



UNIVERSITÉ D'ANTANANARIVO

SCIENCES ET TECHNOLOGIES

MENTION : Mathématiques
et Informatique

Mémoire de fin d'étude en vue de l'obtention du
Diplôme de Master de Mathématiques

Option : Mathématiques Appliquées
Spécialité : Grandes déviations et Algèbres appliquées

GRANDES DEVIATIONS DES DIFFUSIONS AVEC PETIT BRUIT ET STATISTIQUES DISCONTINUES

Soutenu par **RANAIVOANDRIAMANANTENA**
Antemasoa Zonarindra

Le 27 Octobre 2015

Devant la commission d'examen formée par les membres de Jury :

Président : Monsieur **Victor HARISON**
Professeur Titulaire
Rapporteur : Monsieur **Toussaint Joseph RABEHERIMANANA**
Professeur Titulaire
Examineurs : Monsieur **Marc RABIAZAMAHOLY**
Maître de conférences
Monsieur **Fy Mamenosoa RAVELOMANANTSOA**
Maître de conférences

Remerciements

Tout d'abord, nous remercions Dieu, notre créateur de nous avoir donné la force, la volonté, la santé et le courage afin d'accomplir ce travail.

Je remercie très vivement le Professeur Victor HARISON qui m'a fait l'honneur de présider le jury de mémoire.

J'adresse aussi un grand remerciement à mon encadreur Monsieur Toussaint Joseph RABEHERIMANANA qui a proposé le thème de ce mémoire, pour ses conseils du début jusqu'à la fin de cet ouvrage.

Je tiens à remercier Monsieur Marc RABIAZAMAHOLY, d'avoir cordialement accepté de se présenter parmi les membres de jury en tant qu'examineur.

Je tiens à remercier également Monsieur Fy Mamenosoa RAVELOMANANTSOA, qui va porter son jugement sur ce travail.

Je remercie mes parents et ma famille d'avoir eu la patience, ils ont toujours été une source de motivation, d'encouragements et de beaucoup de bonheurs.

Enfin, j'adresse mes remerciements à tous mes amis, qui m'ont toujours soutenu et encouragé au cours de la réalisation de ce mémoire.

Table des matières

1	Préliminaire	4
1.1	Définitions préliminaires	4
1.2	Processus de diffusion	5
1.3	Chaîne de Markov	5
2	Énoncé du théorème principal	8
2.1	Introduction sur la famille de diffusion avec la statistique discontinue . . .	8
2.2	Conséquence : le principe de Laplace pour la famille $\{X^\varepsilon, \varepsilon > 0\}$	13
3	Résultats Préliminaires	14
3.1	Introduction de la formule de la représentation dans la solution de l'E.D.S	14
3.2	Les résultats généraux de compacité et de convergence	20
4	Preuve du théorème 2.2.1	29
4.1	La preuve de la borne supérieure du principe de Laplace	29
4.2	La preuve de la borne inférieure du principe de Laplace	33
A	Théorème classique	44
B	Quelques inégalités importantes	46
C	Calcul stochastique :	47
D	Girsanov	51
E	Kolmogorov	54

Introduction

Considérons le processus de dimension d $X^\varepsilon \doteq \{X^\varepsilon(t), 0 \leq t \leq 1\}$ solution de l'équation différentielle stochastique (EDS)

$$dX^\varepsilon(t) = b(X^\varepsilon(t))dt + \varepsilon^{\frac{1}{2}}\sigma(X^\varepsilon(t))dW(t), \quad X^\varepsilon(0) = x_0, \quad (1)$$

où $\varepsilon > 0$ et W est un mouvement brownien d -dimensionnel. Le principe de grandes déviations pour la famille $\{X^\varepsilon, \varepsilon > 0\}$ est un résultat bien connu sous la condition que le vecteur de dérive $b(x)$ et la matrice de dispersion σ sont des fonctions régulières de x [13]. Toutefois, cette condition peut être trop restrictive pour certaines applications, où les processus qui violent cette dépendance se posent naturellement. Nous nous référons à ces processus comme à des statistiques discontinues. Un exemple d'application où des procédés discontinus avec des statistiques a été posé, est la modélisation des canaux de communications incorporant un "limiteur dur" dans une boucle à verrouillage de phase, qui est une forme de filtre non linéaire sous-optimal [17]. Ces canaux de communications peuvent être modélisés par une matrice de diffusion de dispersion continue, mais avec une variation qui change de manière discontinue quand x franchit une limite lisse dans \mathbb{R}^d . Plus précisément dans ce mémoire on étudie le principe de grandes déviations pour ce genre de processus.

Plusieurs articles ont étudié les grandes déviations pour les diffusions avec des statistiques discontinues comme l'article "large deviation for small noise diffusion with discontinuous statistic", du livre "probability theory", écrit par P. Dupuis, R.S. Ellis et M. Boué [10]. Cet article nous a beaucoup inspiré pour la réalisation de ce mémoire. En utilisant des techniques de l'application continue, Korostelev et Leonov [15, 16] ont obtenu un principe de grandes déviations pour une classe restreinte en deux dimensions de diffusions qui satisfait certaines conditions de stabilité. Récemment, Chiang et Sheu [6] ont considéré la diffusion d -dimensionnelle avec une dérive continue, sauf à la traversée de l'hyperplan $(d-1)$ -dimensionnel $\partial \doteq \{x \in \mathbb{R}^d : x_1 = 0\}$ où l'indice 1 désigne la première composante du vecteur. Leurs résultats supposent que la matrice de dispersion σ est la matrice identité de dimension d . Dans ce mémoire, nous étendons ces résultats de manière significative, en permettant à la matrice de dispersion de dépendre de $x \in \mathbb{R}^d$. Bien que nous supposons toujours qu'une discontinuité se produise le long de l'hyperplan ∂ , notre hypothèse est que (1) a une unique solution forte. C'est notamment le cas lorsque $\sigma(\cdot)$ est la matrice identité

ou lorsqu'elle est une matrice constante non dégénérée. En plus les conditions générales pour l'existence et l'unicité de la solution forte peuvent être trouvées dans [20]. Une méthode standard pour le traitement des grandes déviations sur les diffusions est basée sur le temps discret. Cette situation est le problème dans le contexte de statistique discontinue, car il est difficile de rapprocher le processus en temps continu avec précision par l'analogie au temps discret au voisinage de la discontinuité. L'approche de convergence faible pour les grandes déviations développée dans [7] nous permet de contourner cette étape de discrétisation en temps. Bien que la méthodologie ait été développée dans le contexte des processus en temps discret, le document ici présent démontre l'équivalence de l'approche en étendant son application en temps continu. En particulier, nos résultats sont les analogues en temps continu de ce que l'on trouve dans le chapitre 7 du [7], concernant un modèle de marche aléatoire avec des statistiques discontinues. En fait, la fonctionnelle d'action figurant dans notre théorème principal, a la même forme que celle apparaissant dans le théorème 7.2.3 dans [7]. La similitude est également présente dans les preuves de plusieurs résultats préliminaires. Par conséquent, toutes ces preuves peuvent être réalisées comme des extensions évidentes de leurs homologues à temps discret. Mais elles seront omises. Il est important de remarquer que malgré les similitudes, l'extension présentée ici est importante et loin d'être immédiate, et sa preuve nécessite un certain nombre de nouvelles idées. La preuve repose sur les propriétés générales de l'*EDS* et sur une formule de représentation des fonctionnelles de solution forte de l'*EDS* de [5].

Le résultat principal de ce mémoire, le théorème 2.2.1, énonce le principe de Laplace sur la famille $\{X^\varepsilon, \varepsilon > 0\}$. Le terme du principe de Laplace se réfère à l'analyse asymptotique des logarithmes normalisés des fonctions continues évoquant l'espérance; une définition précise est donnée dans le chapitre 2. Ce principe de Laplace est équivalent à un principe de grandes déviations avec la même fonctionnelle d'action et le principe de grandes déviations pour la famille $\{X^\varepsilon, \varepsilon > 0\}$ est une conséquence directe du théorème 2.2.1.

Le contenu de ce mémoire est organisé comme suit. La première partie du chapitre 2 introduit la famille de diffusion avec des statistiques discontinues considérées. Après les hypothèses nécessaires, le principe de Laplace pour cette famille est énoncé dans le théorème 2.2.1. Dans le chapitre 3, nous énonçons une formule de représentation des solutions d'*EDS* ainsi que l'étude asymptotique de la famille de contrôle $\{v^\varepsilon, \varepsilon > 0\}$, consistant à éliminer le mouvement brownien W qui seront nécessaires dans la preuve du théorème 2.2.1. Ce chapitre comprend également les résultats généraux de compacité et de convergence qui seront utilisés dans le chapitre suivant. Enfin, le chapitre 4 est consacré à la preuve du principe de Laplace. La preuve est divisée en limites supérieure et inférieure, chacune correspondant à une sous-section. Un problème plus ambitieux que celui analysé dans le présent document concerne les processus de diffusion, dont les dérivées présentent des discontinuités le long d'un nombre arbitraire d'intersection

lisse de variétés $(d - 1)$ -dimensionnelles. Les difficultés rencontrées dans l'analyse de ces processus sont discutées dans la section 7.1 de [7].

Chapitre 1

Préliminaire

1.1 Définitions préliminaires

Définition 1.1.1. Une fonction $I : \mathcal{X} \rightarrow [0, \infty]$ est une fonctionnelle d'action si elle est semi-continue inférieurement et $I \not\equiv +\infty$. De plus, si pour tout $a < \infty$, $\{x \in \mathcal{X}, I(x) \leq a\}$ est compact alors I est une bonne fonctionnelle d'action.

Définition 1.1.2. Une fonction $I : \mathcal{X} \rightarrow [0, \infty]$ est semi-continue inférieurement en $x_0 \in \mathcal{X}$ si $\liminf_{x \rightarrow x_0} f(x) \geq f(x_0)$. La fonction I est dite tout simplement semi-continue inférieurement si I est semi-continue inférieurement en tout point de \mathcal{X} .

Définition 1.1.3. Étant donnée une fonction I , la famille $\{X^\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ satisfait un principe de grandes déviations avec une fonctionnelle d'action I si I est une bonne fonctionnelle d'action et si pour tout $\Gamma \in \mathcal{B}(X)$,

$$-\inf_{x \in \Gamma^\circ} I(x) \leq \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0+} \varepsilon \log \mathbf{P}(X^\varepsilon \in \Gamma) \leq \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0+} \varepsilon \log \mathbf{P}(X^\varepsilon \in \Gamma) \leq -\inf_{x \in \text{cl}(\Gamma)} I(x),$$

où $\text{cl}(\Gamma)$ est la fermeture et Γ° l'intérieur de Γ .

