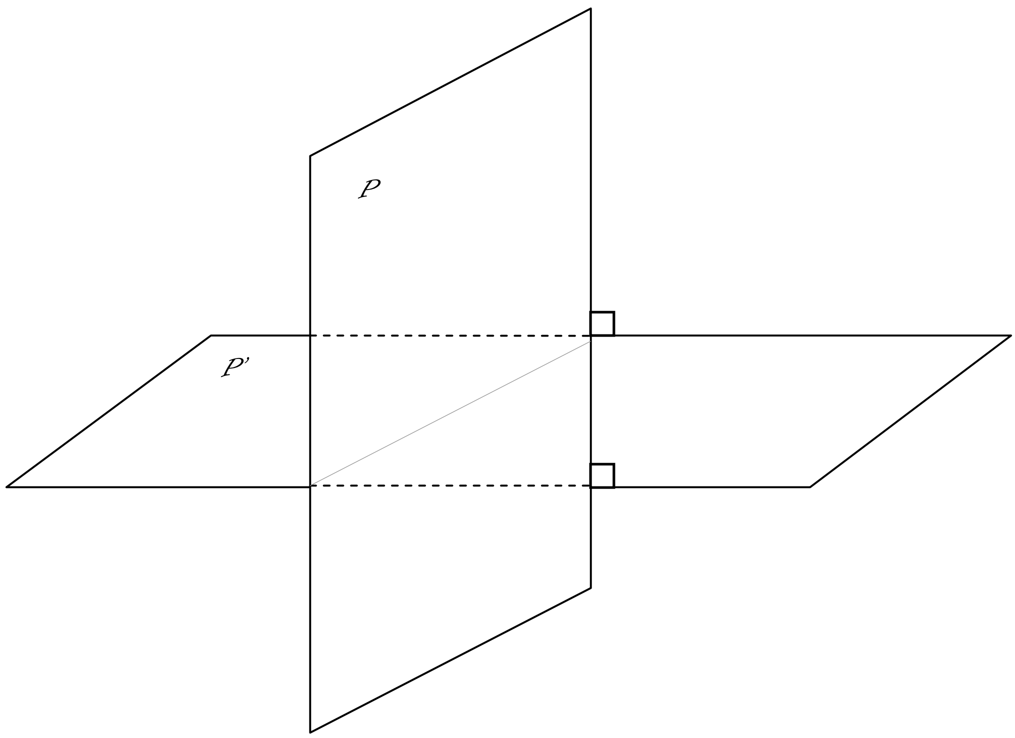
Si $d \neq 0$ et $\dfrac{a}{a'} = \dfrac{b}{b'} = \dfrac{c}{c'} = \dfrac{d}{d'}$ alors les deux plans sont confondus

a.2. Plans perpendiculaires :

Soit $(\mathcal{P}'')$: $a''x + b''y + c''z + d'' = 0$ de vecteur normal $\vec{w}\begin{pmatrix} a'' \\ b'' \\ c'' \end{pmatrix}$

$(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{P}'')$ sont perpendiculaires si et seulement si le produit scalaire de leurs vecteurs normaux est nul.

$$\begin{aligned}(\mathcal{P}) \perp (\mathcal{P}'') &\Leftrightarrow \vec{u} \perp \vec{w} \\ &\Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{w} = 0 \\ &\Leftrightarrow aa'' + bb'' + cc'' = 0\end{aligned}$$



b. Droites :

Dans l'espace, une droite est l'intersection de deux plans non parallèles. Elle est définie par un système d'équation du premier degré de la forme :

$$\begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases}$$

Pour que ce système définisse une droite, il faut et il suffit que les coefficients de l'une des équations ne soient pas proportionnels à ceux de l'autre.

b.1. Droite et plan perpendiculaire :

Une droite *(D)* est perpendiculaire à un plan *(P)* si et seulement si le vecteur directeur $\vec{u}$ de la droite est parallèle au vecteur normal $\vec{v}$ du plan ; c'est à dire leurs coefficients sont proportionnels.

$$\vec{u}\begin{pmatrix} l \\ m \\ n \end{pmatrix} ; \vec{v}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

$(\mathcal{D}) \perp (\mathcal{P}) \Leftrightarrow \vec{u} \,//\, \vec{v}$

$$\Leftrightarrow \frac{l}{a} = \frac{m}{b} = \frac{n}{c}$$

b.2. Droite et plan parallèles :

Soit $(\mathcal{D})$ une droite de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $(\mathcal{P})$ un plan de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$

$(\mathcal{D})$ et $(\mathcal{P})$ sont parallèles si et seulement si $\vec{u}$ et $\vec{n}$ perpendiculaires

$(\mathcal{D}) // (\mathcal{P}) \Leftrightarrow \vec{u} \perp \vec{n}$

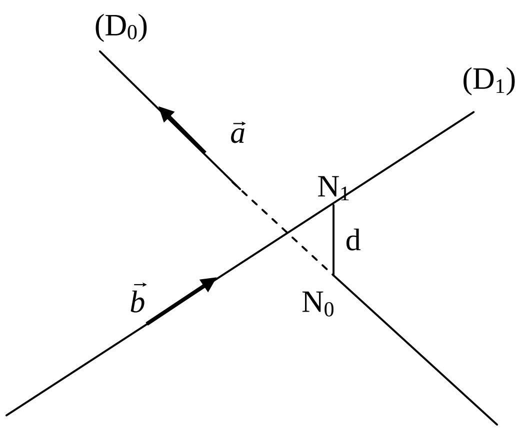
$$\Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{n} = 0$$
$$\Leftrightarrow xx' + yy' + zz' = 0$$

Remarques :

Deux droites non parallèles mais elles ne possèdent pas aucun point d'intersection.

En effet :

Soit D_0 et D_1 deux droites non parallèles qui ne sont pas dans un même plan. On veut calculer la plus petite distance entre ces deux droites



Les équations de ces deux droites sont données : $(D_0): \dfrac{x-x_0}{l} = \dfrac{y-y_0}{m} = \dfrac{z-z_0}{n}$

avec $M_0\left(x_0, y_0, z_0\right) \in D_0$

et $\vec{a}\left(l, m, n\right)$: vecteur directeur de D_0

$\left(D_1\right): \dfrac{x-x_1}{l_1} = \dfrac{y-y_1}{m_1} = \dfrac{z-z_1}{n_1}$ avec $M_1\left(x_1, y_1, z_1\right) \in D_1$

et $\vec{b}\left(l_1, m_1, n_1\right)$: vecteur directeur de D_1

Il existe un point N_0 appartenant à D_0 et un point N_1 appartenant à D_1 tels que la droite N_0N_1 est perpendiculaire à D_0 et à D_1.

La distance qu'on veut calculer est donc égale à $\left|\overrightarrow{N_0N_1}\right|$.

Considérons le produit mixte : $\left(\overrightarrow{M_0M_1}\vec{a}\vec{b}\right)$.

Remarquons que ce produit mixte ne change pas si on remplace M_0 par un point quelconque appartenant à la droite $\left(D_0\right)$ et M_1 par un point quelconque appartenant à la droite $\left(D_1\right)$. En effet :

Soit $M_0' \in (D_0)$ et $M_1' \in \left(D_1\right)$

On a : $\overrightarrow{M_0'M_1'} = \overrightarrow{M_0'M_0} + \overrightarrow{M_0M_1} + \overrightarrow{M_1M_1'}$

$$= \lambda\vec{a} + \overrightarrow{M_0M_1} + \beta\vec{b}$$

(car $\vec{a}$ et $\overrightarrow{M_0'M_0}$ sont colinéaires et $\vec{b}$ et $\overrightarrow{M_1M_1'}$ sont aussi colinéaires)

D'où : $\left(\overrightarrow{M_0M_1}\vec{a}\vec{b}\right) = \left(\lambda\vec{a} + \overrightarrow{M_0M_1} + \beta\vec{b}, \vec{a}, \vec{b}\right)$

$$= \left(\lambda\vec{a}, \vec{a}, \vec{b}\right) + \left(\overrightarrow{M_0M_1}, \vec{a}, \vec{b}\right) + \left(\beta\vec{b}, \vec{a}, \vec{b}\right) \text{(Propriété de produit mixte)}$$

$$= \left(\overrightarrow{M_0M_1}, \vec{a}, \vec{b}\right)$$

Le point $N_0 \in (D_0)$ et $N_1 \in \left(D_1\right)$

$$\Rightarrow \left(\overrightarrow{M_0M_1}, \vec{a}, \vec{b}\right) = \left(\overrightarrow{N_0N_1}, \vec{a}, \vec{b}\right) = \overrightarrow{N_0N_1} \cdot \left(\vec{a} \wedge \vec{b}\right)$$

Or les vecteurs $\overrightarrow{N_0N_1}$ et $\left(\vec{a} \wedge \vec{b}\right)$ son colinéaires, c'est à dire

Posons $\vec{v} = \overrightarrow{N_0N_1}$ et $\vec{u} = \vec{a} \wedge \vec{b}$

On a $\vec{v}\cdot\vec{u}=\vec{v}\cdot c\vec{v}$

$$=c\left(\vec{v}\cdot\vec{v}\right)$$
$$=c\left|\vec{v}\right|^{2}$$
$$=\left|\vec{v}\right|\times\pm\left|c\right|\left|\vec{v}\right|$$
$$=\pm\left|\vec{v}\right|\times\left|\vec{u}\right|$$

+ ou – selon le signe de c

$$\Rightarrow \overrightarrow{N_0N_1}\cdot\left(\vec{a}\wedge\vec{b}\right)=\pm\left|\overrightarrow{N_0N_1}\right|\times\left|\vec{a}\wedge\vec{b}\right|$$

$$\Rightarrow \left(\overrightarrow{M_0M_1},\vec{a},\vec{b}\right)=\pm\left|\overrightarrow{N_0N_1}\right|\times\left|\vec{a}\wedge\vec{b}\right|$$

$$\Rightarrow \left|\left(\overrightarrow{M_0M_1},\vec{a},\vec{b}\right)\right|=\left|\overrightarrow{N_0N_1}\right|\times\left|\vec{a}\wedge\vec{b}\right|$$

$$\Rightarrow \boxed{\left|\overrightarrow{N_0N_1}\right|=\frac{\left|\left(\overrightarrow{M_0M_1},\vec{a},\vec{b}\right)\right|}{\left|\vec{a}\wedge\vec{b}\right|}}$$

C'est la formule qui donne la distance entre deux droites $\left(D_0\right)$ et $\left(D_1\right)$

Application :

Calculer la distance d entre les deux droites d'équations

$$\left(D_0\right):\ \frac{x}{1}=\frac{y-3}{1}=\frac{z-2}{1}$$

et $\left(D_1\right):\ \dfrac{x-3}{1}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z-2}{1}$

et soit : $\vec{a}\left(1,1,1\right)$ vecteur directeur de $\left(D_0\right)$ et $M_0\left(0,3,2\right)\in D_0$

$\vec{b}\left(1,2,1\right)$ vecteur directeur de $\left(D_1\right)$ et $M_1\left(3,-1,2\right)\in D_1$

On a $\vec{a}\wedge\vec{b}=-\vec{i}+\vec{k}$ et $\overrightarrow{M_0M_1}=3\vec{i}-4\vec{j}$

Ainsi : $\left|\left(\overrightarrow{M_0M_1},\vec{a},\vec{b}\right)\right|=\left|-3\right|=3$

$\left|\vec{a}\wedge\vec{b}\right|=\sqrt{2}$

$$\Rightarrow d = \frac{\left|\left(\overrightarrow{M_0M_1}, \vec{a}, \vec{b}\right)\right|}{\left|\vec{a} \wedge \vec{b}\right|} = \frac{3}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow d = \frac{3}{\sqrt{2}}$$

b.3. Equation canonique et paramétrique d'une droite :

Soit $\vec{a}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ un vecteur directeur d'une droite $(\mathcal{D})$

Soient deux points $M\left(x, y, z\right)$ et $M'\left(x', y', z'\right)$ appartenant à $(\mathcal{D})$

Ainsi $\vec{a}$ et $\overrightarrow{MM'}$ sont colinéaires

C'est à dire $\frac{x-x'}{a} = \frac{y-y'}{b} = \frac{z-z'}{c}$

C'est l'équation canonique d'une droite

L'équation paramétrique peut être définie comme suit :

$$\frac{x-x'}{a} = \frac{y-y'}{b} = \frac{z-z'}{c} = t$$

$$\begin{cases} x = x' + at \\ y = y' + bt \\ z = z' + ct \end{cases}$$

Ce sont les équations paramétriques d'une droite désigné par $\vec{a}\left(a, b, c\right)$ et passant par $M'\left(x', y', z'\right)$

c. Point :

- Un point est caractérisé par un système d'équations du premier degré :

$$\begin{cases} x = a \\ y = b \\ z = c \end{cases} \qquad a, b, c \in \mathbb{R}$$

- On peut déterminer aussi un point par l'intersection de 3 plans non parallèles ou par une droite et un plan.

Exemples :

- $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$ représente l'origine $O(0,0,0)$ d'un repère

- Soit 3 plans d'équations :

$x - y + 2 = 0;$

$x + 2y - 1 = 0;$

$x + y - z + 2 = 0.$

Formons ces trois équations en un système d'équation :

$$\begin{cases} x - y = -2 \\ x + 2y = 1 \\ x + y - z = -2 \end{cases}$$

Cherchons x, y et z

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -1 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -3$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \end{vmatrix} = -1 \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \end{vmatrix} = -1 \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -3$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -6$$

$$x = \frac{\Delta x}{\Delta} = -1$$

$$y = \frac{\Delta y}{\Delta} = 1$$

$$z = \frac{\Delta z}{\Delta} = 2$$

Le point d'intersection de ces 3 plans est $A(-1,1,2)$. On a aussi le point $A(-1,1,2)$ comme l'intersection de droite de système d'équation $\begin{cases} x-y+2=0 \\ x+2y-1=0 \end{cases}$ et le plan d'équation $x+y-z=-2$

d. Produit scalaire de deux vecteurs :

Soient deux vecteurs $\vec{u}(a,b,c)$ et $\vec{v}(a',b',c')$

Comme dans le plan, le produit scalaire de deux vecteurs est égal au produit de leurs modules par le cosinus de l'angle de ces deux vecteurs.