Définition 1.1.4. $\{X^\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ satisfait un principe de Laplace avec une bonne fonctionnelle d'action I si pour toute fonction F continue et bornée de \mathcal{X} , on a

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} -\varepsilon \log \mathbf{E} \left[\exp \left(-\frac{1}{\varepsilon} F(X^\varepsilon) \right) \right] = \inf_{x \in X} \{I(x) + F(x)\}.$$

1.2 Processus de diffusion

Définition 1.2.1. Un processus de diffusion X_t est un processus de Markov à trajectoire continue vérifiant la formule d'Ito

$$dX_t = f(t, X_t)dt + g(t, X_t)dB_t$$

où B_t est un mouvement brownien standard, et une diffusion est caractérisée par :

- (i) la dérive ; $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{E(X_{t+h} - X_t | X_t = x)}{h} = f(t, x)$
- (ii) la limite donnant la diffusion ; $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{E((X_{t+h} - X_t)^2 | X_t = x)}{h} = g(t, x)^2$
- (iii) la condition de Dynkin ; $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{E(|X_{t+h} - X_t| | X_t = x)}{h} = 0$.

Définition 1.2.2. Soit (E, \mathcal{E}) un espace mesuré, un noyau N sur E est une application de $E \times \mathcal{E}$ dans $\mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$ tel que :

- (i) Pour tout $x \in E$, l'application $A \mapsto N(x, A)$ est une mesure positive sur \mathcal{E}
- (ii) Pour tout $A \in \mathcal{E}$ l'application $x \mapsto N(x, A)$ est \mathcal{E} -mesurable.

Théorème 1.2.3 (Théorème de convergence dominé de Lebesgue). *Soit (f_n) une suite de fonctions mesurables positives de (E, \mathcal{A}, μ) , on suppose que :*

- (i) *il existe une fonction f mesurable à valeurs dans \mathbb{C} telle que $f_n(x) \rightarrow f(x)$ μ -presque partout*
- (ii) *il existe une fonction $g : E \rightarrow \mathbb{R}_+$ mesurable telle que $\int g d\mu < \infty$ et pour tout n , $|f_n| \leq g$ μ -presque partout.*

Alors, f est intégrable et on a :

- (i) $\lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\mu = \int f d\mu$
- (ii) $\lim_{n \rightarrow \infty} \int |f_n - f| d\mu = 0$.

1.3 Chaîne de Markov

Définition 1.3.1. Une filtration (Ω, \mathcal{F}) est une famille croissante $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ de sous-tribu de \mathcal{F} si et seulement si

$$\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}_{t+1}.$$

Définition 1.3.2. T est un temps d'arrêt relatif à la filtration (\mathcal{F}_t)

$$T : \Omega \longrightarrow [0, \infty] \text{ tel que pour tout } t \quad \{T \geq t\} \in \mathcal{F}_t, \\ \omega \longmapsto T(\omega).$$

Définition 1.3.3 (Suite tendue). Soit (X, T) un espace topologique et soit Σ une σ -algèbre sur X qui contient la topologie T .

Ainsi, tout ensemble ouvert de (X, T) est un ensemble mesurable de (X, Σ) et Σ est au moins aussi fine que la tribu borélienne sur X .

Soit M une famille de mesures (éventuellement signées ou complexes) définies sur Σ .

La famille M est dit tendue ou parfois uniformément tendue si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un ensemble compact K_ε de X tel que pour toute mesure μ de M :

$$|\mu| (X \setminus K_\varepsilon) < \varepsilon$$

où $|\mu|$ est la mesure de variation totale de μ .

Dans le cas où la famille M consiste en une seule mesure μ , la famille est alors appelée mesure tendue ou peut être une mesure intérieurement régulière.

Définition 1.3.4. Soit (Z_n) une suite de variables aléatoires de $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ à valeurs dans (E, \mathcal{E}) , où E est l'espace des états, alors, (Z_n) est une chaîne de Markov de loi initiale ν si

- (i) $\mathbb{P}(Z_0 = 0) = \nu(0)$
- (ii) $\mathbb{P}(Z_{n+1} = z_{n+1} / Z_0 = z_0, \dots, Z_n = z_n) = \mathbb{P}(Z_{n+1} = z_{n+1} / Z_n = z_n)$
- (iii) $\mathbb{Q}(z, j) = \mathbb{P}(Z_{n+1} = j / Z_n = z)$ est indépendante de n pour tous $j, z \in E$, où \mathbb{Q} est la probabilité de transition relativement à la filtration \mathcal{F}_n telle que $E(Z_{n+1} / \mathbb{F}) = \mathbb{Q}f(Z_n)$.

Théorème 1.3.5 (Propriété de Markov). Soit $(X_n, n \geq 1)$ une chaîne de Markov sur l'espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, de matrice de transition \mathbb{Q} et T un temps d'arrêt, alors, pour toute fonction f borélienne bornée, on a :

- (i) $Ef(X_{T+k}, k \geq 0 / \mathcal{F}_T) = E_{X_T}(f(X_k, k \geq 0))$
- (ii) $(X_{T+n}, n \geq 0)$ est une chaîne de Markov, de matrice de transition \mathbb{Q}
- (iii) $(X_{T+n} - X_n, n \geq 0)$ est indépendant de \mathcal{F}_T .

Définition 1.3.6. Une famille Φ des mesures de probabilité sur χ est dite lisse : si pour chaque $\varepsilon > 0$, il existe un ensemble compact K tel que

$$\inf_{\gamma \in \Phi} \gamma(K) \geq 1 - \varepsilon.$$

Chapitre 2

Énoncé du théorème principal

Nous travaillons l'espace de probabilité canonique $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$, où $\Omega \doteq \mathcal{C}([0, 1] : \mathbb{R}^d)$ et P est la mesure de Wiener d -dimensionnelle. L'espace $\mathcal{C}([0, 1] : \mathbb{R}^d)$ est doté de la métrique de sup-norme. Pour chaque $0 \leq t \leq 1$, posons $W(t, \omega) \doteq \omega(t)$ et on définit la filtration augmentée \mathcal{F}_t par

$$\mathcal{F}_t \doteq \sigma(\mathcal{F}_t^W \cup \mathcal{N}), \quad 0 \leq t \leq 1,$$

où $\mathcal{F}_t^W \doteq \{\sigma(W(s); 0 \leq s \leq t)\}$ et \mathcal{N} est la collection des ensembles P -nuls. Ensuite, le processus $\mathcal{W} \doteq \{W(t), \mathcal{F}_t, 0 \leq t \leq 1\}$ est un mouvement brownien d -dimensionnel. Pour préparer notre théorème principal, nous introduisons le concept du principe de Laplace.

2.1 Introduction sur la famille de diffusion avec la statistique discontinue

Par définition, la fonctionnelle d'action sur un espace polonais est une application de l'espace polonais vers $[0, \infty]$ avec l'ensemble de niveaux compact.

Définition 2.1.1. Soit $\{Y^\epsilon, \epsilon > 0\}$ une famille de variables aléatoires prenant ses valeurs dans un espace polonais \mathcal{Y} et soit I une fonctionnelle d'action sur \mathcal{Y} . Nous disons que $\{Y^\epsilon\}$ vérifie un principe de Laplace avec comme fonctionnelle d'action I si pour toute fonction continue et bornée h de \mathcal{Y} dans \mathbb{R} :

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon \log E \left\{ \exp \left[-\frac{h(Y^\epsilon)}{\epsilon} \right] \right\} = \inf_{y \in \mathcal{Y}} \{h(y) + I(y)\}.$$

Un principe de Laplace est équivalent à un principe de grandes déviations avec la même fonctionnelle d'action (voir théorème 2.2.1 et 2.2.3 dans [7])

pour plus de détail). Ainsi, au lieu de prouver un principe de grandes déviations pour les diffusions avec des statistiques discontinues, nous nous concentrons sur la preuve du principe de Laplace sur la même famille. C'est le contenu du théorème 2.2.1.

Considérons le processus de diffusion X^ε , solution de l'équation (1). La matrice dispersion ∂ est une matrice $d \times d$ des fonctions boréliennes mesurables d'une application \mathbb{R}^d dans \mathbb{R} . La dérive b est supposée être continue, sauf à travers l'hyperplan de dimension $(d - 1)$:

$$\partial \doteq \{x \in \mathbb{R}^d : x_1 = 0\}.$$

Plus précisément, on donne des fonctions continues $b^{(1)}$ et $b^{(2)}$, deux applications de \mathbb{R}^d dans \mathbb{R}^d , b est définie par

$$b(x) = \begin{cases} b^{(1)}(x) & \text{si } x \in \Lambda^{(1)}, \\ b^{(2)}(x) & \text{si } x \in \Lambda^{(2)}, \end{cases}$$

où

$$\Lambda^{(1)} \doteq \{x \in \mathbb{R}^d : x_1 \leq 0\} \text{ et } \Lambda^{(2)} \doteq \{x \in \mathbb{R}^d : x_1 > 0\}.$$

L'inclusion de l'hyperplan ∂ avec le demi-espace ouvert à gauche est arbitraire. Le principe de Laplace dans le théorème 2.2.1 est valable si ∂ est inclus dans le demi-espace ouvert à droite. Nous notons que le problème général où ∂ est remplacé par une variété régulière de dimension $(d - 1)$ peut être réduit à celui présenté ici par le biais de technique de localisation standard, cf [2]. Le théorème 2.2.1 énonce le principe de Laplace pour la famille $\{X^\varepsilon : \varepsilon > 0\}$ dans les conditions suivantes.

Condition 2.1. (a) $b^{(1)}$, $b^{(2)}$ et σ sont continus et sont bornés par une constante B_1 .

(b) σ est uniformément non dégénérée, c'est à dire $\sigma(\cdot)\sigma^T(\cdot) \geq cI$ pour $c > 0$.

(c) $L'EDS$ (1) a une unique solution forte.

Notation et définitions nécessaires : cf[7]

Des notations et plusieurs définitions sont nécessaires. Étant donné une mesure de probabilité μ dans \mathbb{R}^d , S_μ désigne le support de μ , qui est le plus petit ensemble fermé de μ -probabilité 1. Pour un sous-ensemble A de \mathbb{R}^d $\text{Conv}A$, $\text{aff}A$, $\text{cl}A$ et $\text{int}A$ désignent respectivement l'enveloppe convexe

de A , l'extérieure (coque) affine de A , la fermeture de A et l'intérieur de A .

Pour un sous-ensemble convexe C dans \mathbb{R}^d , $\text{ri}C$ désigne l'intérieur relatif de C , qui est l'intérieur qui se produit lorsque C est considéré comme un sous-ensemble de $\text{aff}C$. Bien entendu, si l'intérieur de C est non vide ou équivalente, si l'extérieure (coque) affine de C est égale à \mathbb{R}^d , alors $\text{ri}C = \text{int}C$. Enfin, pour une fonction convexe f sur \mathbb{R}^d , $\text{dom}f$ désigne le domaine effectif de f , qui est l'ensemble de $x \in \mathbb{R}^d$ pour lequel $f(x) < \infty$.