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cos\theta \text{ où } \theta=mes(\vec{u},\vec{v})$$

d.1. Propriétés algébrique :

On a toujours la même propriété qu'en géométrie plane

- Commutativité :

$\vec{u}\cdot\vec{v}=\vec{v}\cdot\vec{u}$

- Associativité :

$(a\vec{u})\cdot\vec{v}=a(\vec{u}\cdot\vec{v})$

$(a\vec{u})\cdot(b\vec{v})=ab(\vec{u}\cdot\vec{v})$

- Distributivité par rapport à l'addition :

$\vec{u}(\vec{v}+\vec{w})=\vec{u}\vec{v}+\vec{u}\vec{w}$

d.2. Propriétés géométriques :

Soit $\theta=mes(\vec{u},\vec{v})$

- Si $0\prec\theta\prec\frac{\pi}{2}$ alors $\vec{u}\cdot\vec{v}\succ 0$

c'est à dire $\cos\theta\succ 0$ $|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cos\theta\succ 0$

- Si $\frac{\pi}{2}\prec\theta\prec\pi$ alors $\vec{u}\cdot\vec{v}\prec 0$

c'est à dire $|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cos\theta\prec 0$

- Si $\vec{u}\neq 0$ et $\vec{v}\neq 0$

$\vec{u}\cdot\vec{v}=0 \Leftrightarrow \vec{u}\perp\vec{v}$ c'est à dire $\theta=\frac{\pi}{2}[\pi]$

- Si $\theta\equiv 0[\pi]$ alors $\vec{u}\cdot\vec{v}=|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|$
- $\vec{u}\cdot\vec{u}=|\vec{u}|^2$ qui est le carré scalaire de $\vec{u}$

d. 3 Expressions analytiques

Soient $\vec{u}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$ et $\vec{v}=x'\vec{i}+y'\vec{j}+z'\vec{k}$

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=\left(x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}\right)\left(x'\vec{i}+y'\vec{j}+z'\vec{k}\right)$$
$$=xx'\left(\vec{i}\cdot\vec{i}\right)+xy'\left(\vec{i}\cdot\vec{j}\right)+xz'\left(\vec{i}\cdot\vec{k}\right)+yx'\left(\vec{j}\cdot\vec{i}\right)+yy'\left(\vec{j}\cdot\vec{j}\right)+yz'\left(\vec{j}\cdot\vec{k}\right)+zx'\left(\vec{k}\cdot\vec{i}\right)+zy'\left(\vec{k}\cdot\vec{j}\right)+zz'\left(\vec{k}\cdot\vec{k}\right)$$

Or notre repère est orthonormé et quand $\theta=\frac{\pi}{2}$ alors le produit scalaire est nul ; si $\theta=0[\pi]$ alors le produit scalaire est égal au produit des modules.

Donc

$$\vec{i}\cdot\vec{i}=|\vec{i}|^2=1$$
$$\vec{j}\cdot\vec{j}=|\vec{j}|^2=1$$
$$\vec{k}\cdot\vec{k}=|\vec{k}|^2=1$$

et

$$\vec{i}\cdot\vec{j}=\vec{j}\cdot\vec{i}=0$$
$$\vec{j}\cdot\vec{k}=\vec{k}\cdot\vec{j}=0$$
$$\vec{k}\cdot\vec{i}=\vec{i}\cdot\vec{k}=0$$

Ainsi on a $\vec{u}\cdot\vec{v}=xx'+yy'+zz'$

Remarque :

Pour chercher l'angle qui fait le 2 vecteurs, on a :

$$|\vec{u}\cdot\vec{v}|=|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cos\theta$$
$$\Rightarrow \cos\theta=\frac{|\vec{u}\cdot\vec{v}|}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|}$$
$$\cos\theta=\frac{xx'+yy'+zz'}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}\times\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}}$$

d.4. Signification physique de produit scalaire

Soit $\vec{I}$ la force qui exerce sur un corps et (Ox) l'axe qui dirige le déplacement.

On a

$$W_{\vec{F}} = \vec{F} \cdot \overrightarrow{Ox}$$
$$= |F| \cdot |Ox| \cos\left(\overrightarrow{Ox}, \vec{F}\right)$$

Ainsi le travail fourni par une force $\vec{F}$ est égal au produit scalaire de la force par le déplacement.

e. <u>Produit vectoriel</u> :

On appelle produit vectoriel de vecteur $\vec{u}$ et $\vec{v}$, noté $\vec{u} \wedge \vec{v}$, le vecteur $\vec{B}$ défini par les trois conditions suivantes :

- $\vec{u} \wedge \vec{v}$ a pour module égal à $|\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \sin\theta$ avec $\theta = mes\left(\vec{u}, \vec{v}\right)$
- $\vec{B}$ est le perpendiculaire à la fois à $\vec{u}$ et à $\vec{v}$
- On détermine le sens de $\vec{B}$ par la règle de trois doigts de la main droite.

Remarque :

Règle des trois doigts de la main droite :

Soient $\vec{a}$, $\vec{b}$ et $\vec{c}$ trois vecteurs dont $\vec{a}$ le premier vecteur, $\vec{b}$ le second vecteur et $\vec{c}$ le troisième vecteur tel que $\vec{c} = \vec{a} \wedge \vec{b}$. Pour déterminer le sens de $\vec{a} \wedge \vec{b}$, on utilise les trois doigts (le pousse, l'index et le majeur) de la main droite tel que les troisièmes vecteurs soit de sens direct (c'est à dire ils suivent le sens contraire d'un aiguille d'une montre).

e.1. Propriété algébrique :

Anticommutativité :

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = -\vec{v} \wedge \vec{u}$$

Associativité par rapport au facteur scalaire :

$$a\vec{u} \wedge \vec{v} = a\left(\vec{u} \wedge \vec{v}\right)$$
$$\left(a\vec{u}\right) \wedge \left(b\vec{v}\right) = ab\left(\vec{u} \wedge \vec{v}\right) \forall a, b \in \mathbf{R}$$

Distributivité par rapport à l'addition :

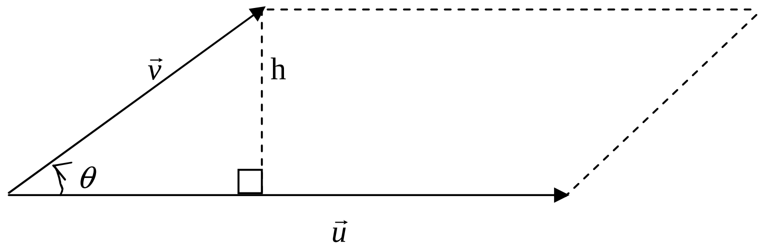
$$\vec{u} \wedge \left(\vec{v} + \vec{w}\right) = \left(\vec{u} \wedge \vec{v}\right) + \left(\vec{u} \wedge \vec{w}\right)$$

e.2. Propriété géométrique :

Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires alors $|\vec{u}\wedge\vec{v}| = |\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\sin\theta = 0$ c'est à dire $\theta = 0[\pi]$.

Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non colinéaires alors $|\vec{u}\wedge\vec{v}|$ est égal à l'aire d'une parallélogramme formée par $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

On sait dans les classes antérieures que la surface d'un parallélogramme est égale au longueur multiplié par le hauteur.



$S = |\vec{u}|\times h$

$h = |\vec{v}|\times \sin\theta$

$\Rightarrow S = |\vec{u}|\times|\vec{v}|\times\sin\theta$

Où $\theta = mes(\vec{u},\vec{v})$

Or $\vec{u}\wedge\vec{v} = |\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\sin(\vec{u},\vec{v})$

Si $\theta = \dfrac{\pi}{2}$ alors le parallélogramme est un rectangle

- $\vec{u}\wedge\vec{v} = |\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\sin 0 = 0$ avec u et v sont colinéaires

e.3. Expression analytique :

Soit $\Re(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ un repère orthonormé directe

Soient $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ et $\vec{v} = x'\vec{i} + y'\vec{j} + z'\vec{k}$

$$\begin{aligned}\vec{u}\wedge\vec{v} &= xx'\left(\vec{i}\wedge\vec{i}\right)+xy'\left(\vec{i}\wedge\vec{j}\right)+xz'\left(\vec{i}\wedge\vec{k}\right)\\ &+yx'\left(\vec{j}\wedge\vec{i}\right)+yy'\left(\vec{j}\wedge\vec{j}\right)+yz'\left(\vec{j}\wedge\vec{k}\right)\\ &+zx'\left(\vec{k}\wedge\vec{i}\right)+zy'\left(\vec{k}\wedge\vec{j}\right)+zz'\left(\vec{k}\wedge\vec{k}\right)\end{aligned}$$

Or $\vec{i}\perp\vec{j}\perp\vec{k}$ alors $\vec{i}\wedge\vec{i}=\vec{j}\wedge\vec{j}=\vec{k}\wedge\vec{k}=0$

$$\begin{array}{lll} & \vec{i}\wedge\vec{j}=\vec{k} & \vec{j}\wedge\vec{i}=-\vec{k}\\ \text{Et} & \vec{k}\wedge\vec{i}=\vec{j} & \vec{i}\wedge\vec{k}=-\vec{j}\\ & \vec{j}\wedge\vec{k}=\vec{i} & \vec{k}\wedge\vec{j}=-\vec{i}\end{array}$$

Ainsi

$$\begin{aligned}\vec{u}\wedge\vec{v} &= xy'\left(\vec{k}\right)+xz'\left(-\vec{j}\right)+yx'\left(-\vec{k}\right)+yz'\left(\vec{i}\right)+zx'\left(\vec{j}\right)+zy'\left(-\vec{i}\right)\\ &=\left(yz'-zy'\right)\vec{i}+\left(zx'-xz'\right)\vec{j}+\left(xy'-yx'\right)\vec{k}\\ &=\left(yz'-zy'\right)\vec{i}-\left(xz'-zx'\right)\vec{j}+\left(xy'-yx'\right)\vec{k}\\ \vec{u}\wedge\vec{v} &=\left(yz'-zy'\right)\vec{i}+\left(zx'-xz'\right)\vec{j}+\left(xy'-yx'\right)\vec{k}\end{aligned}$$

On peut déterminer l'expression analytique de $\vec{u}\wedge\vec{v}$ par le déterminant $\left(\vec{u},\vec{v},\mathrm{B}\right)$ où $\mathrm{B}\left(\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$

$$\det\left(\vec{u},\vec{v},\mathrm{B}\right)=\left(\vec{u}\wedge\vec{v}\right)=\begin{vmatrix}x & x' & \vec{i}\\ y & y' & \vec{j}\\ z & z' & \vec{k}\end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned}&=\vec{i}\begin{vmatrix}y & y'\\ z & z'\end{vmatrix}-\vec{j}\begin{vmatrix}x & x'\\ z & z'\end{vmatrix}+\vec{k}\begin{vmatrix}x & x'\\ y & y'\end{vmatrix}\\ &=\vec{i}\left(yz'-zy'\right)-\vec{j}\left(xz'-zx'\right)+\vec{k}\left(xy'-yx'\right)\\ &=\left(yz'-zy'\right)\vec{i}+\left(zx'-xz'\right)\vec{j}+\left(xy'-yx'\right)\vec{k}\end{aligned}$$

D'où $\vec{u}\wedge\vec{v}=\det\left(\vec{u},\vec{v},\mathrm{B}\right)$

e.4. Signification physique du produit scalaire :

Soit $\vec{f}$ une force appliquée à un corps de centre O. On sait que le moment d'une force est donné par la formule suivante :

$$\mathcal{M}=f.d\,\sin\theta \text{ où } \theta=mes\left(\vec{f},\vec{d}\right)$$

Ainsi le moment d'une force est égal au produit vectoriel de cette force et la distance par rapport au centre.

f. Produit mixte :

Soient trois vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix}$

Rappel :

Trois vecteurs sont dits coplanaires s'ils appartiennent à, un même plan.

Trois vecteurs sont coplanaires si et seulement si : $\det(\vec{u},\vec{v},\vec{w}) = 0$ c'est à dire si et seulement si $\begin{vmatrix} x & x' & x'' \\ y & y' & y'' \\ z & z' & z'' \end{vmatrix} = 0$.

Définition :

On appelle produit mixte de trois vecteurs $\vec{u},\vec{v},\vec{w}$ le produit scalaire obtenu en calculant d'abord le produit vectoriel de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ puis en multipliant scalairement le résultat par $\vec{w}$.

Notation :

$(\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{w}$ ou $(\vec{u}\ \vec{v}\ \vec{w})$.

f.1. Expression du produit mixte :

- $(\vec{u}\vec{v}\vec{w}) = (\vec{v}\vec{w}\vec{u}) = (\vec{w}\vec{u}\vec{v})$
- $(\vec{u}\vec{v}\vec{w}) = -(\vec{v}\vec{u}\vec{w}) = -(\vec{u}\vec{w}\vec{v}) = -(\vec{w}\vec{v}\vec{u})$
- Distributivité :

$\left[(\vec{u}+\vec{v})\,\vec{w}\vec{w}'\right] = (\vec{u}\vec{w}\vec{w}') + (\vec{v}\vec{w}\vec{w}')$

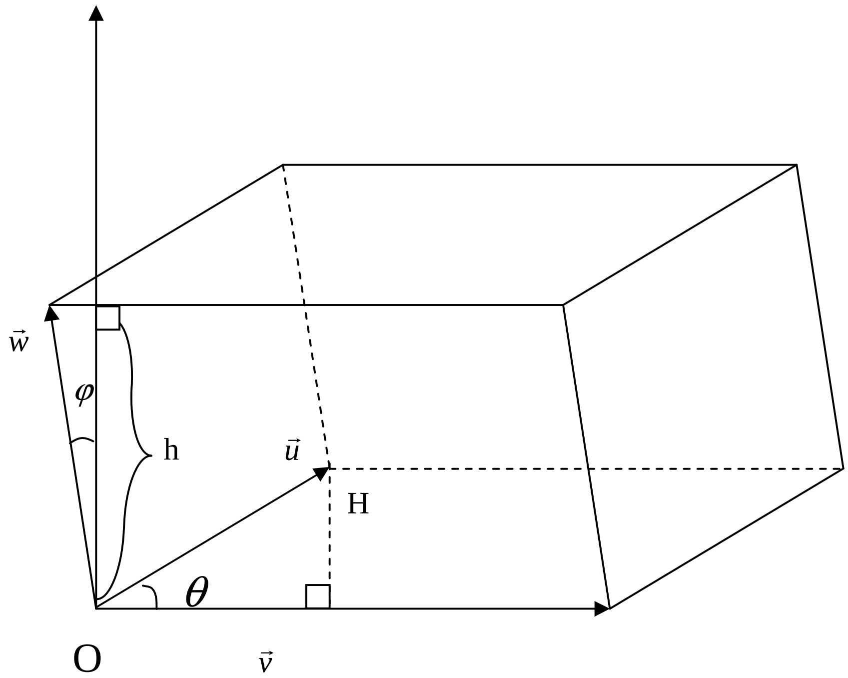
- Associativité

$\left[(a\vec{u})\vec{v}\vec{w}\right] = a\left[\vec{u}\vec{v}\vec{w}\right]$

- $(\vec{u}\vec{u}\vec{v}) = 0$
- $(\vec{u}\vec{v}\vec{w}) = 0 \Leftrightarrow \vec{u},\vec{v},\vec{w}$ sont coplanaires

f.2. Théorème :

Le produit mixte $(\vec{u}\vec{v}\vec{w})$ est égal au volume du parallélépipède formé avec les trois vecteurs $\vec{u},\vec{v}$ et $\vec{w}$.