Fonctions convexes : Dans le cas de \mathbb{R}^d , un sous-ensemble χ d'un espace linéaire est appelé convexe : si $sx + (1-s)y$ inclus dans χ pour tout $s \in (0, 1)$ et tout x et y dans χ .

Remarques 2.1.2.

- (i) Bien que dans la partie (a), de la condition 2.1, nous supposions que les deux applications $b^{(1)}(x)$ et $b^{(2)}(x)$ sont des fonctions continues sur $x \in \mathbb{R}^d$, en général $b(x)$ n'est pas continu dans ∂ .
- (ii) Pour simplifier, nous avons supposé que $\sigma(x)$ est continue sur \mathbb{R}^d (les conditions suffisantes pour l'existence d'une solution unique forte présentée dans [20] exigent cette condition). Toutefois, aussi longtemps que l'équation différentielle stochastique (1) a unique solution forte, le résultat du théorème 2.2.1 reste valable si $\sigma(x)$ est également autorisé à être discontinu le long de l'hyperplan ∂ .
- (iii) La partie (b) de la condition 2.1 est nécessaire pour la preuve du principe de Laplace pour la borne inférieure.

Plus de commentaires sur cette hypothèse seront donnés ci-dessous. Pour $i = 1, 2$ et x et β dans \mathbb{R}^d , et soit $L^{(i)}(x, \beta)$ une fonctionnelle d'action associée par le théorème de Cramer (cf : Annexe A) avec une mesure de probabilité gaussienne sur \mathbb{R}^d , avec le vecteur moyen $b^{(i)}(x)$ et la matrice de covariance $a(x) \doteq \sigma(x)\sigma^T(x)$.

$$L^{(i)}(x, \beta) \doteq \sup_{\alpha \in \mathbb{R}^d} \left\{ \langle \alpha, \beta - b^{(i)}(x) \rangle - \frac{1}{2} \langle \alpha, a(x) \alpha \rangle \right\},$$

où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ désigne le produit scalaire euclidien sur \mathbb{R}^d . Si $\beta - b^{(i)}(x)$ se trouve dans l'image de $a(x) \cdot$, alors $\mathcal{L}^{(i)}(x, \beta)$ est définie par

$$\mathcal{L}^{(i)}(x, \beta) = \frac{1}{2} \langle \alpha, \beta - b^{(i)}(x) \rangle,$$

où $\alpha \in \mathbb{R}^d$ est tout vecteur satisfaisant $a(x)\alpha = \beta - b^{(i)}(x)$, sinon, $L^{(i)}(x, \beta)$ est égal à ∞ . Le domaine effectif de $L^{(i)}(x, \beta)$ est donc donné par

$$\text{dom} L^{(i)}(x, \beta) = \{\beta \in \mathbb{R}^d : \beta - b^{(i)}(x) = a(x)u \text{ pour chaque } u \in \mathbb{R}^d\}.$$

Par conséquent, une partie (b) de la Condition 2.1 implique que $\text{dom} L^{(i)}(x, \cdot) = \mathbb{R}^d$, pour chaque $x \in \mathbb{R}^d$. Il s'ensuit trivialement que ces ensembles sont indépendants de $x \in \mathbb{R}^d$ et de $i = 1, 2$, que $0 \in \text{ri}(\text{dom } L^{(i)}(x, \cdot))$, et que $\text{ri}(\text{dom } L^{(i)}(x, \cdot))$ n'est pas un sous-ensemble de ∂ . Ces propriétés sont nécessaires pour la preuve du principe de Laplace sur la limite inférieure.

Remarques 2.1.3. Nous pouvons en fait remplacer une partie de (b) de la Condition 2.1 avec l'hypothèse plus faible que les ensembles $\text{ri}(\text{dom} L^{(i)}(x, \cdot))$ sont indépendants de $x \in \mathbb{R}^d$ et de $i = 1, 2$, et que $0 \in \text{ri}(\text{dom} L^{(i)}(x, \cdot))$, et que $\text{ri}(\text{dom} L^{(i)}(x, \cdot))$ n'est pas un sous-ensemble de ∂ . Les preuves que nous présentons ici peuvent être généralisées pour couvrir les cas de certaines hypothèses qui sont plus faibles pour les rendre satisfaisantes. \square

Avant de passer à la définition de la fonctionnelle d'action, nous indiquons d'abord la forme de $L^{(i)}(x, \beta)$, qui sera utilisée dans la démonstration du principe de Laplace. La partie (b) de la Condition 2.1 nous permet d'écrire :

$$L^{(i)}(x, \beta) = \frac{1}{2} \|v\|^2 \text{ pour } v = \sigma^{-1}(x)(\beta - b^{(i)}(x)). \quad (2.1)$$

Afin de préciser la fonctionnelle d'action pour la famille $\{X^\varepsilon : \varepsilon > 0\}$, pour x et β dans \mathbb{R} , on définit

$$L^{(0)}(x, \beta) = \inf \{\rho^{(1)} L^{(1)}(x, \beta^{(1)}) + \rho^{(2)} L^{(2)}(x, \beta^{(2)})\}. \quad (2.2)$$

La borne inférieure est prise sur tous les $\rho^{(1)} \in \mathbb{R}$, $\rho^{(2)} \in \mathbb{R}$, $\beta^{(1)} \in \mathbb{R}^d$ et $\beta^{(2)} \in \mathbb{R}^d$ satisfaisant

$$\rho^{(1)} \geq 0, \quad \rho^{(2)} \geq 0, \quad \rho^{(1)} + \rho^{(2)} = 1, \quad (2.3)$$

$$(\beta^{(1)})_1 \geq 0, (\beta^{(2)})_1 \leq 0, \quad (2.4)$$

$$\rho^{(1)} \beta^{(1)} + \rho^{(2)} \beta^{(2)} = \beta. \quad (2.5)$$

Ensuite nous définissons pour x et β dans \mathbb{R}^d

$$\tilde{L}(x, \beta) \doteq \begin{cases} L^{(1)}(x, \beta) & \text{si } x_1 < 0, \\ L^{(0)}(x, \beta) & \text{si } x_1 = 0, \\ L^{(2)}(x, \beta) & \text{si } x_1 > 0. \end{cases} \quad (2.6)$$

La forme de la fonctionnelle d'action dans le théorème 2.2.1 est la même que celle figurant dans le principe de Laplace pour le modèle de marche aléatoire avec statistique discontinue étudiée dans le chapitre 7 de [7]. Par conséquent, nous allons tout simplement énoncer le principe de Laplace en utilisant cette fonctionnelle d'action et de renvoyer le lecteur à [7, à la page 221] pour une discussion détaillée de la façon dont cette fonctionnelle d'action peut être interprétée.

Théorème 2.1.4. *Pour toute partie A dans \mathbb{R}^d , on a $ri(ccA)$ est égal $ri(convA)$.*

Preuve. D'après le théorème 6.5 dans [19]

$$\begin{aligned} ccA &= \cap \{B : B \text{ est fermé convexe dans } \mathbb{R}^d, A \subset B\} \\ &= \cap \{clC : C \text{ est convexe dans } \mathbb{R}^d, A \subset C\} \\ &= cl(\cap \{C : C \text{ est convexe dans } \mathbb{R}^d, A \subset C\}) \\ &= cl(convA). \end{aligned}$$

Le théorème 6.3 dans [19] nous garantit l'égalité de $ri(ccA) = ri(cl(convA)) = ri(convA)$. \square

Les conditions suivantes sont satisfaites, si pour chaque $x \in \mathbb{R}^d$ le support de la mesure $\mu(dy \mid x)$ est \mathbb{R}^d . Nous rappelons que pour $x \in \mathbb{R}^d$, $ri(convS_{\mu(\cdot \mid x)})$ désigne l'intérieur relatif de l'extérieur (coque) convexe du support de $\mu(\cdot \mid x)$. Soient f_1 et f_2 deux fonctions continues et bornées lipschitziennes telles que

$$ri(domL(x, \cdot)) = \{(\beta_1, \beta_2) : \beta_1 = f_1(x_1) + f_2(x_2), \beta_2 \in \mathbb{R}\},$$

en général, cet ensemble dépend toujours de x , et il ne contient pas 0. Et on a besoin des deux conditions suivantes pour certain lemme qu'on trouve dans le chapitre quatre.

Condition 2.2. (a) Pour chaque $\alpha \in \mathbb{R}^d$,
 $\max_{i=1,2} \left(\sup_{x \in \mathbb{R}^d} H^{(i)}(x, \alpha) \right) < \infty$.

(b) Pour chaque $i = 1, 2$, la fonction appliquant $x \in \mathbb{R}^d \mapsto \mu^{(i)}(dy \mid x) \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$ est continue dans la topologie à convergence faible sur $\mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$.

Condition 2.3. (a) Les ensembles $ri(\text{conv} S_{\mu^{(i)}(\cdot \mid x)})$ sont indépendants pour $x \in \mathbb{R}^d$ et $i = 1, 2$.

(b) $0 \in \Sigma \doteq ri(\text{conv} S_{\mu^{(i)}(\cdot \mid x)})$ et Σ n'est pas un sous ensemble de $\partial \doteq \{x \in \mathbb{R}^d : x_1 = 0\}$.

2.2 Conséquence : le principe de Laplace pour la famille $\{X^\varepsilon, \varepsilon > 0\}$.

Théorème 2.2.1. Nous supposons vérifier la condition 2.1 est vérifiée. Pour tout $x_0 \in \mathbb{R}^d$ et $\varepsilon > 0$, soit $X^\varepsilon \doteq \{X^\varepsilon(t), 0 \leq t \leq 1\}$ l'unique solution forte de l'EDS,

$$dX^\varepsilon(t) = b(X^\varepsilon(t))dt + \varepsilon^{\frac{1}{2}}\sigma(X^\varepsilon(t))dW(t), \quad X^\varepsilon(0) = x_0. \quad (2.7)$$

Pour les fonctions absolument continues $\varphi \in \mathcal{C}([0, 1] : \mathbb{R}^d)$, satisfaisant $\varphi(0) = x_0$, nous définissons

$$I_{x_0}(\varphi) \doteq \int_0^1 \tilde{L}(\varphi(t), \dot{\varphi}(t))dt$$

où \tilde{L} est défini dans les équations (2.2)(2.6) ce qu'on a vu précédemment. Pour les autres $\varphi \in \mathcal{C}([0, 1] : \mathbb{R}^d)$, nous prenons $I_{x_0}(\varphi) \doteq \infty$. Alors la famille $\{X^\varepsilon : \varepsilon > 0\}$ satisfait le principe de Laplace sur $\mathcal{C}([0, 1] : \mathbb{R}^d)$ avec la fonctionnelle d'action $I_{x_0}(\cdot)$. En fait, le principe de Laplace est valable uniformément sur les compacts, c'est à dire que pour tous sous-ensembles compacts K de \mathbb{R}^d , le principe de Laplace tient uniformément quelque soit $x_0 \in K$.