Notons S la surface de base d'un parallélépipède.

Donc $S = |\vec{v}| \times H$ avec $H = |\vec{u}| \times \sin\theta$

D'où $S = |\vec{v}| \cdot |\vec{u}| \cdot \sin\theta$

On sait que le volume d'un parallélépipède est égal à la surface multipliée par la hauteur.

$V = \pm S \times h$ avec $h = |\vec{w}| \cdot \cos\varphi$

$|V| = S \times h$

$= |(\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{w}|$

Donc $V = S \cdot \vec{w} = (\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{w}$

Ainsi le produit mixte de trois vecteurs est égal au volume du parallélogramme qu'ils construisent.

f.3. expression analytique :

Soient

$\vec{u} = x\vec{i} + x\vec{j} + x\vec{z}$

$\vec{v} = x'\vec{i} + x'\vec{j} + x'\vec{z}$

$\vec{w} = x''\vec{i} + x''\vec{j} + x''\vec{z}$

Et on sait que :

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = (yz' - zy')\vec{i} + (zx' - xz')\vec{j} + (xy' - yx')\vec{k}$$

$$\begin{aligned}\left[(\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{w}\right] &= \left[(yz' - zy')\vec{i} + (zx' - xz')\vec{j} + (xy' - yx')\vec{k}\right] \cdot \left[x''\vec{i} + x''\vec{j} + x''\vec{z}\right] \\ &= x''(yz' - zy')(\vec{i} \cdot \vec{i}) + x''(zx' - xz')(\vec{i} \cdot \vec{j}) + x''(xy' - yx')(\vec{i} \cdot \vec{k}) + \\ &\quad y''(yz' - zy')(\vec{j} \cdot \vec{i}) + y''(zx' - xz')(\vec{j} \cdot \vec{j}) + y''(xy' - yx')(\vec{j} \cdot \vec{k}) + \\ &\quad z''(yz' - zy')(\vec{k} \cdot \vec{i}) + z''(zx' - xz')(\vec{k} \cdot \vec{j}) + z''(xy' - yx')(\vec{k} \cdot \vec{k})\end{aligned}$$

Or on a déjà vue que :

$(\vec{i} \cdot \vec{i}) + (\vec{j} \cdot \vec{j}) + (\vec{k} \cdot \vec{k}) = 1$

Et tous les autres produits scalaires sont nuls, donc :

$$\begin{aligned}(\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{w} &= x''(yz' - zy') + y''(zx' - xz') + z''(xy' - yx') \\ &= x''(yz' - zy') - y''(xz' - zx') + z''(xy' - yx') \\ &= x''\begin{vmatrix} y & z \\ y' & z' \end{vmatrix} - y''\begin{vmatrix} x & z \\ x' & z' \end{vmatrix} + z''\begin{vmatrix} x & y \\ x' & y' \end{vmatrix} \\ &= x''\begin{vmatrix} y & z \\ y' & z' \end{vmatrix} + y''\begin{vmatrix} x' & z' \\ x & z \end{vmatrix} + z''\begin{vmatrix} x & y \\ x' & y' \end{vmatrix}\end{aligned}$$

$$(\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{w} = \begin{vmatrix} x & x' & x'' \\ y & y' & y'' \\ z & z' & z'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & y & z \\ x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{vmatrix}$$

g. Double produit vectoriel :

Soient $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ trois vecteurs.

Le double produit vectoriel est obtenue par le produit vectoriel de $\vec{x}$ et $\vec{y}$ puis en multipliant encore vectoriellement le résultat par $\vec{z}$

En général, on a :

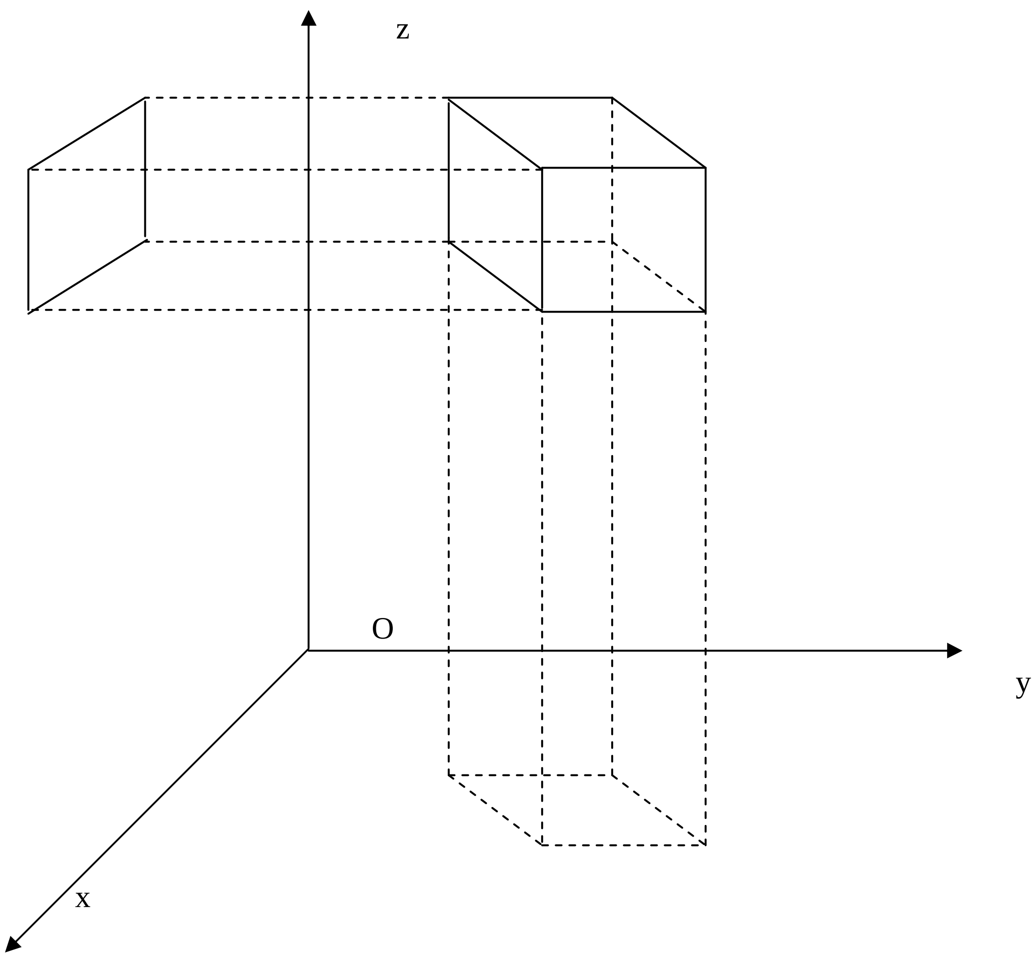
$$\left(\vec{x}\wedge\vec{y}\right)\wedge\vec{z}\neq\vec{x}\wedge\left(\vec{y}\wedge\vec{z}\right)$$

$$\left(\vec{x}\wedge\vec{y}\right)\wedge\vec{z}=\vec{y}\cdot\left(\vec{x}\cdot\vec{z}\right)-\vec{x}\left(\vec{y}\cdot\vec{z}\right)$$

$$\left[\vec{x}\wedge\left(\vec{y}\wedge\vec{z}\right)\right]+\left[\vec{y}\wedge\left(\vec{z}\wedge\vec{x}\right)\right]+\left[\vec{z}\wedge\left(\vec{x}\wedge\vec{y}\right)\right]=0$$

4. Représentation de quelques corps physique dans l'espace :

1. **Cube** :



Quand on projette le cube dans le plan Oxz, on obtient un carré, et on a de même dans le plan Oyz.

Equation du second degré :

Soit $f(x,y,z)$ une fonction définie par :

$$f(x,y,z) = ax^2 + by^2 + cz^2 + 2dxy + 2fyz + 2gzx + 2hx + 2ky + 2lz + m = 0 \quad (1)$$

Nous essayons d'éliminer les termes en xy, yz, et xz et les termes du premier degré pour avoir une équation de la forme :

$$f(x,y,z) = Ax^2 + By^2 + Cz^2 + L = 0$$

D'abord, soit $\Re\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ un repère orthonormé.

Effectuons une translation de vecteur $\overrightarrow{OO'}$ tel que $O'(x',y',z')$

On a le changement suivant :

$$x = x' + x_0$$
$$y = y' + y_0$$
$$z = z' + z_0$$

En changeant les valeurs de x dans (1) on a :

$$f(x',y',z') = ax'^2 + by'^2 + cz'^2 + 2dx'y' + 2fy'z' + 2gz'x' + 2G'x' + 2H'y' + 2K'z' + L' = 0 \quad (2)$$

Où $L' = ax_0{}^2 + by_0{}^2 + cz_0{}^2 + 2dx_0y_0 + 2fy_0z_0 + 2gz_0x_0 + 2hx_0 + 2ky_0 + 2ly_0 + m_0$

$$K' = gx_0 + fy_0 + cz_0 + l$$
$$H' = dx_0 + by_0 + fz_0 + k$$
$$G' = ax_0 + dy_0 + gz_0 + h$$

Ensuite choisissant S comme origine du nouveau repère de façon que les termes en premier degré soient égaux à zéro, c'est à dire :

$$\begin{cases} G' = 0 \\ H' = 0 \\ K' = 0 \end{cases}$$

Les coordonnées de S doivent satisfaire le système d'équation suivant :

$$\begin{cases} ax_0 + dy_0 + gz_0 + h = 0 \\ dx_0 + by_0 + fz_0 + k = 0 \\ gx_0 + fy_0 + cz_0 + l = 0 \end{cases}$$

L'équation (2) devient :

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + 2dxy + 2fyz + 2gzx + L' = 0 \quad (3)$$

On peut avoir $L' = hx_0 + ky_0 + lz_0 + m$

Car

$$L' = (ax_0 + dy_0 + gz_0 + h)x_0 + (dx_0 + by_0 + fz_0 + k)y_0 + (gx_0 + fy_0 + cz_0 + l)z_0 + hx_0 + ky_0 + lz_0 + m$$

En remplaçant L' par cette équation (3) devient

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + 2dxy + 2fyz + 2gzx + L = 0 \, (4)$$

Maintenant, nous éliminons les termes en xy, yz et zx (nous y parvenons par une rotation d'axe)

On a $ax'^2 + by'^2 + cz'^2 + L$ (5)

On aune équation d'une quadrique.

Si a, b, c ont même signe et L étant de signe contraire alors la courbe représentative est une ellipsoïde.

Si a, b, c est de signe contraire aux deux autres, alors la courbe est une hyperboloïde.

b. 1. Ellipsoïde :

Supposons que a, b, c sont tous différents de zéro et de même signe, et L de signe différents à eux.

$$f(x, y, z) = ax^2 + by^2 + cz^2 + L = 0$$

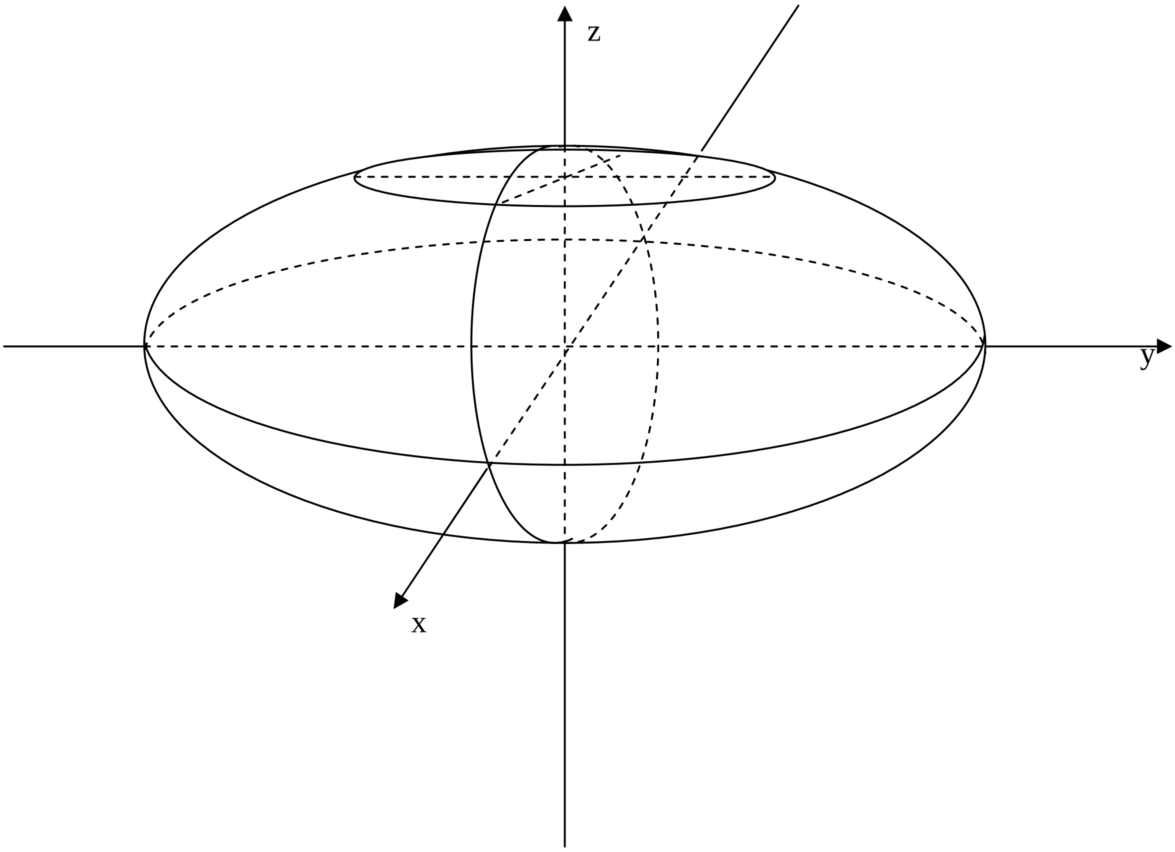
$$ax^2 + by^2 + cz^2 = -L$$

$$-\frac{a}{L}x^2 - \frac{b}{L}y^2 - \frac{c}{L}z^2 = 1$$

Or L de signe contraire à a, b, c ; donc $-L$ et a, b, c ont de même signe, d'où $-\frac{a}{L} \succ 0$; $-\frac{b}{L} \succ 0$ et $-\frac{c}{L} \succ 0$. Posons $A^2 = -\frac{L}{a}$; $B^2 = -\frac{L}{b}$ et $C^2 = -\frac{L}{c}$

L'équation (5) devient : $\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} + \frac{z^2}{C^2} = 1$

C'est une équation réduite d'ellipsoïde



Pour déterminer la forme de l'ellipse, on utilise la méthode de section plane.

D'abord, considérons une section de l'ellipsoïde parallèle au plan Oxy et chaque plan défini par l'équation $z = h$ et on a le système suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{A^2} + \dfrac{y^2}{B^2} = 1 - \dfrac{h^2}{C^2} \\ z = h \end{cases}$$

Si $|h| \prec c$ alors le plan $z = h$ coupe l'ellipsoïde suivant l'ellipse dont les demi axes sont :

$$a' = a\sqrt{1 - \frac{h^2}{C^2}}$$

$$b' = b\sqrt{1 - \frac{h^2}{C^2}}$$

Si $h \to 0$ alors $a' \to a$ et $b' \to b$ (c'est à dire a' et b' atteignent ses valeurs maximales)

Si $h = \pm c$ alors $a' \to 0$

$$b' \to 0$$

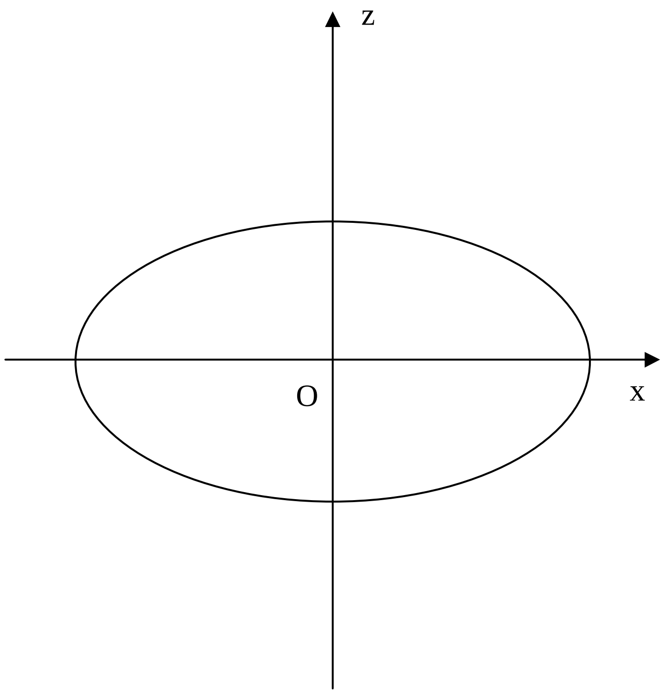
(C'est à dire les plans $z = \pm c$ sont tangente à l'ellipsoïde)

- Si $|h| \succ c$ alors le plan $z = h$ n'a aucune intersection avec l'ellipsoïde.

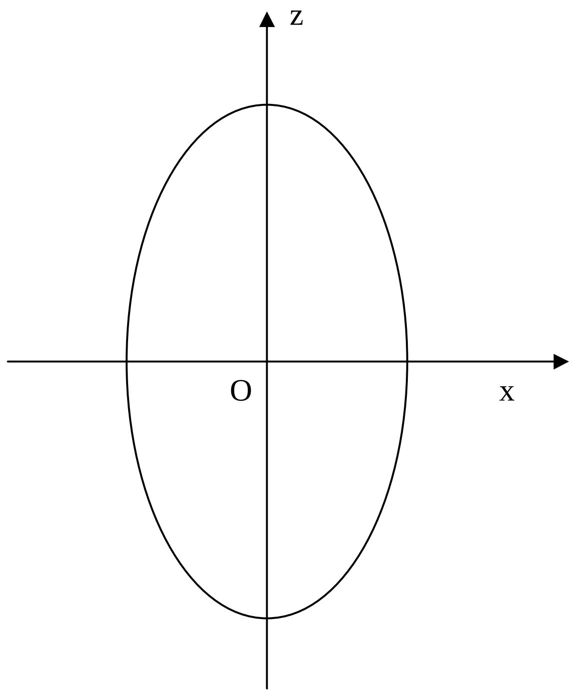
Ensuite, lors des intersections de l'ellipsoïde avec le plan Oxz et Oyz.

Le plan Oxz coupe l'ellipsoïde suivant l'ellipse d'équation :

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1 \\ y = 0 \end{cases}$$



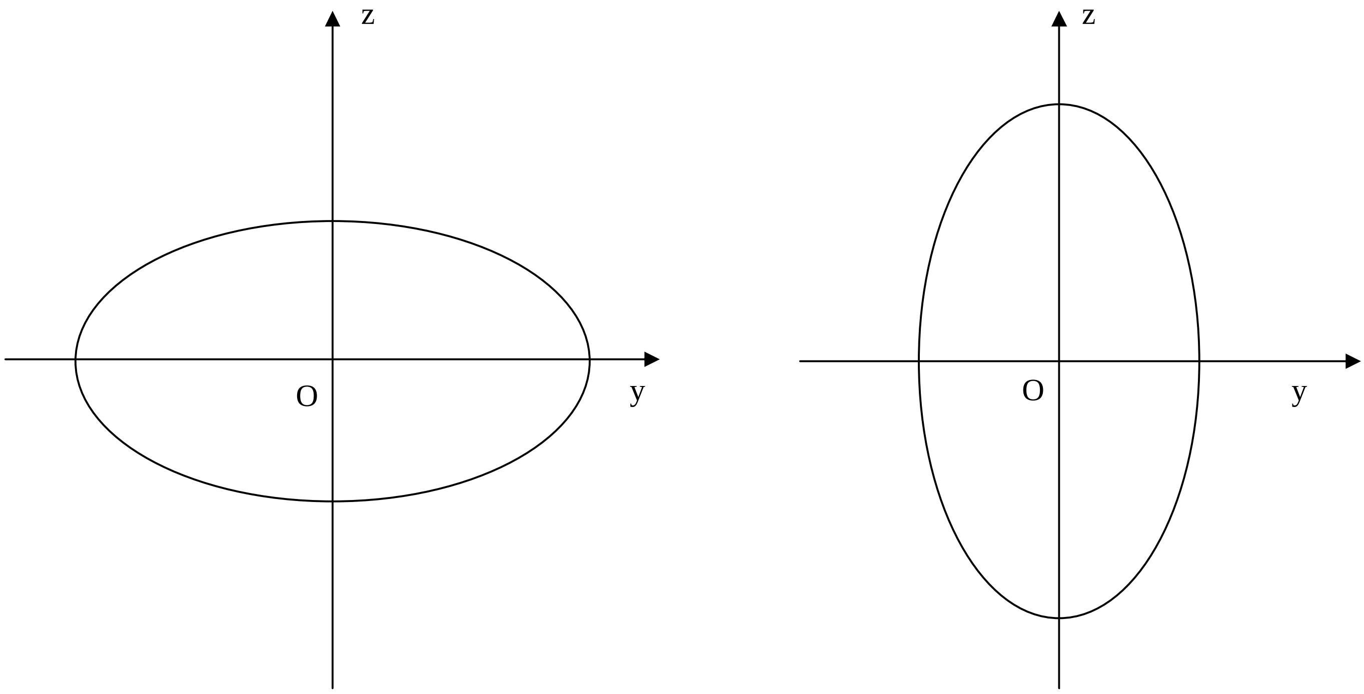
$a \succ c$



$a \prec c$

Le plan Oyz, on a de même une ellipse dont l'équation :

$$\begin{cases} \dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1 \\ x=0 \end{cases}$$



$b \succ c$ $\qquad\qquad$ $b \prec c$

b.2. Hyperboloïde :

On sait qu'on a un hyperbole si l'un de a, b, c a un signe contraire au deux autres.

Supposons que a et b ont même signe.

On a encore deux possibilité : a, b et L ont même signe ou c et L ont même signe.

Nous étudions d'abord l'hyperboloïde obtenu si a, b et L ont de même signe.

On a : $f(x,y,z) = ax^2 + by^2 + cz^2 + L = 0$

$$= ax^2 + by^2 + cz^2 = -L$$

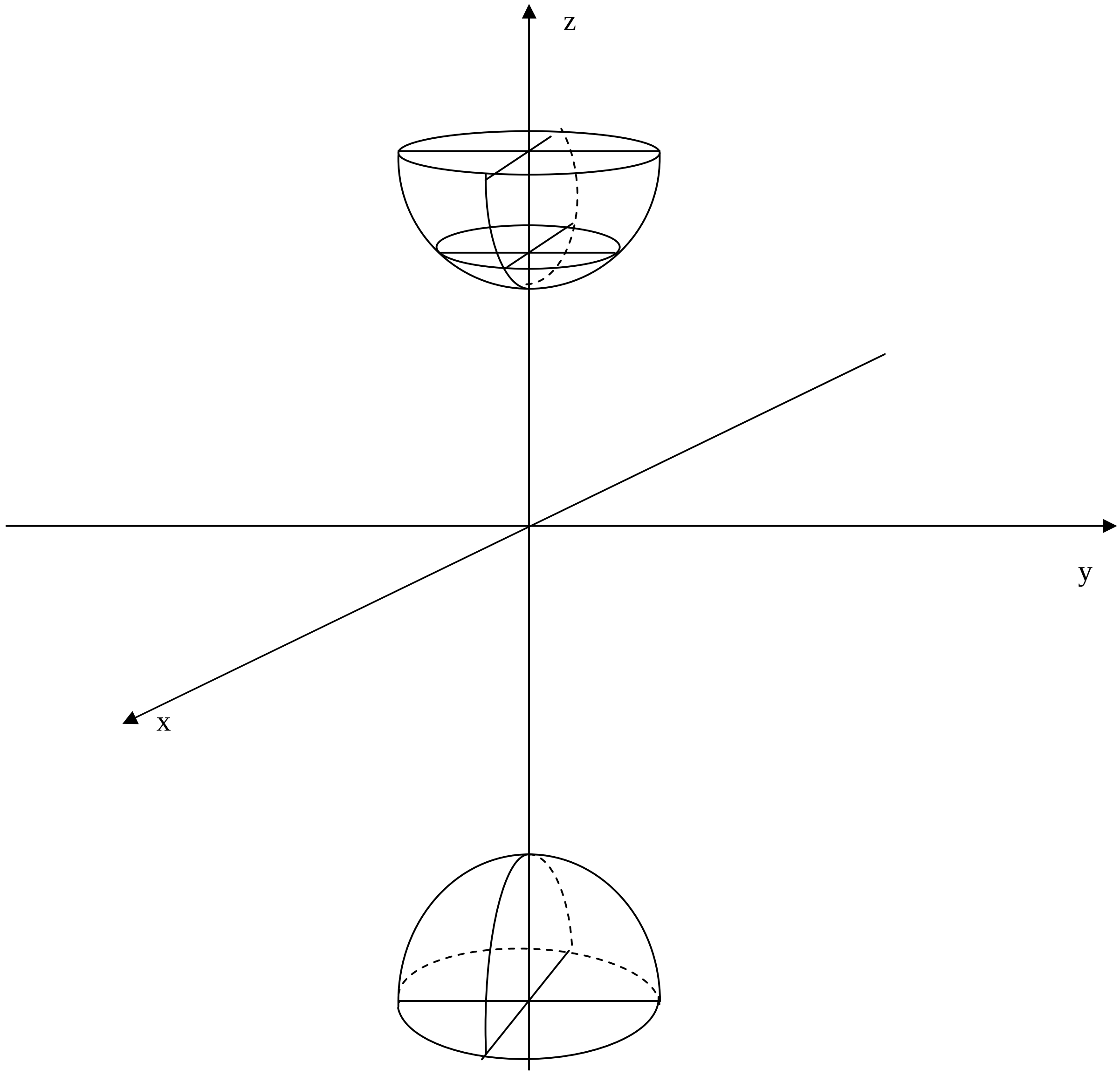
$$\frac{a}{L}x^2 + \frac{b}{L}y^2 + \frac{c}{L}z^2 = -1$$

$\frac{a}{L} \succ 0$ et $\frac{b}{L} \succ 0$ or $\frac{c}{L} \prec 0$

Posons $\frac{L}{a} = A^2$; $\frac{L}{b} = B^2$ et $-\frac{L}{c} = C^2$

On a donc $\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} - \frac{z^2}{C^2} = -1$

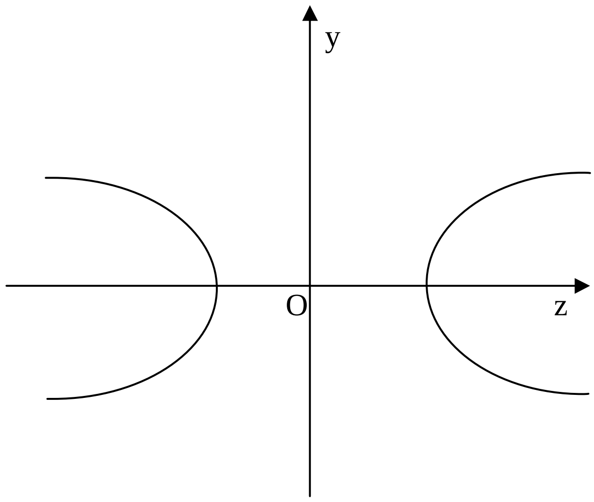
C'est l'équation canonique d'un hyperboloïde à deux nappes :



Maintenant, voyons la surface de cet hyperboloïde par les plans Oxz et Oyz.

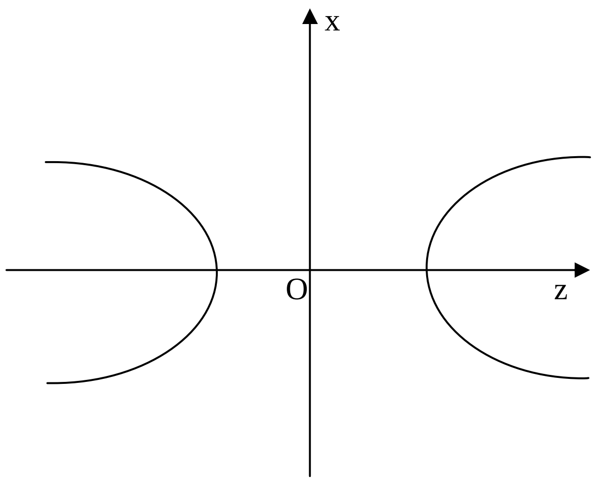
Premièrement, dans le plan Oyz, on a l'équation : $\begin{cases} \dfrac{y^2}{B^2} - \dfrac{z^2}{C^2} = -1 \\ x = 0 \end{cases}$

C'est une hyperbole symétrie par rapport aux axes (Oy) et (Oz) et coupe l'axe (Oz) au point de coordonnées $(0,0,c)$ et $(0,0,-c)$.



Deuxièmement, dans le plan Oxz,

On a : $\begin{cases} \dfrac{x^2}{A^2} - \dfrac{z^2}{C^2} = -1 \\ y = 0 \end{cases}$



Puis examinons, la section de cet hyperboloïde à deux nappes par le plan parallèle au plan Oxy.

Chaque plan est défini par l’équation de la forme $z = h$. On a le système d’équation suivant :

$$\begin{cases} \frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = \frac{h^2}{C^2} - 1 \\ z = h \end{cases}$$

- Si $|h| \succ c$, le plan $z = h$ coupe l’hyperboloïde suivant une ellipse de demi axes.