Nous allons donner la preuve du principe de Laplace non uniforme dans le chapitre 4. La preuve de la version uniforme utilise les mêmes arguments, mais avec une notation plus lourde. La preuve que I_{x_0} a des ensembles de niveau compact sera omise sous la condition 2.1, il est identique à celle de la proposition 7.6.1 dans [7].

Chapitre 3

Résultats Préliminaires

Soit P_{x_0} la probabilité conditionnelle de X^ε sachant que $X^\varepsilon(0) = x_0$ et E_{x_0} désigne l'espérance correspondante. La preuve du théorème 2.2.1 exige que nous analysons le comportement asymptotique des $W^\varepsilon(x_0) \doteq -\varepsilon \log E_{x_0} \{ \exp[-h(X^\varepsilon)/\varepsilon] \}$. Une étape fondamentale dans l'approche de la convergence faible utilisée pour cette analyse est la représentation de $W^\varepsilon(x)$ en terme de fonction de coût minimal d'un problème de contrôle stochastique associé. Le but de ce chapitre est d'introduire cette représentation, d'étudier la compacité et de limiter les propriétés de certaines familles des contrôles et des processus contrôlés qui se posent dans la représentation. Nous commençons par indiquer la formule de représentation. Pour une dérivation heuristique de la forme de la représentation, nous renvoyons le lecteur à la section 4.6 dans [7]. Une preuve est donnée dans [5].

3.1 Introduction de la formule de la représentation dans la solution de l'E.D.S

Théorème 3.1.1. *On donne $\varepsilon > 0$, soit X^ε le processus de diffusion qui est l'unique solution forte pour (2.7). Alors pour toute fonction h Borélienne-mesurable bornée appliquant $\mathcal{C}([0, 1] : \mathbb{R}^d)$ dans \mathbb{R} , la représentation suivante est satisfaite :*

$$W^\varepsilon(x_0) = \inf_{v \in \mathcal{A}} E_{x_0} \left\{ \frac{1}{2} \int_0^1 \|v(t)\|^2 dt + h(X^{v,\varepsilon}) \right\},$$

où \mathcal{A} est l'ensemble de tous les processus d -dimensionnels, \mathcal{F}_t -progressivement mesurables, $v \doteq \{v(t), 0 \leq t \leq 1\}$ satisfaisant

$$E \left[\int_0^1 \|v(t)\|^2 dt \right] < \infty$$

et $X^{v,\varepsilon} \doteq \{X^{v,\varepsilon}(t), 0 \leq t \leq 1\}$ est l'unique solution forte de

$$dX^{v,\varepsilon}(t) = b(X^{v,\varepsilon}(t))dt + \sigma(X^{v,\varepsilon}(t))v(t)dt + \varepsilon^{\frac{1}{2}}\sigma(X^{v,\varepsilon}(t))dW(t), \quad X^{v,\varepsilon}(0) = x_0.$$

Nous nous référons à $X^{v,\varepsilon}$ comme la diffusion contrôlée associée au contrôle v . Soit $\{v^\varepsilon, \varepsilon > 0\}$ une famille de contrôle dans \mathcal{A} . On définit $\bar{X}^\varepsilon \doteq X^{v^\varepsilon, \varepsilon}$. Ainsi, pour chaque $\varepsilon > 0$ et $t \in [0, 1]$, l'équation

$$\bar{X}^\varepsilon(t) = x_0 + \int_0^t [b(\bar{X}^\varepsilon(s)) + \sigma(\bar{X}^\varepsilon(s))v^\varepsilon(s)]ds + \varepsilon^{\frac{1}{2}} \int_0^t \sigma(\bar{X}^\varepsilon(s))dW(s). \quad (3.1)$$

tient avec la probabilité 1. Le reste de cet chapitre est consacrée à l'étude des propriétés asymptotiques de $\{v^\varepsilon, \varepsilon > 0\}$ et de $\{\bar{X}^\varepsilon, \varepsilon > 0\}$, sous l'hypothèse que les contrôles vérifient la condition 3.1, voir ci-dessous. La condition sera automatiquement satisfaite pour les contrôles qui interviennent dans la preuve du principe de Laplace.

Condition 3.1.

$$\Delta \doteq \sup_{\varepsilon > 0} E_{x_0} \left\{ \int_0^1 \|v^\varepsilon(t)\|^2 dt \right\} < \infty.$$

Lorsque l'on étudie les propriétés asymptotiques des familles des contrôles et des processus de contrôle, la discontinuité des statistiques donne lieu à quelques difficultés. Tout d'abord, la présence de la discontinuité implique que la famille des contrôles ne peut pas converger au sens usuel. Ce n'était pas le cas dans tous les exemples traités dans [7], étant donné que les contrôles admissibles ont toujours eu des valeurs dans l'espace des mesures de probabilité sur un espace polonais, donc l'existence des limites au sens faible est assurée. Afin d'exploiter les idées de la convergence faible, nous représenterons chaque contrôle v^ε comme une mesure sur l'ensemble borélien de \mathbb{R}^d . Sous la condition 3.1, nous montrerons ci-dessous qu'il n'existe pas une sous-suite de ces mesures qui converge faiblement. Pour tout A borélien de \mathbb{R}^d et B dans $[0, 1]$ on a

$$\nu^\varepsilon(A \mid t) \doteq 1_A(v^\varepsilon(t)), \quad (3.2)$$

$$\nu^\varepsilon(A \times B) \doteq \int_B 1_A(v^\varepsilon(t))dt = \int_B \nu^\varepsilon(A \mid t)dt. \quad (3.3)$$

Les quantités $\nu^\varepsilon(\cdot \mid t)$ et $\nu^\varepsilon(\cdot)$ ont pris des valeurs dans les espaces $\mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$ et $\mathcal{P}(\mathbb{R}^d \times [0, 1])$ des mesures de probabilité respectivement dans \mathbb{R}^d et dans $\mathbb{R}^d \times [0, 1]$. La quantité $\nu^\varepsilon(A \times B)$ représente le temps total dépensé dans l'ensemble Borélien : $B \subset [0, 1]$ et que le contrôle v^ε prend ses valeurs

dans l'ensemble Borélien $A \subset \mathbb{R}^d$. Grâce à ces mesures, on peut utiliser le théorème de Fubini pour le produit de mesure, donc (3.1) peut être réécrit comme

$$\begin{aligned}\bar{X}^\varepsilon(t) &= x_0 + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} (b(\bar{X}^\varepsilon(s)) + \sigma(\bar{X}^\varepsilon(s))y) \nu^\varepsilon(dy \mid s) ds + \varepsilon^{\frac{1}{2}} \int_0^t \sigma(\bar{X}^\varepsilon(s)) dW(s) \\ &= x_0 + \int_{\mathbb{R}^d \times [0,1]} (b(\bar{X}^\varepsilon(s)) + \sigma(\bar{X}^\varepsilon(s))y) \nu^\varepsilon(dy \mid s) ds + \varepsilon^{\frac{1}{2}} \int_0^t \sigma(\bar{X}^\varepsilon(s)) dW(s).\end{aligned}$$

Une deuxième conséquence de la discontinuité des statistiques est qu'on doit prendre soin quand on analyse la fraction asymptotique de temps que les processus contrôlés \bar{X}^ε dépensent dans chacun des demi-espaces $\Lambda^{(1)}$ et $\Lambda^{(2)}$. Pour cela, nous devons considérer des mesures supplémentaires. On définit

$$\nu^{(1),\varepsilon}(A \times B) \doteq \int_B 1_{\{s \in [0,1]: (\bar{X}^\varepsilon(s))_1 \leq 0\}}(t) \nu^\varepsilon(A \mid t) dt, \quad (3.4)$$

$$\nu^{(2),\varepsilon}(A \times B) \doteq \int_B 1_{\{s \in [0,1]: (\bar{X}^\varepsilon(s))_1 > 0\}}(t) \nu^\varepsilon(A \mid t) dt. \quad (3.5)$$

Ces quantités prennent des valeurs dans l'espace $\mathcal{M}(\mathbb{R}^d \times [0, 1])$ des mesures de sous-probabilités dans $\mathbb{R}^d \times [0, 1]$ c'est à dire pour tout $i = 1, 2$, $\nu^{(i),\varepsilon}(\mathbb{R}^d \times [0, 1]) \leq 1$. En termes de ces mesures, nous pouvons encore réécrire

$$\begin{aligned}\bar{X}^\varepsilon(t) &= x_0 + \int_{\mathbb{R}^d \times [0,t]} (b^{(1)}(\bar{X}^\varepsilon(s)) + \sigma(\bar{X}^\varepsilon(s))y) \nu^{(1),\varepsilon}(dy \times ds) \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}^d \times [0,t]} (b^{(2)}(\bar{X}^\varepsilon(s)) + \sigma(\bar{X}^\varepsilon(s))y) \nu^{(2),\varepsilon}(dy \times ds) \\ &\quad + \varepsilon^{\frac{1}{2}} \int_0^t \sigma(\bar{X}^\varepsilon(s)) dW(s).\end{aligned} \quad (3.6)$$

Enfin, on définit $\gamma^{(1),\varepsilon}$ et $\gamma^{(2),\varepsilon}$ pour la deuxième marginale respective de $\nu^{(1),\varepsilon}$ et $\nu^{(2),\varepsilon}$. Ainsi

$$\gamma^{(1),\varepsilon}(B) \doteq \nu^{(1),\varepsilon}(\mathbb{R}^d \times B) = \int_B 1_{\{s \in [0,1]: (\bar{X}^\varepsilon(s))_1 \leq 0\}}(t) dt \quad (3.7)$$

et

$$\gamma^{(2),\varepsilon}(B) \doteq \nu^{(2),\varepsilon}(\mathbb{R}^d \times B) = \int_B 1_{\{s \in [0,1]: (\bar{X}^\varepsilon(s))_1 > 0\}}(t) dt. \quad (3.8)$$

Ces quantités sont la mesure de Lebesgue sur les ensembles de temps $t \in B$ à laquelle $\bar{X}^\varepsilon(t)$ reste dans les demi-espaces respectifs; $\gamma^{(1),\varepsilon}$ et $\gamma^{(2),\varepsilon}$ prennent des valeurs dans $\mathcal{M}([0, 1])$. Pour $i = 1, 2$

$$\nu^{(i),\varepsilon}(A \times B) = \int_B \nu^\varepsilon(A \mid t) \gamma^{(i),\varepsilon}(dt).$$

La proposition suivante donne la tension de la famille $\{(\nu^\varepsilon, \nu^{(1),\varepsilon}, \nu^{(2),\varepsilon}, \gamma^{(1),\varepsilon}, \gamma^{(2),\varepsilon}), \varepsilon > 0\}$ aussi bien que la propriété d' uniforme intégrabilité de $\{\nu^\varepsilon, \varepsilon > 0\}$, $\{\nu^{(1),\varepsilon}, \varepsilon > 0\}$ et $\{\nu^{(2),\varepsilon}, \varepsilon > 0\}$.