$a' = a\sqrt{\frac{h^2}{C^2} - 1}$ et $b' = b\sqrt{\frac{h^2}{C^2} - 1}$

Et cette ellipse s’agrandit au fur et à mesure qu’elle s’éloigne le plan Oxy.

- Si $|h| \to \pm c$ alors $a' \to 0$

$$b' \to 0$$

(C’est à dire dans les plans $z = \pm c$, l’ellipse se réduit à des points dont les coordonnées sont $(0,0,c)$ et $(0,0,-c)$).

Donc les plans $z = \pm c$ sont tangents à chaque nappe de l’hyperboloïde.

- Si $|h| \prec c$ alors l’équation réduite devient

$$\begin{cases} \frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = -1 \\ z = h \end{cases}$$

On a une équation réduite d’ellipse imaginaire (Le plan $z = h$ n’a aucun point d’intersection avec la surface).

Ensuite, nous étudions le cas où c et L ont de même singe:

On a $f(x, y, z) = ax^2 + by^2 + cz^2 = -L$

$$= \frac{a}{-L}x^2 + \frac{b}{-L}y^2 + \frac{c}{-L}z^2 = 1$$

Avec $\frac{a}{L} \prec 0$; $\frac{b}{L} \prec 0$ et $\frac{c}{L} \succ 0$

Posons $-\frac{a}{L} = A^2$; $-\frac{b}{L} = B^2$ et $\frac{c}{L} = C^2$

Donc on obtient : $\frac{x^2}{A^2}+\frac{y^2}{B^2}-\frac{z^2}{C^2}=1$

<u>L'hyperboloïde à deux nappes :</u>

L'équation réduite de cet hyperboloïde est de la forme : $\frac{x^2}{A^2}+\frac{y^2}{B^2}-\frac{z^2}{C^2}=1$

Examinons le section de la surface au plan Oxy et Oxz.

Dans Oxy ; on a le système d'équation :

$$\begin{cases} \frac{x^2}{A^2}-\frac{z^2}{C^2}=1 \\ y=0 \end{cases}$$

C'est une hyperbole par rapport aux axes (Ox) et (Oz) et coupe l'axe (Oz) aux point $(0,a,0)$ et $(0,-a,0)$.

Dans Oxy, on a le système d'équation

$$\begin{cases} \frac{y^2}{B^2}-\frac{z^2}{C^2}=1 \\ x=0 \end{cases}$$

L'hyperbole obtenue coupe l'axe (Oz) aux points de coordonnées $(0,b,0)$ et $(0,-b,0)$ et symétrie par rapport aux axes (Oy) et (Oz)

Puis voyons la section de la surface au plan Oxy, dans cette section le plan se définit par : $z=h$.

On a : le système d'équation : $\begin{cases} \frac{x^2}{A^2}+\frac{y^2}{B^2}=1+\frac{h^2}{C^2} \\ z=h \end{cases}$

- Si $|h|\prec c$, le plan $z=h$ coupe l'hyperboloïde suivant une ellipse de demi axes.

$a'=a\sqrt{1+\frac{h^2}{C^2}}$ et $b'=b\sqrt{1+\frac{h^2}{C^2}}$

- Si $h\to 0$ alors $a'\to a$ et $b'\to b$, c'est le plus petit demi axe de l'ellipse , c'est à dire le plus petit ellipse de l'hyperboloïde . l'ellipse s'agrandit au fur et à mesure que h s'accroît.

CHAP. III : PROPOSITION D'EXERCICES POUR LE PREMIER ANNEE

I. Intégrale triple :

Dans cette partie nous proposons une série d'exercices sur la géométrie dans l'espace à l'intention des étudiants qui vont entrer en première année scientifique. Certains de ces exercices sont accompagnés de leur solution détaillée.

Nous commençons par indiquer quelques méthodes d'intégration triple suivis de quelques exemples. La raison est que ces calculs d'intégrales triples sont très utiles en physique ou en mécanique à l'Université, mais l'étudiant qui vient directement de la Terminale se trouve complètement perdu aussi bien dans les méthodes de calcul que dans la compréhension. Une des causes est justement le fait de ne pas connaître les notions élémentaires de la géométrie dans l'espace.

Soit V un domaine spatial, la surface V est délimitée inférieurement par l'équation $z_2 = f_2(x, y)$ et supérieurement $z_1 = f_1(x, y)$.

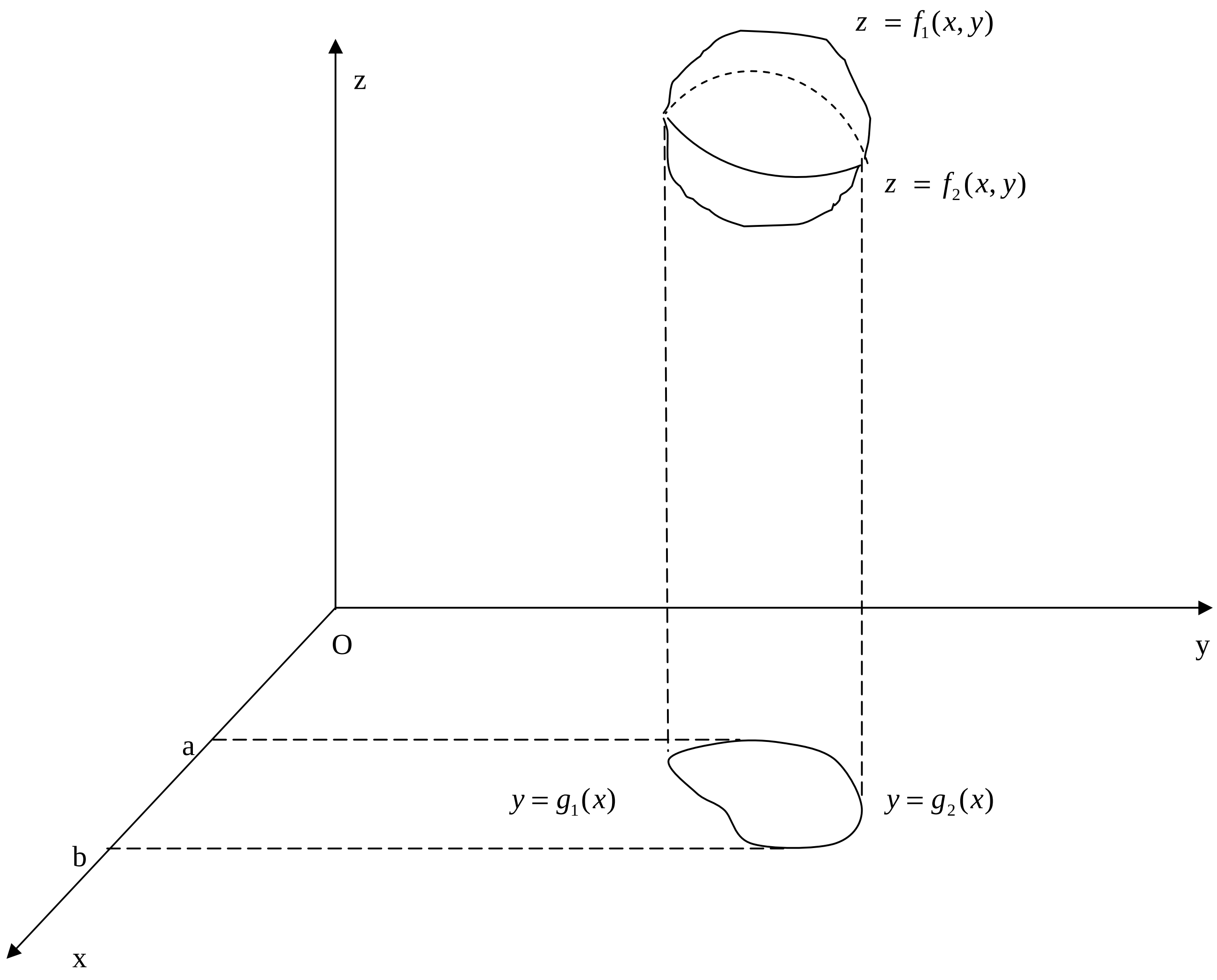
La projection de la surface V sur le plan Oxy est le domaine D limité par les courbes d'équations : $y_1 = g_1(x)$ et $y_2 = g_2(x)$

$x_1 = a$ et $x_2 = b$

Le calcul d'intégrale triple Iv est égal à

$$Iv = \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} \int_{z_1}^{z_2} dzdydx$$

$$Iv = \int_{a}^{b} \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} \int_{f_1(x,y)}^{f_2(x,y)} dzdydx$$

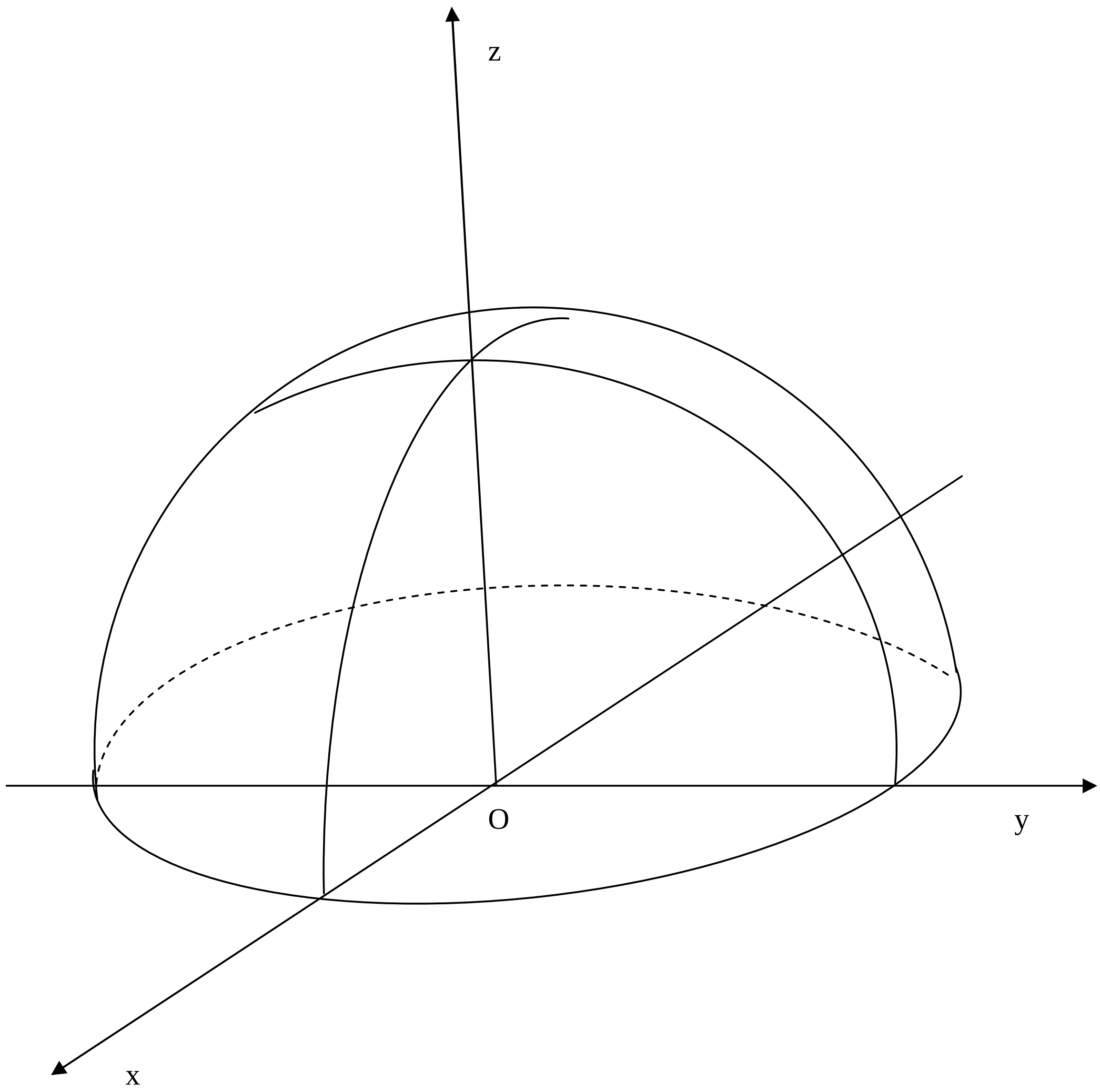


$z = f_1(x, y)$
z
$z = f_2(x, y)$
O
y
a
$y = g_1(x)$
$y = g_2(x)$
b
x

Exemple :

Calculer l'intégrale $\iiint zdv$ entendue à la demi sphère de rayon R

Le sphère est limité inférieurement par l'équation $z = 0$ et supérieurement par l'équation $z^2 = a^2 - x^2 - y^2$.



Dans le plan Oxy, on a un cercle de rayon R tel que $y_1^2 = (R^2 - x^2)$ et x varie de O à R.

$$\iiint zdv = \int_0^R \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} \int_0^{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} zdzdydx$$

$$= \int_0^R \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} R^2 - x^2 - y^2 dydx$$

$$= \int_0^R (R^2 - x^2)\sqrt{R^2 - x^2}\, dx$$

$$= \frac{\pi R^4}{4}$$

On a

$$\boxed{\iiint zdv = \frac{\pi R^4}{4}}$$

<u>Méthode par substitution :</u>

Si la fonction à intégrer est un peu difficile, on essaye de faire un changement de variable pour avoir une autre fonction plus simple ou une fonction qui a une intégrale usuelle.

<u>Cas général :</u>

Soit x, y, z des coordonnées de M.