Proposition 3.1.2. *On donne $x_0 \in \mathbb{R}$, considérons la famille $\{\nu^\varepsilon, \varepsilon > 0\}$ des contrôles dans l' ensemble \mathcal{A} satisfaisant la condition 3.1. Alors, on a*

- (a) *La famille $\{(\nu^\varepsilon, \nu^{(1),\varepsilon}, \nu^{(2),\varepsilon}, \gamma^{(1),\varepsilon}, \gamma^{(2),\varepsilon}), \varepsilon > 0\}$ est tendue.*
- (b) *Les familles $\{\nu^\varepsilon, \varepsilon > 0\}$ et $\{\nu^{(i),\varepsilon}, \varepsilon > 0\}$ pour $i = 1, 2$, ont les propriétés de l'intégrabilité uniforme*

$$\lim_{C \rightarrow \infty} \sup_{\varepsilon > 0} E_{x_0} \left\{ \int_{\{y \in \mathbb{R}^d: \|y\| > C\} \times [0,1]} \|y\| \nu^\varepsilon(dy \times dt) \right\} = 0 \quad (3.9)$$

et

$$\lim_{C \rightarrow \infty} \sup_{\varepsilon > 0} E_{x_0} \left\{ \int_{\{y \in \mathbb{R}^d: \|y\| > C\} \times [0,1]} \|y\| \nu^{(i),\varepsilon}(dy \times dt) \right\} = 0. \quad (3.10)$$

Preuve. D'après la preuve de la proposition 7.4.2 de [7], pour chaque $\alpha \in \mathbb{R}^d$, si

$$H^{(i)}(x, \alpha) = \log \int_{\mathbb{R}^d} \exp \langle \alpha, y \rangle \mu^{(i)}(dy \mid x),$$

on a $\max_{i=1,2} (\sup_{x \in \mathbb{R}^d} H^{(i)}(x, \alpha)) < \infty$ implique que $\sup_{x \in \mathbb{R}^d} H^{(i)}(x, \alpha) < \infty$ et en utilisant la proposition 5.3.2 de [7] alors la quantité (3.9) implique la tension de $\{\nu^\varepsilon, \varepsilon > 0\}$. Nous nous concentrerons donc sur la preuve de (3.9), pour $C > 0$. Par définition de $\|y\| = \|y\| 1_{\{z \in \mathbb{R}^d: \|z\| > C\}}(y) + \|y\| 1_{\{z \in \mathbb{R}^d: \|z\| \leq C\}}(y)$ cf[7]. On a :

$$\begin{aligned} & \sup_{\varepsilon > 0} E_{x_0} \left\{ \int_{\{y \in \mathbb{R}^d: \|y\| > C\} \times [0,1]} \|y\| \nu^\varepsilon(dy \times dt) \right\} \\ & + \sup_{\varepsilon > 0} E_{x_0} \left\{ \int_{\mathbb{R}^d \times [0,1]} \|y\| 1_{\{z \in \mathbb{R}^d: \|z\| \leq C\}}(y) \nu^\varepsilon(dy \times dt) \right\}, \end{aligned}$$

comme nous travaillons pour $\|z\| > C$, $z \in \mathbb{R}^d$. On a

$$\begin{aligned} & \sup_{\varepsilon > 0} E_{x_0} \left\{ \int_{\{y \in \mathbb{R}^d: \|y\| > C\} \times [0,1]} \|y\| \nu^\varepsilon(dy \times dt) \right\} \\ & = \sup_{\varepsilon > 0} E_{x_0} \left\{ \int_{\mathbb{R}^d \times [0,1]} \|y\| 1_{\{z \in \mathbb{R}^d: \|z\| > C\}}(y) \nu^\varepsilon(dy \times dt) \right\}. \end{aligned}$$

D'après la définition de $\nu^\varepsilon(dy \times dt) = \nu^\varepsilon(dy | t) \otimes dt$ cf[7] et le produit de mesure sur \mathbb{R}^d . On a donc $\nu^\varepsilon(dy | t) \otimes dt = \nu^\varepsilon(dy | t)dt$, et ce dernier est égale à

$$= \sup_{\varepsilon > 0} E_{x_0} \left\{ \int_0^1 \int_{\mathbb{R}^d} \|y\| 1_{\{z \in \mathbb{R}^d : \|z\| > C\}}(y) \nu^\varepsilon(dy | t) dt \right\}.$$

Et comme $\|y\|$ varie dans \mathbb{R}^d et sous la condition 3.1 quantité première ligne, en posant $y = \nu^\varepsilon(t)$

$$\begin{aligned} & \sup_{\varepsilon > 0} E_{x_0} \left\{ \int_0^1 \int_{\mathbb{R}^d} \|y\| 1_{\{z \in \mathbb{R}^d : \|z\| > C\}}(y) \nu^\varepsilon(dy | t) dt \right\} \\ &= \sup_{\varepsilon > 0} E_{x_0} \left\{ \int_0^1 \nu^\varepsilon(\{v^\varepsilon(t) \in \mathbb{R}^d : \|v^\varepsilon(t)\| > C\} | t) dt \right\}. \end{aligned}$$

Sous l'action de la famille de contrôle $\{v^\varepsilon, \varepsilon > 0\}$ et sous la condition 3.1 quantité deuxième ligne, on a l'égalité suivante

$$\begin{aligned} & \sup_{\varepsilon > 0} E_{x_0} \left\{ \int_0^1 \nu^\varepsilon(\{v^\varepsilon(t) \in \mathbb{R}^d : \|v^\varepsilon(t)\| > C\} | t) dt \right\} \\ &= \sup_{\varepsilon > 0} E_{x_0} \left\{ \int_0^1 1_{\{v^\varepsilon(t) \in \mathbb{R}^d : \|v^\varepsilon(t)\| > C\}} \|v^\varepsilon(t)\| dt \right\} \\ &= \sup_{\varepsilon > 0} E_{x_0} \left\{ \int_{\{t \in [0,1] : \|v^\varepsilon(t)\| > C\}} \|v^\varepsilon(t)\| dt \right\} \\ &\leq \sup_{\varepsilon > 0} E_{x_0} \left\{ \frac{1}{C} \int_{\{t \in [0,1] : \|v^\varepsilon(t)\| > C\}} \|v^\varepsilon(t)\|^2 dt \right\} \leq \frac{\Delta}{C}. \end{aligned}$$

On fait tendre $C \rightarrow \infty$ pour avoir (3.9).

Comme $\nu^\varepsilon = \nu^{(1),\varepsilon} + \nu^{(2),\varepsilon}$, il s'ensuit que pour $i = 1, 2$ et toute fonction mesurable positive ou nulle g de $\mathbb{R}^d \times [0, 1]$ dans $[0, \infty]$, on a

$$0 \leq \int_{\mathbb{R}^d \times [0,1]} g(y, t) \nu^{(i),\varepsilon}(dy \times dt) \leq \int_{\mathbb{R}^d \times [0,1]} g(y, t) \nu^\varepsilon(dy \times dt).$$

Par conséquent, (3.9) implique (3.10), ce qui donne la tension des familles individuelles $\{\nu^{(1),\varepsilon}, \varepsilon > 0\}$ et $\{\nu^{(2),\varepsilon}, \varepsilon > 0\}$. Les mesures aléatoires $\gamma^{(1),\varepsilon}$ et $\gamma^{(2),\varepsilon}$ prennent des valeurs dans $\mathcal{M}([0, 1])$, qui est compact, puisque $[0, 1]$ est compact [7, corollaire A.3.16]. Nous concluons donc que $\{(\nu^\varepsilon, \nu^{(1),\varepsilon}, \nu^{(2),\varepsilon}, \gamma^{(1),\varepsilon}, \gamma^{(2),\varepsilon}), \varepsilon > 0\}$ est tendue. \square

Le théorème 3.2.1 ci-dessous analyse les propriétés de convergence des mesures de contrôle et des processus contrôlés. Avant d'énoncer, nous donnons les décompositions de certaines quantités qui se trouvent dans ce

théorème. Nous rappelons que si $(\mathcal{V}, \mathcal{A})$ est un espace mesurable alors \mathcal{Y} est un espace polonais, la famille $\{\tau(dy | x), x \in \mathcal{V}\}$ peut être une mesure de probabilité (resp., sous-probabilité), mesure sur \mathcal{Y} qui est un noyau stochastique (resp., un noyau sous-stochastique) de \mathcal{Y} donné par \mathcal{V} si pour tout sous-ensemble borélien B de \mathcal{Y} l'application $x \in \mathcal{V} \mapsto \tau(B | x) \in [0, 1]$ est mesurable.

Soient $\{(\nu, \nu^{(1)}, \nu^{(2)}, \gamma^{(1)}, \gamma^{(2)})\}$ les limites des sous-suites convergentes $\{(\nu^\varepsilon, \nu^{(1),\varepsilon}, \nu^{(2),\varepsilon}, \gamma^{(1),\varepsilon}, \gamma^{(2),\varepsilon}), \varepsilon > 0\}$. Ces limites peuvent être définies sur un espace de probabilité (Ω, \mathcal{F}, P) , afin que les énoncés suivants soient satisfaits. Pour $i = 1, 2$ et pour tout sous-ensemble Borélien A de \mathbb{R}^d et B sur $[0, 1]$, P_{x_0} presque sûrement pour $\omega \in \Omega$,

$$\nu(A \times B | \omega) = \int_B \nu(A | t, \omega) dt \quad (3.11)$$

pour certains noyaux stochastiques $\nu(dy | t, \omega)$;

$$\nu^{(i)}(A \times B | \omega) = \int_B \nu^{(i)}(A | t, \omega) dt \quad (3.12)$$

pour certains noyaux sous stochastiques $\nu^{(i)}(dy | t, \omega)$ et

$$\gamma^{(i)}(B | \omega) = \int_B \hat{\gamma}^{(i)}(t, \omega) dt \quad (3.13)$$

pour tout $\hat{\gamma}^{(i)}(t, \omega)$ fonction mesurable. En outre, nous avons, avec la probabilité 1 et pour chaque $t \in [0, 1]$,

$$\nu^{(1)}(dy | t, \omega) + \nu^{(2)}(dy | t, \omega) = \nu(dy | t, \omega) \quad (3.14)$$