Supposons qu'on peut poser x, y, z comme suit

$$x = g(a,b,c)$$
$$y = h(a,b,c)$$
$$z = t(a,b,c)$$

Si V le volume représenter par x, y, z

V' le volume représenter par a, b, c

Soit $\delta v \in V$ qui est représenté par $\delta v' \in V$ tel que $\lim\limits_{\delta v \to 0} \dfrac{\delta v}{\delta v'} = |I|$

Où I est appelé le Jacobien de la transformation et I prend la forme de déterminant de troisième ordre.

$$\left| I \right| = \begin{vmatrix} \frac{\delta\ x}{\delta\ a} & \frac{\delta\ x}{\delta\ b} & \frac{\delta\ x}{\delta\ c} \\ \frac{\delta\ y}{\delta\ a} & \frac{\delta\ y}{\delta\ b} & \frac{\delta\ y}{\delta\ c} \\ \frac{\delta\ z}{\delta\ a} & \frac{\delta\ z}{\delta\ b} & \frac{\delta\ z}{\delta\ c} \end{vmatrix}$$

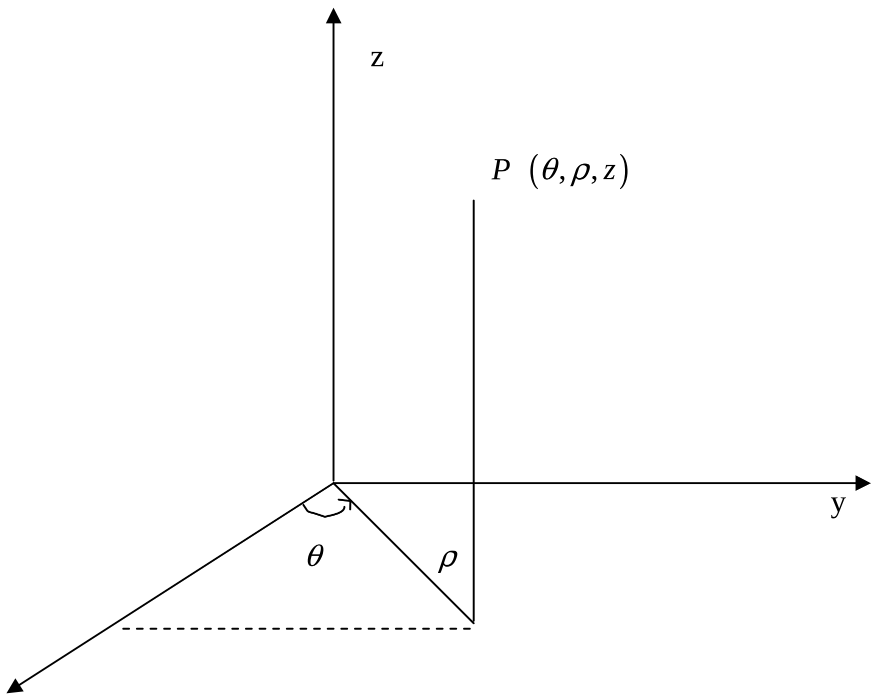
Ainsi

$$\iiint_V f(x,y,z)dxdydz = \iiint_{V'} f\left[g\left(a,b,c\right);h\left(a,b,c\right);t\left(a,b,c\right)\right]\left|I\right|dadbdc$$

Quelques cas particuliers

a. En coordonnées cylindriques :

Soit x, y, z des coordonnées rectangulaire. On appelle coordonnées cylindriques les trois nombres $\left(\rho,\theta,z\right)$ définissant la position du point P .



x

On a : $x = \rho\cos\theta$

$y = \rho\sin\theta$

$z = z$ Avec $\theta \in [0\,;2\pi[$

$z \in \mathbf{R}$

$\rho \in [0,+\infty[$

$$|I| = \begin{vmatrix} \frac{\delta x}{\delta\rho} & \frac{\delta x}{\delta\theta} & \frac{\delta x}{\delta z} \\ \frac{\delta y}{\delta\rho} & \frac{\delta y}{\delta\theta} & \frac{\delta y}{\delta z} \\ \frac{\delta z}{\delta\rho} & \frac{\delta z}{\delta\theta} & \frac{\delta z}{\delta z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -\rho\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \rho\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -\rho\sin\theta \\ \sin\theta & \rho\cos\theta \end{vmatrix}$$

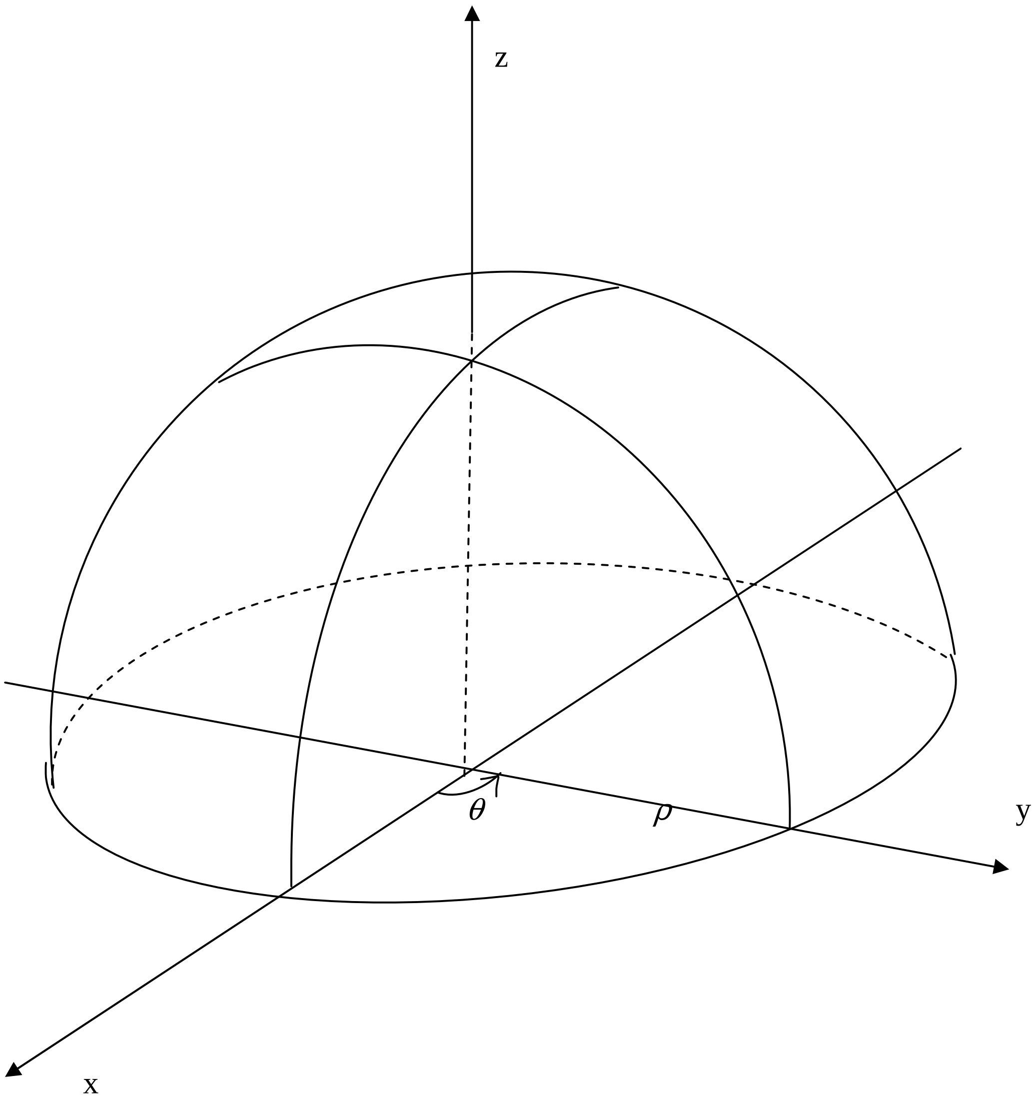
$$|I| = \begin{vmatrix} \cos\theta & -\rho\sin\theta \\ \sin\theta & \rho\cos\theta \end{vmatrix} = \rho(\cos^2\theta + \sin^2\theta)$$

$$|I| = \rho$$

Donc $\iiint_V f(x,y,z)dxdydz = \iiint_{V'} f\left(\rho,\theta,z\right)\rho d\rho d\theta dz$

Exemple :

Calculer l'intégrale $\iiint z dv$ entendue à la demi sphère de rayon R



$$\iiint\limits_V zf(x, y, z)dxdyd$$

Changeons le variable

$$D' = \left\{ (\theta, \rho, z) / \theta \in [0; 2\pi[\, ; z \in [0; R[\, et 0 \le \rho \le \sqrt{R^2 - z^2} \right\}$$

On a $\iiint zdxdydz = \int_0^R zdz \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{R^2 - z^2}} d\rho$

$$= \int_0^R zdz \int_0^{2\pi} d\theta \left| \frac{R^2 - z^2}{2} \right|$$

$$= \int_0^R \frac{z}{2}(R^2 - z^2)2\pi \cdot dz$$

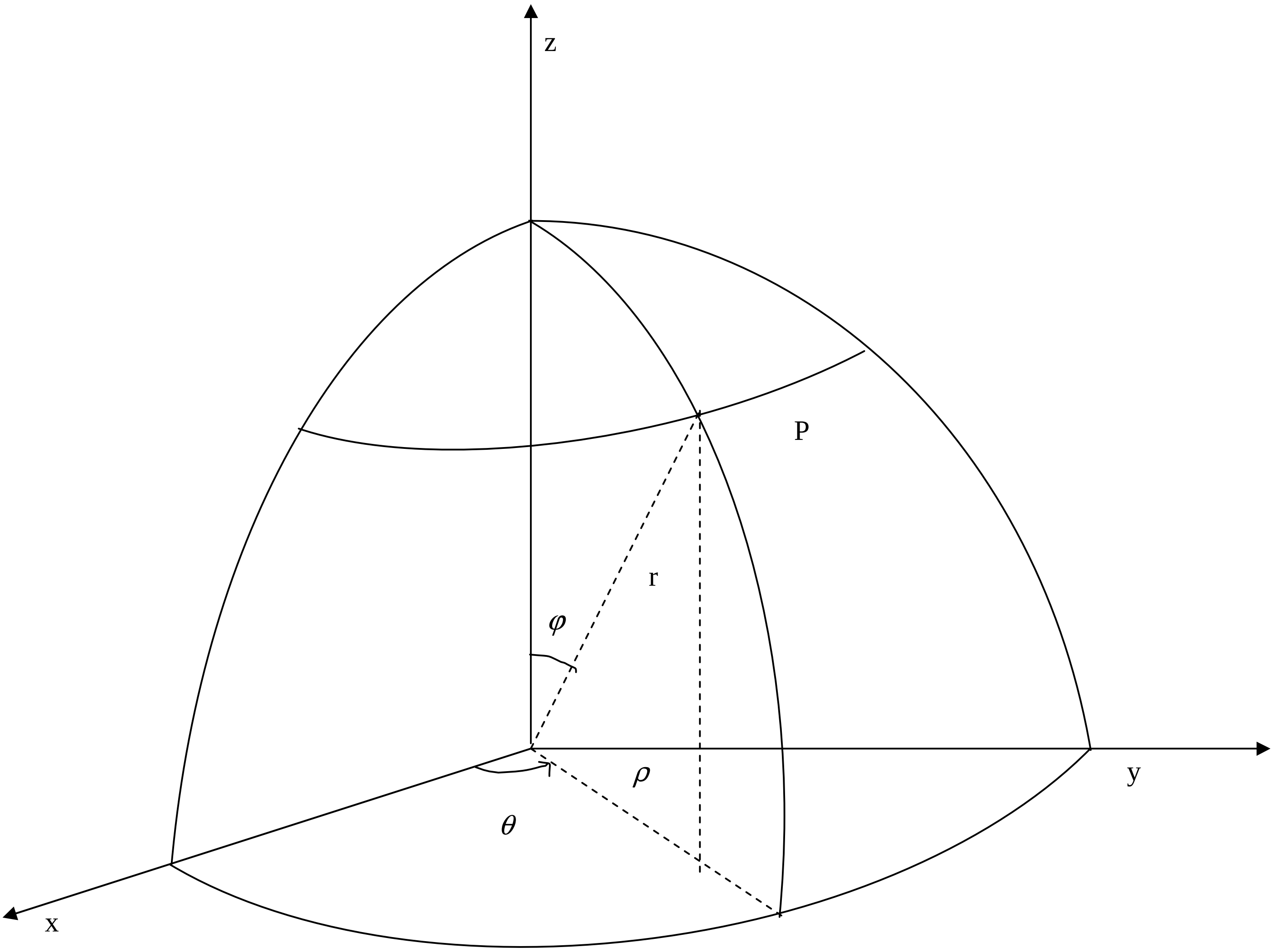
$$= \pi \left[\int_0^R zR^2dz - \int_0^R z^3dz \right]$$

$$= \pi \left| \frac{R^2z^2}{2} \right|_0^R - \left| \frac{z^4}{4} \right|_0^R$$

$$\iiint zdv = \frac{\pi R^4}{4}$$

b. **En coordonnées sphériques :**

En coordonnées sphériques, on repère un point à l'aide de trois nombres θ , r , φ



On a :

$$x = \rho \cos\theta = r \sin\varphi \cos\theta$$
$$y = \rho \sin\theta = r \sin\varphi \sin\theta$$
$$z = r \cos\theta$$

Calculons $|I|$:

$$|I| = \begin{vmatrix} \frac{\delta x}{\delta\theta} & \frac{\delta x}{\delta r} & \frac{\delta x}{\delta\rho} \\ \frac{\delta y}{\delta\theta} & \frac{\delta y}{\delta r} & \frac{\delta y}{\delta\rho} \\ \frac{\delta z}{\delta\theta} & \frac{\delta z}{\delta r} & \frac{\delta z}{\delta\rho} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -r\sin\varphi\sin\theta & \sin\varphi\cos\theta & r\cos\varphi\cos\theta \\ r\sin\varphi\cos\theta & \sin\varphi\sin\theta & r\cos\varphi\sin\theta \\ 0 & \cos\rho & -r\sin\varphi \end{vmatrix}$$

$$= -\cos\varphi \begin{vmatrix} -r\sin\varphi\sin\theta & r\cos\varphi\cos\theta \\ r\sin\varphi\cos\theta & r\cos\varphi\sin\theta \end{vmatrix} - r\sin\varphi \begin{vmatrix} -r\sin\varphi\sin\theta & \sin\varphi\cos\theta \\ r\sin\varphi\cos\theta & \sin\varphi\sin\theta \end{vmatrix}$$

$$= -\cos\varphi\left[-r^2\left(\sin\varphi\cos\varphi\sin^2\theta + \cos\varphi\sin\varphi\cos^2\theta\right)\right] + r^2\sin\varphi\left[\left(\sin^2\varphi\sin^2\theta + \sin^2\varphi\cos^2\theta\right)\right]$$

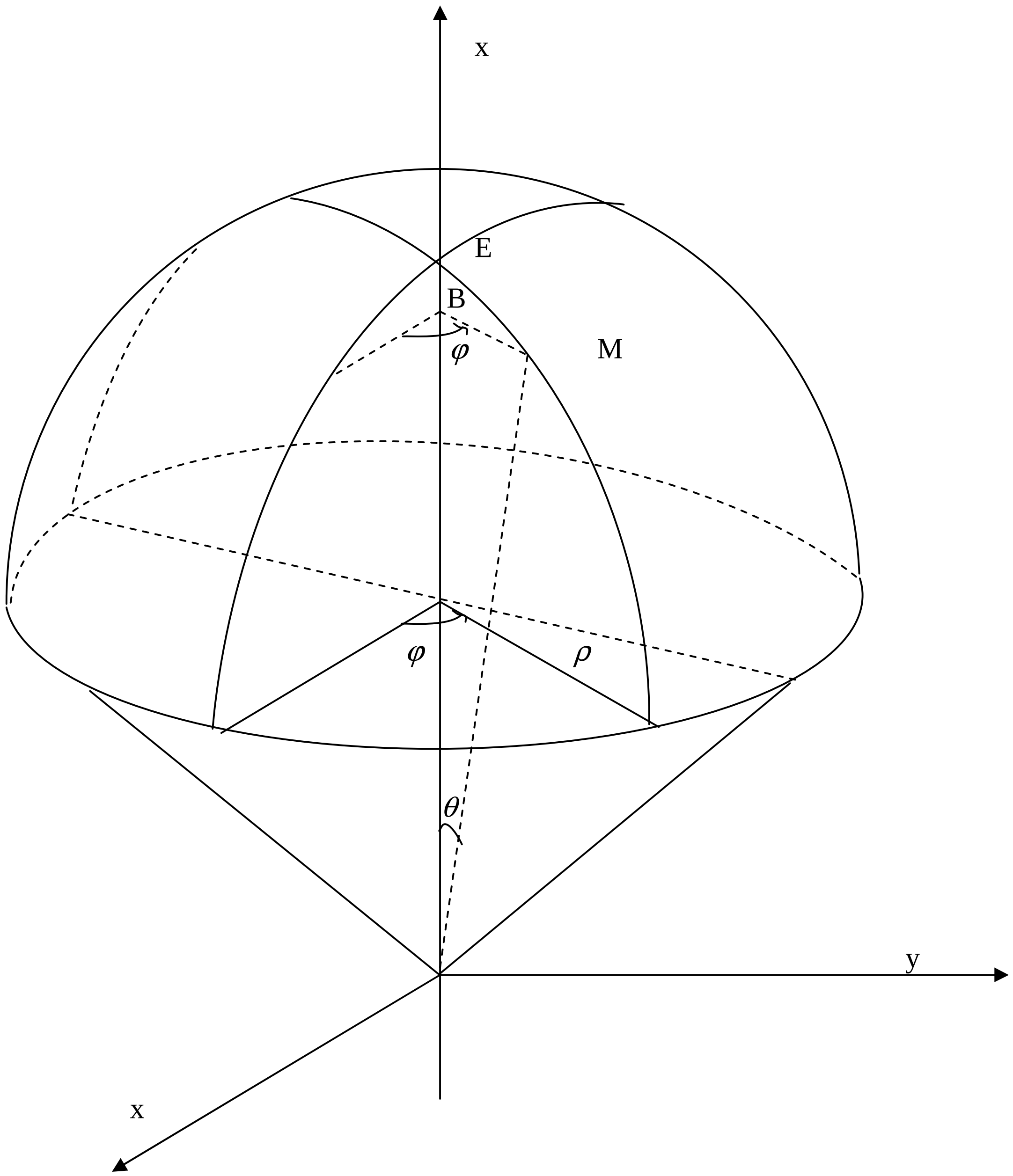
$$= r^2\cos^2\varphi\sin\varphi + r^2\sin^3\varphi$$

$$|I| = r^2\sin\varphi$$

Ainsi : $\iiint\limits_V f\left(x, y, z\right)dxdydz = \iiint\limits_{V'} f\left(r, \theta, \varphi\right)r^2 \sin\varphi\, dr\, d\theta\, d\varphi$

Exemple :

Calculer l'intégrale $\iiint r^2 dv$ où la fonction $f(P) = r^2$ est le carré de la distance de P à l'axe Oz et le domaine D. Le corps est limité inférieurement par un cône de hauteur $OC = R$ de rayon de base $AC = OC = R$.


x
E
B
φ
M
φ
ρ
θ
y
x

On a :

$\rho = \widehat{CAP}$

$\theta = \widehat{BOM}$

$R = BM = \rho \sin\theta$

$$\iiint r^2 dv = \iiint \rho^2 \rho^2 \sin^3\theta \, d\rho \, d\theta \, d\varphi$$

Avec $\varphi \in [0, 2\pi[$; $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ et $0 \le \rho \le OE = 2R\cos\theta$

$$\begin{aligned}
\iiint r^2 dv &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^{OE} d\rho \int_0^{2\pi} d\varphi \rho^4 \sin^3\theta \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^{2R\cos\theta} 2\pi\rho^4 \sin^3\theta d\rho \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \left| 2\pi \sin^3\theta \frac{\rho^5}{5} \right|_0^{2R\cos\theta} \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{4}} 2\pi \sin^3\theta \cdot \frac{32}{5} R^5 \cos^5\theta d\theta \\
&= \frac{64}{5} \times R^5 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2\theta \cdot \sin\theta \cdot \cos^5\theta d\theta \\
&= \frac{64}{5} \times R^5 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(1 - \cos^2\theta\right) \cos^5\theta \cdot d\left(-\cos\theta\right) \\
&= \frac{64}{5} \times R^5 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\cos^5\theta - \cos^7\theta\right) \cdot d\left(-\cos\theta\right) \\
&= \frac{64}{5} \times R^5 \left[-\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^5\theta d\left(\cos\theta\right) + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^7\theta d\left(\cos\theta\right) \right] \\
&= \frac{64}{5} \times R^5 \left| -\frac{1}{6} \cos^{6\theta} + \frac{1}{8} \cos^8\theta \right|_0^{\frac{\pi}{4}} \\
&= \frac{11}{30} \pi R^5
\end{aligned}$$

c. <u>Application de l'intégrale triple à la physique</u> :

1. Pour calculer la masse d'un corps, on peut utiliser l'intégrale triple si on a le densité**.**

On a la formule suivante :

$M = \iiint f(x,y,z)dxdydz$

Où $f(x,y,z)$ est la densité du corps

Exemple :

Déterminer la masse M d'un parallélépipède rectangle de densité en x, y, z à $f(x,y,z) = x+y+z$ et

$0 \le x \le a$
$0 \le y \le b$
$0 \le z \le c$

Solution :

On a :

$$
\begin{aligned}
M &= \iiint f(x,y,z)dxdydz \\
&= \int_0^a \int_0^b \int_0^c (x+y+z)dzdydx \\
&= \int_0^a \int_0^b \left| (x+y)z + \frac{z^2}{2} \right|_0^c dydx \\
&= \int_0^a \int_0^b (xc + \frac{c^2}{2}) + cydydx \\
&= \int_0^a \left[\int_0^b (cx + \frac{c^2}{2})dy + \int_0^b cydy \right] dx \\
&= \int_0^a \left| \left(cx + \frac{c^2}{2} \right) y + c\frac{y^2}{2} \right|_0^2 dy \\
&= \int_0^a (cbx + \frac{c^2 b}{2} + \frac{cb^2}{2})dx \\
&= \int_0^a cbxdx + \int_0^a \left(\frac{c^2 b}{2} + \frac{cb^2}{2} \right) dx
\end{aligned}
$$

$$
= \left| cb\frac{x^2}{2} + \left(\frac{c^2 b}{2} + \frac{cb^2}{2} \right) x \right|_0^a
$$

$$= \frac{cba^2}{2} + \frac{acb^2}{2} + \frac{abc^2}{2}$$

$$= \frac{abc}{2}(a+b+c)$$

$$\iiint f(x,y,z)\,dxdydz = \frac{abc}{2}(a+b+c)$$

La masse d'un parallélépipède rectangle de densité $f(x,y,z)=(x+y+z)$ est égale à $M = \frac{abc}{2}(a+b+c)$.

2. On utilise aussi l'intégrale triple pour calculer le moment statique d'un corps par rapport au plan.

On a les formules suivantes :

$$M_{xy} = \iiint f(x,y,z)\,zdxdydz$$

$$M_{xz} = \iiint f(x,y,z)\,ydxdydz$$

$$M_{yz} = \iiint f(x,y,z)\,xdxdydz$$

Où M_{xy} est le moment statique par rapport au plan xy

M_{xz} est le moment statique par rapport au plan xz

M_{yz} est le moment statique par rapport au plan yz

Et $f(x,y,z)$ est la densité du corps.

3. le centre de gravité d'un corps peut être déterminé à l'aide de l'intégrale triple en suivant les formules suivantes :

$$x = \frac{M_{yz}}{M}$$

$$y = \frac{M_{xz}}{M}$$ où M est la masse du corps et on a $G(x,y,z)$.

$$z = \frac{M_{xy}}{M}$$

4. On peut avoir le moment d'inertie en cherchant l'intégral suivant :

$$I_x = \iiint f(x,y,z)\left(y^2+z^2\right)dxdydz$$
$$I_y = \iiint f(x,y,z)\left(x^2+z^2\right)dxdydz$$
$$I_z = \iiint f(x,y,z)\left(x^2+y^2\right)dxdydz$$

Où I_x est le moment d'inertie par rapport à x

I_y est le moment d'inertie par rapport à y

I_z est le moment d'inertie par rapport à z

II. PROPROSITION DES EXERCICES

a. Enoncés :

On propose quelques exercices dont certains entre eux ont des réponses.

1. $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ étant trois vecteurs quelconques d'un espace vectoriel euclidien $\mathcal{E}$.

a. Démontrer que $\vec{a} \wedge \left(\vec{b} \wedge \vec{c}\right) = (\vec{a} \cdot \vec{c}) \cdot \vec{b} - \left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right) \cdot \vec{c}$

b. En déduire que $\left[\vec{a} \wedge \left(\vec{b} \wedge \vec{c}\right)\right] + \left[\vec{b} \wedge (\vec{c} \wedge \vec{a})\right] + \left[\vec{c} \wedge \left(\vec{a} \wedge \vec{b}\right)\right] = 0$

2. Une espace affine euclidienne est rapportée à un repère orthonormé de sens direct $\Re\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$. On considère les vecteurs :

$$\vec{v}_1 = a\vec{i} + ma\vec{j}$$
$$\vec{v}_2 = b\vec{i} + mb\vec{j} \qquad \text{a,b,c données } a,b,c \in \mathbf{R}$$
$$\vec{v}_3 = c\vec{i} + pc\vec{j}$$

1. a. déterminer les coordonnés du point V tel que : $\overrightarrow{OV} = \vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2$

   b. Montrer que l'ensemble $\mathcal{F}$ des points V lorsque m et p varient est une courbe plane ($\mathcal{C}$). On précisera l'équation du plan ($\mathcal{P}$) qui contient ($\mathcal{C}$) et l'équation de la courbe($\mathcal{C}$) par rapport à un repère orthonormé du plan ($\mathcal{P}$).

2. On pose :

$\overrightarrow{OC_1} = \vec{v}_1$

$\overrightarrow{OC_2} = \vec{v}_2$

$\overrightarrow{OC_3} = \vec{v}_3$

a. Calculer le volume algébrique du parallélépipède construit par $\overrightarrow{OC_1}$, $\overrightarrow{OC_2}$ et $\overrightarrow{OC_3}$.

b. En déduire l'orientation du trivecteur $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$ suivant les valeurs de m et p.

3. Par le point I $(0,1,2)$, on mène le plan $(\mathscr{P}_1)$ orthogonal à $\vec{v}_1$ et le plan $(\mathscr{P}_2)$ orthogonal à $\vec{v}_2$ puis par le point $J(1,1,2)$, on mène le plan $(\mathscr{P}_3)$ orthogonal à $\vec{v}_3$.

a. Ecrire les équations de ces trois plans.

b. Etudier leur intersection $\mathscr{P}_1 \cap \mathscr{P}_2 \cap \mathscr{P}_3$ selon les valeurs données m et p.

c. déterminer l'ensemble G des points de l'espace appartenant à l'ensemble des intersections des plans $(\mathscr{P}_1)$, $(\mathscr{P}_2)$ et $(\mathscr{P}_3)$ lorsque p et m varient.

4. Soients A_1, A_2 et A_3 trois points de $\mathcal{E}$ définies par leurs coordonnées $A_1(a,b,0), A_2(0,c,0); A_3(b,0,0)$ avec $a \succ 0; b \succ 0; c \succ 0$

a. déterminer les composantes du vecteur : $\vec{w} = \overrightarrow{OA_1} \wedge \vec{v}_1 + \overrightarrow{OA_2} \wedge \vec{v}_2 + \overrightarrow{OA_3} \wedge \vec{v}_3$

b. On suppose que $a = b = c$, calculer p en fonction de m pour que $\vec{w}$ soit orthogonal au vecteur $\vec{r} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_3$.

c. Vérifier le résultat obtenu dans le cas où m = 0

3. Le repère est rapporté à un repère orthonormé $\Re(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

Soient $A(4,-2,-4)$

$B(-4,12,6)$

$C(12,-4,3)$

$D(12,16,-15)$

Déterminer les distance OA, OB, OC et OB

4. Démontrer que l'équation du plan qui passe par le point $M_0(x_0, y_0, z_0)$ est parallèle aux deux vecteurs $\vec{a}_1(l_1, m_1, n_1)$ et $\vec{a}_2(l_2, m_2, n_2)$ et peut être mise sous la forme suivante :

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix}$$

5. Parmi les couples d'équations suivantes, déterminer celle qui définit des plans parallèles et des plans perpendiculaires :

1. $2x-3y+5z-7=0$ et $2x-3y+5z+3=0$
2. $4x+2y-4z+5=0$ et $2x+y+2z+1=0$
3. $x-3z+2=0$ et $2x-6z-7=0$
4. $3x-y-2z-5=0$ et $x+9y-3z+2=0$
5. $2x-5y+z=0$ et $x+2z-3=0$

6. calculer la distance d du point $P(1,-1,-2)$ à la droite : $\frac{x+3}{3}=\frac{y+2}{2}=\frac{z-8}{-2}$

7. Après avoir vérifié que les droites

$\begin{cases} 2x+2y-z-10=0 \\ x-y-z-22=0 \end{cases}$ et $\frac{x+7}{3}=\frac{y-5}{-1}=\frac{z-9}{4}$ sont parallèles, calculer leur distance d

8. Former l'équation du plan passant par le point $M(2,3,-1)$ et parallèle au plan $5x-3y+2z=10$.

9. Calculer la distance des droites parallèles $\frac{x}{1}=\frac{y-3}{2}=\frac{z-2}{1}$ et $\frac{x-3}{1}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-2}{1}$

10. Calculer le moment d'inertie d'un cylindre circulaire droite de hauteur 2h et de rayon R par rapport à un diamètre de sa section moyenne, la densité $\wp_0$ étant constante.

11. Dans un corps ayant la forme d'une demi sphère de rayon R et de centre à l'origine et de densité $\wp$ constante.

Déterminer le centre de gravité de cet hémisphère.

12. Calculer : $\iiint_V x^2 y^2 \, dx\, dy\, dz$ où V le domaine définie par $0 \le x \le 1$

$0 \le y \le x$

$0 \le z \le xy$

13. Calculer $\iiint_V \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dxdydz$ après avoir passé aux coordonnées sphériques.

b. <u>Solutions</u> :

On donne des solutions à quelques exercices.