et pour chaque $\omega \in \Omega$ et chaque $t \in [0, 1]$ $\hat{\gamma}^{(i)}(t, \omega) = \nu^{(i)}(\mathbb{R}^d | t, \omega)$. Dans la suite, les quantités (3.11) (3.12) seront résumées comme

$$\nu(dy \times dt) = \nu(dy | t) \otimes dt, \nu^{(i)}(dy \times dt) = \nu^{(i)}(dy | t) \otimes dt \text{ et } \gamma^{(i)}(dt) = \hat{\gamma}^{(i)} dt$$

respectivement. Les détails pour la dérivation de ces décompositions dans une situation analogue peuvent être trouvés dans le lemme 7.4.3 de [7]. Nous faisons remarquer, cependant, que la preuve de ces décompositions, la preuve de théorèmes 2.2.1 et le théorème 3.2.1 ci-dessous font usage du théorème de représentation de Skorohod [11, Théorème 1,8], qui implique l'introduction d'un nouvel espace de probabilité. Nous avons retenu la notation (Ω, \mathcal{F}, P) pour ce nouvel espace, et nous allons suivre la même convention dans toute la suite. Le théorème suivant concerne les points-limites de la famille $\{(\nu^\varepsilon, \nu^{(1),\varepsilon}, \nu^{(2),\varepsilon}, \gamma^{(1),\varepsilon}, \gamma^{(2),\varepsilon}), \varepsilon > 0\}$ avec les limites de la famille $\{\bar{X}^\varepsilon, \varepsilon > 0\}$. En particulier, il tire plusieurs propriétés clés des quantités-limites $\nu, \nu^{(1)}, \nu^{(2)}, \gamma^{(1)}, \gamma^{(2)}$ et \bar{X} .

3.2 Les résultats généraux de compacité et de convergence

Théorème 3.2.1. *Supposons la condition 2.1. On donne $x_0 \in \mathbb{R}^d$, considérons la famille $\{\nu^\varepsilon, \varepsilon > 0\}$ des processus \mathcal{A} satisfaisant la condition 3.1. Alors, on a*

- (a) *Étant donnée une sous-suite de $\{(\nu^\varepsilon, \nu^{(1),\varepsilon}, \nu^{(2),\varepsilon}, \gamma^{(1),\varepsilon}, \gamma^{(2),\varepsilon}, \bar{X}^\varepsilon), \varepsilon > 0\}$, il existe une sous sous-suite, un espace de probabilité (Ω, \mathcal{F}, P) , un noyau stochastique ν sur $\mathbb{R}^d \times [0, 1]$ donné dans Ω , des noyaux sous-stochastiques de $\nu^{(1)}$ et $\nu^{(2)}$ sur $\mathbb{R}^d \times [0, 1]$ donné dans Ω , des noyaux sous-stochastiques $\gamma^{(1)}$ et $\gamma^{(2)}$ sur $[0, 1]$ donné dans Ω , et une variable aléatoire \bar{X} appliquant Ω dans $\mathcal{C}([0, 1] : \mathbb{R}^d)$ tels que la sous sous-suite converge en distribution vers $(\nu, \nu^{(1)}, \nu^{(2)}, \gamma^{(1)}, \gamma^{(2)}, \bar{X})$. Les (sous) noyaux stochastiques ont donné les décompositions (3.11) – (3.14)*
- (b) *Avec la probabilité 1, pour chaque $t \in [0, 1]$*

$$\begin{aligned} \bar{X}(t) &= x_0 + \int_{\mathbb{R}^d \times [0, t]} (b^{(1)}(\bar{X}(s)) + \sigma(\bar{X}(s))y) \nu^{(1)}(dy \times ds) \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}^d \times [0, t]} (b^{(2)}(\bar{X}(s)) + \sigma(\bar{X}(s))y) \nu^{(2)}(dy \times ds) \end{aligned} \quad (3.15)$$

$$\begin{aligned} &= x_0 + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} (b^{(1)}(\bar{X}(s)) + \sigma(\bar{X}(s))y) \nu^{(1)}(dy|s) ds \\ &\quad + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} (b^{(2)}(\bar{X}(s)) + \sigma(\bar{X}(s))y) \nu^{(2)}(dy|s) ds, \end{aligned} \quad (3.16)$$

et $\bar{X}(t)$ est une fonction absolument continue dans $t \in [0, 1]$. Par conséquent, presque pour tout $t \in [0, 1]$ la dérivée de $\bar{X}(t)$ est donnée par

$$\begin{aligned} \dot{\bar{X}}(t) &= \int_{\mathbb{R}^d} (b^{(1)}(\bar{X}(t)) + \sigma(\bar{X}(t))y) \nu^{(1)}(dy | t) \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}^d} (b^{(2)}(\bar{X}(t)) + \sigma(\bar{X}(t))y) \nu^{(2)}(dy | t). \end{aligned} \quad (3.17)$$

- (c) *Avec la probabilité 1, nous avons presque sûrement(par rapport à la mesure de Lebesgue) pour tout $t \in [0, 1]$,*

$$\begin{aligned} (\bar{X}(t))_1 < 0 &\text{ implique que } \hat{\gamma}^{(1)}(t) = \nu^{(1)}(\mathbb{R}^d | t) = 1 \text{ et} \\ \hat{\gamma}^{(2)}(t) &= \nu^{(2)}(\mathbb{R}^d | t) = 0, \\ (\bar{X}(t))_1 > 0 &\text{ implique que } \hat{\gamma}^{(2)}(t) = \nu^{(2)}(\mathbb{R}^d | t) = 1 \text{ et} \\ \hat{\gamma}^{(1)}(t) &= \nu^{(1)}(\mathbb{R}^d | t) = 0, \end{aligned} \quad (3.18)$$

et pour toute valeur de $(\bar{X}(t))_1$,

$$\hat{\gamma}^{(1)}(t) + \hat{\gamma}^{(2)}(t) = \nu^{(1)}(\mathbb{R}^d | t) + \nu^{(2)}(\mathbb{R}^d | t) = 1. \quad (3.19)$$

(d) Avec la probabilité 1, nous avons presque sûrement pour tout $t \in [0, 1]$ lorsque $(\bar{X}(t))_1 = 0$

$$\left(\int_{\mathbb{R}^d} (b^{(1)}(\bar{X}(t)) + \sigma(\bar{X}(t))y) \nu^{(1)}(dy | t) \right)_1 \geq 0 \quad (3.20)$$

et

$$\left(\int_{\mathbb{R}^d} (b^{(2)}(\bar{X}(t)) + \sigma(\bar{X}(t))y) \nu^{(2)}(dy | t) \right)_1 \leq 0. \quad (3.21)$$

Preuve. (a) La tension de $\{\bar{X}^\varepsilon, \varepsilon > 0\}$ peut être vérifiée sous les conditions 2.1 et 3.1. La convergence de la distribution affirmée dans la partie (a) est une conséquence de la tension de cette famille avec la partie (a) de la proposition 3.1.2. L'identification des quantités-limites est donnée dans (3.11) - (3.13) et dans la partie (b) du présent théorème.

(b) La tension de la famille $\{\bar{X}^\varepsilon, \varepsilon > 0\}$ implique que pour toute sous-suite de $\varepsilon > 0$ il existe une sous sous-suite et une variable aléatoire \bar{X} à valeurs dans $\mathcal{C}([0, 1] : \mathbb{R}^d)$ telle que $\bar{X}^\varepsilon \xrightarrow{\mathcal{D}} \bar{X}$. Nous invoquons le théorème de représentation de Skorohod (cf Annexe A), cela nous permet de supposer que $\bar{X}^\varepsilon \rightarrow \bar{X}$ avec la probabilité 1.

Il reste à montrer qu'avec la probabilité 1, $\bar{X}(t)$ satisfait (3.15) et (3.16) pour tout $t \in [0, 1]$.

Nous commençons par montrer que pour chaque $i = 1, 2$, et $t \in [0, 1]$ et pour chaque fonction continue bornée g de $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ dans \mathbb{R} , on a

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^d \times [0, t]} g(\bar{X}^\varepsilon(s), y) \nu^{(i), \varepsilon}(dy \times ds) = \int_{\mathbb{R}^d \times [0, t]} g(\bar{X}(s), y) \nu^{(i)}(dy \times ds). \quad (3.22)$$

Grâce à [7, Théorème A.3.10], tout ce que nous avons besoin de vérifier est que l'ensemble des points $(y, s) \in \mathbb{R}^d \times [0, 1]$ tels que

$$g(\bar{X}^\varepsilon(s^\varepsilon), y^\varepsilon) 1_{[0, t]}(s^\varepsilon) \longrightarrow g(X(s), y) 1_{[0, t]}(s)$$

n'est pas toujours vraie pour une suite $\{(y^\varepsilon, s^\varepsilon), \varepsilon > 0\}$ convergeant vers (y, s) forme un ensemble de $\nu^{(i)}$ -mesure nulle. Puisqu'avec la probabilité 1 $\nu^{(i), \varepsilon} \Rightarrow \nu^{(i)}$ et \bar{X}^ε convergent uniformément vers le processus continu X , cet ensemble est un sous-ensemble de $\mathbb{R}^d \times \{t\}$. Puisque la seconde marginale de $\nu^{(i)}$ est égale à la mesure de Lebesgue λ dans $[0, 1]$, avec la probabilité 1 $\nu^{(i)}(\mathbb{R}^d \times \{t\}) = \lambda(\{t\}) = 0$, ce qui donne (3.22).

Puisque $b^{(i)}$ est bornée et continue pour chaque $i = 1, 2$, (3.22) implique immédiatement

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^d \times [0, t]} b^{(i)}(\bar{X}^\varepsilon(s)) \nu^{(i), \varepsilon}(dy \times ds) = \int_{\mathbb{R}^d \times [0, t]} b^{(i)}(\bar{X}(s)) \nu^{(i)}(dy \times ds) \quad (3.23)$$

avec la probabilité 1. Pour $0 < C < \infty$ et soit $\varphi_C(y) \doteq y$ si $\|y\| \leq C$ et $\varphi_C(y) \doteq C \frac{y}{\|y\|}$ si $\|y\| > C$. Aussi, pour $i = 1, 2$, on définit

$$\psi^{(i), \varepsilon}(C) \doteq E_{x_0} \left\{ \int_{\{y \in \mathbb{R}^d : \|y\| > C\} \times [0, 1]} \|y\| \nu^{(i), \varepsilon}(dy \times ds) \right\}$$

et

$$\psi^{(i)}(C) \doteq E_{x_0} \left\{ \int_{\{y \in \mathbb{R}^d : \|y\| > C\} \times [0, 1]} \|y\| \nu^{(i)}(dy \times ds) \right\}.$$

Comme on le voit dans le théorème 5.3.5 de [5], une version du lemme de Fatou implique

$$\psi^{(i)}(C) \leq \sup_{\varepsilon > 0} \psi^{(i), \varepsilon}(C). \quad (3.24)$$

Pour tout $\xi > 0$, nous utilisons ces définitions et l'inégalité de Tchebychev pour écrire

$$\begin{aligned} & P_{x_0} \left\{ \left\| \int_{\mathbb{R}^d \times [0, t]} \sigma(\bar{X}^\varepsilon(s)) y \nu^{(i), \varepsilon}(dy \times ds) - \int_{\mathbb{R}^d \times [0, t]} \sigma(\bar{X}(s)) y \nu^{(i)}(dy \times ds) \right\| \geq \xi \right\} \\ & \leq \frac{1}{\xi} E_{x_0} \left\{ \left\| \int_{\mathbb{R}^d \times [0, t]} \sigma(\bar{X}^\varepsilon(s)) y \nu^{(i), \varepsilon}(dy \times ds) - \int_{\mathbb{R}^d \times [0, t]} \sigma(\bar{X}(s)) y \nu^{(i)}(dy \times ds) \right\| \right\} \\ & \leq \frac{1}{\xi} E_{x_0} \left\{ \left\| \int_{\mathbb{R}^d \times [0, t]} \sigma(\bar{X}^\varepsilon(s)) \varphi_C(y) \nu^{(i), \varepsilon}(dy \times ds) \right\| \right\} \\ & \quad - \frac{1}{\xi} E_{x_0} \left\{ \left\| \int_{\mathbb{R}^d \times [0, t]} \sigma(\bar{X}(s)) \varphi_C(y) \nu^{(i)}(dy \times ds) \right\| \right\} \\ & \quad + \frac{2B_1}{\xi} \left[\sup_{\varepsilon > 0} \psi^{(i), \varepsilon}(C) + \psi^{(i)}(C) \right]. \end{aligned}$$

Nous faisons tendre $\varepsilon \rightarrow 0$ puis $C \rightarrow \infty$. L'avant-dernière ligne dans la démonstration ci-dessus converge vers zéro en raison de (3.22) et le théorème de convergence dominée de Lebesgue. En combinant la proposition 3.1.2 avec (3.24), nous obtenons également la convergence de la dernière ligne vers zéro. Par conséquent, quand $\varepsilon \rightarrow 0$ nous avons

$$\int_{\mathbb{R}^d \times [0, t]} \sigma(\bar{X}^\varepsilon(s)) y \nu^{(i), \varepsilon}(dy \times ds) \rightarrow \int_{\mathbb{R}^d \times [0, t]} \sigma(\bar{X}(s)) y \nu^{(i)}(dy \times ds) \quad (3.25)$$

en probabilité. De (3.6) nous avons

$$\begin{aligned}
& \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \bar{X}^\varepsilon(t) \\
&= x_0 + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \varepsilon^{\frac{1}{2}} \int_0^t \sigma(\bar{X}^\varepsilon(s)) dW(s) + \sum_{i=1,2} \left[\int_{\mathbb{R}^d \times [0,t]} b^{(i)}(\bar{X}^\varepsilon(s)) \nu^{(i)}(dy \times ds) \right] \right\} \\
&\quad + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \sum_{i=1,2} \left[\int_{\mathbb{R}^d \times [0,t]} \sigma(\bar{X}^\varepsilon(s)) y \nu^{(i),\varepsilon}(dy \times ds) \right] \right\}. \tag{3.26}
\end{aligned}$$

Le côté gauche de (3.26) converge avec la probabilité 1 vers $\bar{X}(t)$, en raison de la convergence uniforme de \bar{X}^ε vers \bar{X} . En prenant une sous-suite si nécessaire, (3.23), (3.25) et la convergence avec la probabilité 1 de l'intégrale stochastique vers zéro implique que le côté droit de (3.26) est égal au côté droit de (3.15), ce que nous voulions montrer. La formule (3.16) est maintenant une conséquence de la décomposition de (3.14) et la borne

$$E_{x_0} \left\{ \int_{\mathbb{R}^d \times [0,1]} \|y\| \nu^{(i)}(dy \times dt) \right\} < \infty,$$

valable pour $i = 1, 2$. Il s'ensuit que \bar{X} est une fonction absolument continue de $t \in [0, 1]$, et l'expression de $\bar{X}(t)$ est immédiate.

Pour le reste de la preuve nous invoquons à nouveau le théorème de représentation de Skorohod, ce qui nous permet de supposer que la convergence affirmée dans la partie (a) et (b) a lieu avec la probabilité 1.

Pour la partie(c), elle est une conséquence relativement simple de la convergence faible et de la définition des différentes mesures. En effet, on suppose la mesure de Lebesgue sur $[0,1]$ par λ . Puisque, pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $\gamma^{(1),n} + \gamma^{(2),n} = \lambda$, nous avons avec la probabilité 1 $\gamma^{(1)} + \gamma^{(2)} = \lambda$. Ainsi avec la probabilité 1, et à partir de la partie (c) du lemme 7.4.3 dans [7]; les densités respectives satisfont presque sûrement pour tout $t \in [0, 1]$ et

$$\hat{\gamma}^{(1)}(t) + \hat{\gamma}^{(2)}(t) = \nu^{(1)}(\mathbb{R}^d | t) + \nu^{(2)}(\mathbb{R}^d | t) = 1.$$

Cela nous donne la quantité (3.19).

Nous pouvons ensuite prouver la première ligne de la quantité (3.18). Avec la probabilité 1, et comme $\bar{X}(t)$ est une fonction continue sur $t \in [0, 1]$, il existe des variable aléatoires a_i et b_i satisfaisant $0 \leq a_i \leq b_i \leq 1$ et indexées par $i \in \mathbb{N}$ telle que

$$\{t \in [0, 1] : (\bar{X}(t))_1 < 0\} = U_{i \in \mathbb{N}}(a_i, b_i).$$

Choisissons l'une des $\omega \in \bar{\Omega}$ telle que $(\bar{X}(t, \omega))_1 < 0$ pour tout $t \in (a_i(\omega), b_i(\omega))$. Puis, pour tout $\delta > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ telle que $(\bar{X}^n(s))_1 < 0$ pour toute $n \geq N$ et pour tout $s \in (a_i + \delta, b_i - \delta)$.

Par conséquent

$$\nu^{(2),n}(\mathbb{R}^d \times (a_i + \delta, b_i - \delta)) = \int_{\mathbb{R}^d \times [0,1]} 1_{(a_i+\delta, b_i-\delta)}(s) \nu^{(2),n}(dy \times ds) = 0.$$

avec la probabilité 1, et comme $\nu^{(2),n} \implies \nu^{(2)}$, il en résulte que

$$\nu^{(2)}(\mathbb{R}^d \times (a_i + \delta, b_i - \delta)) = \int_{a_i-\delta}^{b_i-\delta} \nu^{(2)}(\mathbb{R}^d \mid s) ds = 0.$$

On va faire tendre $\delta \longrightarrow 0$, nous obtenons avec la probabilité 1

$$\int_{a_i-\delta}^{b_i-\delta} \nu^{(2)}(\mathbb{R}^d \mid s) ds = 0.$$

Avec la probabilité 1, cela implique que pour presque tout $s \in (a_i, b_i)$ $\hat{\gamma}^{(2)}(s) = \nu^{(2)}(\mathbb{R}^d \mid s) = 0$ ainsi que $\nu^{(1)}(\mathbb{R}^d \mid s) = \hat{\gamma}^{(1)}(s) = 1$ [7, Lemme 7.4.3 (c)]. Cela achève la démonstration de la première ligne de la quantité (3.18). La deuxième ligne est prouvée de façon similaire.

(d) Nous fixons temporairement $m > 0$. La première étape de la preuve est de construire une approximation de la fonction G de \mathbb{R} dans \mathbb{R} définie par

$$G(z) \doteq \begin{cases} |z| & \text{si } |z| \leq m \\ m & \text{si } |z| > m. \end{cases}$$

Pour chaque $\kappa > 0$, soient $G_\kappa(x)$ une fonction deux fois continûment différentiable de $z \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ tels que

$$|G_\kappa(z)| \leq 2m \text{ pour tout } z \in \mathbb{R}$$

$$G_\kappa(z) = G(z) \text{ pour } |z| \leq m,$$

$$|d^2 G_\kappa(z)/dz^2| < B_0 \text{ pour } |z| > m/4,$$

où $B_0 < \infty$ dépend de $\kappa > 0$. On définit

$$g_\kappa(z) \doteq \begin{cases} dG_\kappa(z)/dz & \text{si } z \neq 0 \\ -1 & \text{si } z = 0. \end{cases}$$

Par une suite appropriée définissant $G_\kappa(z)$, nous pouvons supposer que, pour $|z| > m$, $g_\kappa(z) \rightarrow 0$ si $\kappa \rightarrow 0$ et qu'elle est uniformément bornée pour $\kappa > 0$ et $z \in \mathbb{R}$. Bien que g_κ ne soit pas continue sur tout \mathbb{R} , les restrictions de g_κ sur $(-\infty, 0]$ et sur $(0, \infty)$ sont bornées et continues, et g_κ est Lipschitzienne continue pour $|z| \geq m/4$ avec une constante B_0 .