1 Soit $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ une base orthonormée de sens directe de $\mathcal{E}$.

Posons $\vec{a} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3$

$$\vec{b} = y_1\vec{e}_1 + y_2\vec{e}_2 + y_3\vec{e}_3$$
$$\vec{c} = z_1\vec{e}_1 + z_2\vec{e}_2 + z_3\vec{e}_3$$

On a $\vec{b} \wedge \vec{c} = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 & \vec{e}_1 \\ y_2 & z_2 & \vec{e}_2 \\ y_3 & z_3 & \vec{e}_3 \end{vmatrix} = \vec{e}_1 \begin{vmatrix} y_2 & z_2 \\ y_3 & z_3 \end{vmatrix} - \vec{e}_2 \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_3 & z_3 \end{vmatrix} + \vec{e}_3 \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}$

$$= (y_2z_3 - y_3z_2)\vec{e}_1 - (y_1z_3 - y_3z_1)\vec{e}_2 + (y_1z_2 - y_2z_1)\vec{e}_3$$
$$= (y_2z_3 - y_3z_2)\vec{e}_1 + (y_3z_1 - y_1z_3)\vec{e}_2 + (y_1z_2 - y_2z_1)\vec{e}_3$$

Posons

$$X_1 = y_2z_3 - y_3z_2 \ (1)$$
$$X_2 = y_3z_1 - y_1z_3$$
$$X_3 = y_1z_2 - y_2z_1$$

Ainsi $\vec{b} \wedge \vec{c} = X_1\vec{e}_1 + X_2\vec{e}_2 + X_3\vec{e}_3$

$$= \sum_{i=1}^{3} X_i\vec{e}_i$$

Calculons ensuite $\vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c})$

$$\vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c}) = \begin{vmatrix} x_1 & X_1 & \vec{e}_1 \\ x_2 & X_2 & \vec{e}_2 \\ x_3 & X_3 & \vec{e}_3 \end{vmatrix}$$
$$= \vec{e}_1 \begin{vmatrix} x_2 & X_2 \\ x_3 & X_3 \end{vmatrix} - \vec{e}_2 \begin{vmatrix} x_1 & X_1 \\ x_3 & X_3 \end{vmatrix} + \vec{e}_3 \begin{vmatrix} x_1 & X_1 \\ x_2 & X_2 \end{vmatrix}$$
$$= (x_2X_3 - x_3X_2)\vec{e}_1 - (x_1X_3 - x_3X_1)\vec{e}_2 + (x_1X_2 - x_2X_1)\vec{e}_3$$
$$= (x_2X_3 - x_3X_2)\vec{e}_1 + (x_3X_1 - x_1X_3)\vec{e}_2 + (x_1X_2 - x_2X_1)\vec{e}_3$$

Posons $Y_1 = x_2 X_3 - x_3 X_2$

$$Y_2 = x_3 X_1 - x_1 X_3$$
$$Y_3 = x_1 X_2 - x_2 X_1$$

Alors $\vec{a} \wedge \left(\vec{b} \wedge \vec{c}\right) = \sum_{i=1}^{3} Y_i \vec{e}_i (2)$

On peut écrire (1) comme : $X_i = y_j z_k - y_k z_j$

Alors $Y_i = x_j X_k - x_k X_j$

$$= x_j \left(y_i z_j - y_j z_i\right) - x_k \left(y_k z_i - y_i z_k\right)$$
$$= x_j y_i z_j - x_j y_j z_i - x_k y_k z_i - x_k y_i z_k$$
$$= y_i \left(x_j z_j + x_k z_k\right) - z_i \left(x_j y_j + x_k y_k\right) + x_i y_i z_i - x_i y_i z_i$$
$$= y_i \left(x_j z_j + x_i z_i + x_k z_k\right) - z_i \left(x_i y_i + x_j y_j + x_k y_k\right)$$

On sait que

$\vec{a} \cdot \vec{c} = x_i z_i + x_j z_j + x_k z_k$

$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_i y_i + x_j y_j + x_k y_k$

Donc on a $Y_i = y_i \left(\vec{a} \cdot \vec{c}\right) - z_i \left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right)$

L'égalité (2) devient

$$\vec{a} \wedge \left(\vec{b} \wedge \vec{c}\right) = \sum_{i=1}^{3} \left[y_i \left(\vec{a} \cdot \vec{c}\right) - z_i \left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right) \right] \vec{e}_i$$
$$= \sum_{i=1}^{3} y_i \vec{e}_i \left(\vec{a} \cdot \vec{c}\right) - \sum_{i=1}^{3} \left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right) z_i \vec{e}_i$$
$$= \left(\vec{a} \cdot \vec{c}\right) \sum_{i=1}^{3} y_i \vec{e}_i - \left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right) \sum_{i=1}^{3} z_i \vec{e}_i (3)$$

or $\vec{b} = \sum_{i=1}^{3} y_i \vec{e}_i$ et $\vec{c} = \sum_{i=1}^{3} z_i \vec{e}_i$

alors (3) $\Rightarrow \vec{a} \wedge \left(\vec{b} \wedge \vec{c}\right) = \left(\vec{a} \cdot \vec{c}\right) \cdot \vec{b} - \left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right) \cdot \vec{c}$

b. Déduisons que $\left[\vec{a} \wedge \left(\vec{b} \wedge \vec{c}\right)\right] + \left[\vec{b} \wedge \left(\vec{c} \wedge \vec{a}\right)\right] + \left[\vec{c} \wedge \left(\vec{a} \wedge \vec{b}\right)\right] = 0$

on a $\vec{a} \wedge \left(\vec{b} \wedge \vec{c}\right) = \left(\vec{a} \cdot \vec{c}\right) \cdot \vec{b} - \left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right) \cdot \vec{c} (1)$

$$\vec{b}\wedge(\vec{c}\wedge\vec{a})=\left(\vec{b}\cdot\vec{a}\right)\cdot\vec{c}-\left(\vec{b}\cdot\vec{c}\right)\cdot\vec{a}(2)$$
$$\vec{c}\wedge\left(\vec{a}\wedge\vec{b}\right)=\left(\vec{c}\cdot\vec{b}\right)\cdot\vec{a}-(\vec{c}\cdot\vec{a})\cdot\vec{b}(3)$$

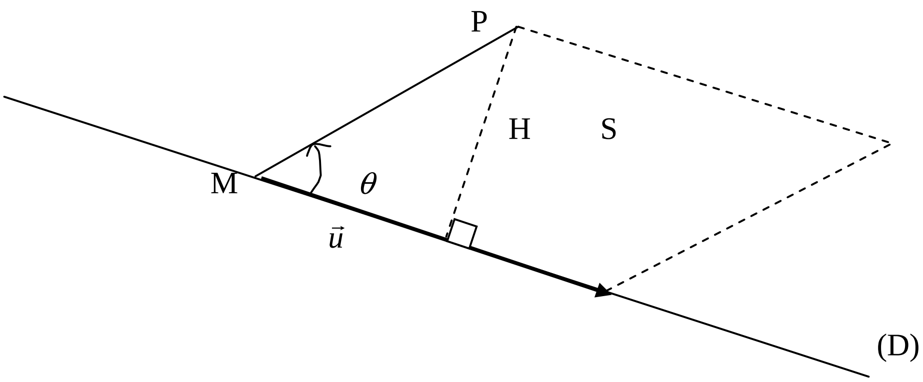
Or le produit scalaire est commutatif donc

$$(2)\Rightarrow\left(\vec{b}\cdot\vec{a}\right)\cdot\vec{c}-\left(\vec{b}\cdot\vec{c}\right)\cdot\vec{a}=\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)\cdot\vec{c}-\left(\vec{c}\cdot\vec{b}\right)\cdot\vec{a}(2)'$$
$$(3)\Rightarrow\left(\vec{c}\cdot\vec{b}\right)\cdot\vec{a}-(\vec{c}\cdot\vec{a})\cdot\vec{b}=\left(\vec{c}\cdot\vec{b}\right)\cdot\vec{a}-(\vec{a}\cdot\vec{c})\cdot\vec{b}(3)'$$

$$\begin{aligned}(1)+(2)'+(3)'&=(\vec{a}\cdot\vec{c})\cdot\vec{b}-\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)\cdot\vec{c}+\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)\cdot\vec{c}-\left(\vec{c}\cdot\vec{b}\right)\cdot\vec{a}+\left(\vec{c}\cdot\vec{b}\right)\cdot\vec{a}-(\vec{a}\cdot\vec{c})\cdot\vec{b}\\&=\cancel{(\vec{a}\cdot\vec{c})\cdot\vec{b}}-\cancel{\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)\cdot\vec{c}}+\cancel{\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)\cdot\vec{c}}-\cancel{\left(\vec{c}\cdot\vec{b}\right)\cdot\vec{a}}+\cancel{\left(\vec{c}\cdot\vec{b}\right)\cdot\vec{a}}-\cancel{(\vec{a}\cdot\vec{c})\cdot\vec{b}}\\&=0\end{aligned}$$

6. La distance d entre la droite (D) d'équation $\dfrac{x+3}{3}=\dfrac{y+2}{2}=\dfrac{z-8}{-2}$ et le point $P(1,-1,-2)$.

Soit $\vec{u}(3,2,-2)$ le vecteur directeur de (D) et $M(-3,-2,8)$ un point appartenant à (D)



Soit S la surface formée par $\vec{u}$ et $\overrightarrow{MP}$

$$S = \pm\left(\vec{u} \wedge \overrightarrow{MP}\right)$$

$$= \left|\vec{u} \wedge \overrightarrow{MP}\right| (1)$$

$$S = \left|\vec{u}\right| \cdot H \ (2)$$

$$(1) = (2) \Rightarrow \left|\vec{u} \wedge \overrightarrow{MP}\right| = \left|\vec{u}\right| \cdot H$$

$$H = \frac{\left|\vec{u} \wedge \overrightarrow{MP}\right|}{\left|\vec{u}\right|}$$

Avec $\overrightarrow{MP}(4,1,-10)$

$$|\vec{u}| = \sqrt{9+4+4} = \sqrt{17}$$

$$\left|\vec{u} \wedge \overrightarrow{MP}\right| = (-20+2)\vec{i} + (-8+30)\vec{j} + (3-8)\vec{k}$$

$$= -18\vec{i} + 22\vec{j} - 5\vec{k}$$

$$\left|\vec{u} \wedge \overrightarrow{MP}\right| = \sqrt{(18)^2 + (22)^2 + 5^2}$$

$$= \sqrt{833}$$

$$= \sqrt{17 \times 49}$$

$$= 7\sqrt{17}$$

$$H = \frac{7\sqrt{17}}{\sqrt{17}}$$

$$H = 7$$

$$|\vec{u}| = \sqrt{9+4+4} = \sqrt{17}$$

$$\left|\vec{u} \wedge \overrightarrow{MP}\right| = (-20+2)\vec{i} + (-8+30)\vec{j} + (3-8)\vec{k}$$

$$= -18\vec{i} + 22\vec{j} - 5\vec{k}$$

$$\left|\vec{u} \wedge \overrightarrow{MP}\right| = \sqrt{(18)^2 + (22)^2 + 5^2}$$

$$= \sqrt{833}$$

$$= \sqrt{17 \times 49}$$

$$= 7\sqrt{17}$$

$$H = \frac{7\sqrt{17}}{\sqrt{17}}$$

$$H = 7$$

9. On prend l'axe de cylindre comme axe (Oz) et prenons comme centre de symétrie l'origine. Ainsi le problème est de chercher le moment d'inertie par rapport à l'axe (Ox)

$$I_{xx} = \iiint_V (y^2 + z^2)\wp_0 \, dxdydz$$

Posons $y = \rho \sin\theta$

$z = z$

Et

$$-h \le z \le h$$

$$0 \le \rho \le R$$

$$0 \le \theta \le 2\pi$$

$$y^2 + z^2 = \rho^2 \sin^2\theta + z^2$$

Donc

$$I_{xx} = \int_0^{2\pi}\int_{-h}^{h}\int_0^R \wp_0 \rho(\rho^2 \sin^2\theta + z^2) d\theta dz d\rho$$

$$= \wp_0 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R \rho d\rho \left[\int_{-h}^{h} \rho^2 \sin^2\theta dz + \int_{-h}^{h} z^2 dz \right]$$

$$= \wp_0 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R \rho \left| \rho^2 \sin^2\theta z + \frac{z^3}{3} \right|_{-h}^{h} d\rho$$

$$= \wp_0 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R \left(2h\rho^3 \sin^2\theta + \frac{2h^3}{3}\rho \right) d\rho$$

$$= \wp_0 \int_0^{2\pi} \left[\int_0^R 2h\rho^3 \sin^2\theta d\rho + \int_0^R \frac{2}{3} h^3 \rho d\rho \right] d\theta$$

$$= \wp_0 \int_0^{2\pi} \left| 2h \sin^2\theta \frac{\rho^4}{4} + \frac{2}{3} h^3 \frac{\rho^2}{2} \right|_0^R d\theta$$

$$= \wp_0 \int_0^{2\pi} \frac{2h}{4} R^4 \sin^2\theta + \frac{h^3}{3} R^2 d\theta$$

$$= \wp_0 \int_0^{2\pi} \frac{2hR^4}{4} \left(\frac{1}{2} - \frac{\cos 2\theta}{2} \right) d\theta + \wp_0 \int_0^{2\pi} \frac{h^3}{3} R^2 d\theta$$

$$= \wp_0 \left[\frac{hR^4}{2} \left| \frac{\theta}{2} - \frac{\sin 2\theta}{4} \right|_0^{2\pi} \right] + \left| \wp_0 R^2 \frac{h^3}{3} \theta \right|_0^{2\pi}$$

$$= \wp_0 \frac{hR^4}{2} \cdot \pi + \wp_0 R^2 \frac{h^3}{3} 2\pi \qquad \Rightarrow I_{xx} = \wp_0 h\pi R^2 \left(\frac{2}{3} h^2 + \frac{R^2}{2} \right)$$

CONCLUSION

Nous avons dans ce mémoire examiné les différentes raisons qui ont conduit à la « suppression » de la géométrie dans l'espace du programme de mathématiques. Nous avons également souligné son importance et expliqué les impacts négatifs de son omission, surtout pour les étudiants de première année de l'université. Nous espérons ainsi attirer l'attention de tout un chacun (élève, enseignant, ...) sur la nécessité de respecter le programme officiel et de remettre enfin la géométrie dans l'espace à sa place parmi les autres chapitres.

BIBLIOGRAPHIE :

1. « Aide mémoire de mathématiques supérieure » M. Vygodski.
2. P. Danco et A. popov « exercices et problèmes des mathématiques supérieures »
3. N. Efinov « élément de géométrie analytique»
4. G. Baranenkov, R. Chostak ; B. Démidovich, V. Efimenko ; S. Frolov, S. Kogan, G. Lountz, E. Porchnéva, E. Chitcheva ; A. Yanpolski « recueil d'exercices et de problèmes d'analyse mathématiques »
5. Collection E. Riche « Mathématiques nouveaux programme tome 2 T.C. et E » Hatier.
6. N. Piskounov « calcul différentiel et Intégral tome II» Edition Mir nouveau.
7. programme scolaire.