Pour deux points quelconques x et y dans \mathbb{R} , $4m \geq G_\kappa(x) - G_\kappa(y)$. La substitution $x = (\bar{X}^\varepsilon(1))_1$ et $y = (\bar{X}^\varepsilon(0))_1$ dans cette relation nous donne $4m \geq G_\kappa((\bar{X}^\varepsilon(1))_1) - G_\kappa((\bar{X}^\varepsilon(0))_1)$. Comme G_κ peut être écrit comme la somme d'une fonction deux fois continûment différentiable et d'une fonction convexe, nous pouvons appliquer la formule généralisée d'Itô [14, théorème 7.1] à la semi-martingale $G_\kappa((\bar{X}^\varepsilon(t))_1)$ pour obtenir

$$\begin{aligned} 4m &\geq G_\kappa((\bar{X}^\varepsilon(1))_1) - G_\kappa((\bar{X}^\varepsilon(0))_1) \\ &= \int_0^1 g_\kappa((\bar{X}^\varepsilon(s))_1) (b(\bar{X}^\varepsilon(s)) + \sigma(\bar{X}^\varepsilon(s))v^\varepsilon(s))_1 ds \\ &\quad + \varepsilon^{\frac{1}{2}} \sum_{i=1}^d \int_0^1 g_\kappa((\bar{X}^\varepsilon(s))_1) \sigma_{1i}(\bar{X}^\varepsilon(s)) dW^{(i)}(s) \\ &\quad + \frac{\varepsilon}{2} \int_0^1 \frac{d^2 G_\kappa}{dx^2}((\bar{X}^\varepsilon(s))_1) a_{11}(\bar{X}^\varepsilon(s)) ds + 2\Lambda_1(0). \end{aligned}$$

Ici $a(x)$ est la matrice diffusion $a(x) \doteq \sigma(x)\sigma^T(x)$ et $\Lambda_t(0)$ désigne la semi-martingale temps local de $(\bar{X}^\varepsilon(\cdot))_1$ à l'origine. La définition de G_κ , la condition 2.1, et la non-négativité du temps local impliquent que

$$\begin{aligned} 4m &\geq \int_{\mathbb{R}^d \times [0,1]} g_\kappa((\bar{X}^\varepsilon(s))_1) (b(\bar{X}^\varepsilon(s)) + \sigma(\bar{X}^\varepsilon(s))y)_1 \nu^\varepsilon(dy \times ds) \quad (3.27) \\ &\quad + \varepsilon^{\frac{1}{2}} \sum_{i=1}^d \int_0^1 g_\kappa((\bar{X}^\varepsilon(s))_1) \sigma_{1i}(\bar{X}^\varepsilon(s)) dW^{(i)}(s) - \frac{\varepsilon B_0 B_1}{2}. \end{aligned}$$

Soient $g_\kappa^{(1)}$ une extension continue bornée sur \mathbb{R} de la restriction de g_κ sur $(-\infty, 0]$ et soit $g_\kappa^{(2)}$ une extension continue bornée sur \mathbb{R} de la restriction de g_κ sur $(0, \infty)$. Avec la probabilité 1, $\nu^{(i),\varepsilon} \Rightarrow \nu^{(i)}$ et \bar{X}^ε converge uniformément sur $[0, 1]$ vers le processus continu \bar{X} . Donc le théorème 5.5 dans

[3] et l'intégrabilité uniforme donnée dans la proposition 3.1, impliquent

$$\begin{aligned}
& \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^d \times [0,1]} g_\kappa((\bar{X}^\varepsilon(t))_1)(b(\bar{X}^\varepsilon(t)) + \sigma(\bar{X}^\varepsilon(t))y)_1 \nu^\varepsilon(dy \times dt) \\
&= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sum_{i=1,2} \int_{\mathbb{R}^d \times [0,1]} g_\kappa^{(i)}((\bar{X}^\varepsilon(t))_1)(b^{(i)}(\bar{X}^\varepsilon(t)) + \sigma(\bar{X}^\varepsilon(t))y)_1 \nu^{(i),\varepsilon}(dy \times dt) \\
&= \sum_{i=1,2} \int_{\mathbb{R}^d \times [0,1]} g_\kappa^{(i)}((\bar{X}(t))_1)(b^{(i)}(\bar{X}(t)) + \sigma(\bar{X}(t))y)_1 \nu^{(i)}(dy \times dt).
\end{aligned}$$

Nous combinons maintenant cette expression avec l'expression (3.27) et utilisons (3.14) avec le fait que si $(\bar{X}(t))_1 < 0$, alors $\nu^{(2)}(dy | t) = 0$ et si $(\bar{X}(t))_1 > 0$, alors $\nu^{(1)}(dy | t) = 0$, il faut voir l'expression (3.18) pour une explication précise, c'est à dire

$$(\bar{X}(t))_1 < 0$$

$$\text{implique que } \hat{\gamma}^{(1)}(t) = \nu^{(1)}(\mathbb{R}^d | t) = 1 \text{ et } \hat{\gamma}^{(2)}(t) = \nu^{(2)}(\mathbb{R}^d | t) = 0,$$

$$(\bar{X}(t))_1 > 0$$

$$\text{implique que } \hat{\gamma}^{(2)}(t) = \nu^{(2)}(\mathbb{R}^d | t) = 1 \text{ et } \hat{\gamma}^{(1)}(t) = \nu^{(1)}(\mathbb{R}^d | t) = 0.$$

Comme le long d'une sous-suite appropriée, le second terme du membre de droite de (3.27) converge vers zéro avec la probabilité 1, nous obtenons $4m \geq$

$$\begin{aligned}
& \int_0^1 \int_{\mathbb{R}^d} (b^{(1)}(\bar{X}(t)) + \sigma(\bar{X}(t))y)_1 g_\kappa^{(1)}((\bar{X}(t))_1) 1_{(-\infty,0]}((\bar{X}(t))_1) \nu^{(1)}(dy | t) dt \\
& \quad (3.28) \\
& + \int_0^1 \int_{\mathbb{R}^d} (b^{(2)}(\bar{X}(t)) + \sigma(\bar{X}(t))y)_1 g_\kappa^{(2)}((\bar{X}(t))_1) 1_{[0,\infty)}((\bar{X}(t))_1) \nu^{(2)}(dy | t) dt.
\end{aligned}$$

L'ensemble des fonctions $\{g_\kappa^{(1)}, \kappa > 0\}$ et $\{g_\kappa^{(2)}, \kappa > 0\}$ sont uniformément bornées et pour $z \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{\kappa \rightarrow 0} g_\kappa^{(1)}(z) 1_{(-\infty,0]}(z) = -1_{[-m,0]}(z) \text{ et } \lim_{\kappa \rightarrow 0} g_\kappa^{(2)}(z) 1_{[0,\infty)}(z) = 1_{[0,m]}(z).$$

Par le théorème de convergence dominée de Lebesgue, on fait tendre $\kappa \rightarrow 0$ dans la formule (3.28), on a avec la probabilité 1 l'inégalité suivante

$$\begin{aligned}
4m & \geq \int_0^1 \int_{\mathbb{R}^d} 1_{[0,m]}((\bar{X}(t))_1) (b^{(2)}(\bar{X}^\varepsilon(t)) + \sigma(\bar{X}^\varepsilon(t))y)_1 \nu^{(2)}(dy | t) dt \\
& \quad - \int_0^1 \int_{\mathbb{R}^d} 1_{[-m,0]}((\bar{X}(t))_1) (b^{(1)}(\bar{X}^\varepsilon(t)) + \sigma(\bar{X}^\varepsilon(t))y)_1 \nu^{(1)}(dy | t) dt.
\end{aligned}$$

Des preuves similaires qui sont basées sur l'approximation

$$G(z) \doteq \begin{cases} z & \text{si } |z| \leq m \\ m & \text{si } z > m \\ -m & \text{si } z < -m \end{cases}$$

et $-G(z)$ montrent qu'avec la probabilité 1

$$4m \geq \left| \int_0^1 \int_{\mathbb{R}^d} 1_{[0,m]}((\bar{X}(t))_1)(b^{(2)}(\bar{X}^\varepsilon(t)) + \sigma(\bar{X}^\varepsilon(t))y)_1 \nu^{(2)}(dy | t) dt \right. \\ \left. + \int_0^1 \int_{\mathbb{R}^d} 1_{[-m,0]}((\bar{X}(t))_1)(b^{(1)}(\bar{X}^\varepsilon(t)) + \sigma(\bar{X}^\varepsilon(t))y)_1 \nu^{(1)}(dy | t) dt \right|.$$

La combinaison de ces équations donne avec la probabilité 1

$$\int_0^1 \int_{\mathbb{R}^d} 1_{[-m,0]}((\bar{X}(t))_1)(b^{(1)}(\bar{X}(t)) + \sigma(\bar{X}(t))y)_1 \nu^{(1)}(dy | t) dt \geq -4m$$

et

$$\int_0^1 \int_{\mathbb{R}^d} 1_{[0,m]}((\bar{X}(t))_1)(b^{(2)}(\bar{X}(t)) + \sigma(\bar{X}(t))y)_1 \nu^{(2)}(dy | t) dt \leq 4m.$$

En faisant tendre m vers 0, nous concluons qu'avec la probabilité 1

$$\int_0^1 \int_{\mathbb{R}^d} 1_{\{0\}}((\bar{X}(t))_1)(b^{(1)}(\bar{X}(t)) + \sigma(\bar{X}(t))y)_1 \nu^{(1)}(dy | t) dt \geq 0$$

et

$$\int_0^1 \int_{\mathbb{R}^d} 1_{\{0\}}((\bar{X}(t))_1)(b^{(2)}(\bar{X}(t)) + \sigma(\bar{X}(t))y)_1 \nu^{(2)}(dy | t) dt \leq 0.$$

Soit $[\alpha, \beta]$ est un intervalle fermé quelconque dans $[0, 1]$. En répétant l'argument menant aux deux dernières représentations, nous obtenons

$$\theta^{(1)}(\alpha, \beta) \doteq \int_\alpha^\beta \int_{\mathbb{R}^d} 1_{\{0\}}((\bar{X}(t))_1)(b^{(1)}(\bar{X}(t)) + \sigma(\bar{X}(t))y)_1 \nu^{(1)}(dy | t) dt \geq 0$$

et

$$\theta^{(2)}(\alpha, \beta) \doteq \int_\alpha^\beta \int_{\mathbb{R}^d} 1_{\{0\}}((\bar{X}(t))_1)(b^{(2)}(\bar{X}(t)) + \sigma(\bar{X}(t))y)_1 \nu^{(2)}(dy | t) dt \leq 0.$$

Avec la probabilité 1, ces inégalités tiennent simultanément pour tous les intervalles $[\alpha, \beta] \subset [0, 1]$ avec des points finaux rationnels, et donc par continuité, ils tiennent simultanément pour tous les intervalles $[\alpha, \beta] \subset [0, 1]$. Cela implique qu'avec la probabilité 1 $\theta^{(1)}(0, \beta)$ est non décroissante et de

même $\theta^{(2)}(0, \beta)$ est aussi non croissante pour $\beta \in [0, 1]$. Puisqu'une fonction non décroissante (respectivement, non croissante), (respectivement, non positive) a une dérivée non négative presque sûrement, il s'ensuit que nous avons qu'avec la probabilité 1 pour presque tout $t \in [0, 1]$, chaque fois que $(\bar{X}(t))_1 = 0$

$$\int_{\mathbb{R}^d} (b^{(1)}(\bar{X}(t)) + \sigma(\bar{X}(t))y)_1 \nu^{(1)}(dy \mid t) \geq 0$$

et

$$\int_{\mathbb{R}^d} (b^{(2)}(\bar{X}(t)) + \sigma(\bar{X}(t))y)_1 \nu^{(2)}(dy \mid t) \leq 0.$$

Cela prouve la partie (d), complétant la preuve du théorème 3.2.1. \square

Chapitre 4

Preuve du théorème 2.2.1

Nous avons divisé la preuve du principe de Laplace dans le théorème 2.2.1 en deux parties :

la borne supérieure du principe de Laplace et
la borne inférieure du principe de Laplace.

4.1 La preuve de la borne supérieure du principe de Laplace

Pour chaque $\varepsilon > 0$, soit X^ε l'unique solution forte de (2.7). Pour prouver la borne supérieure du principe de Laplace, nous devons montrer que pour toutes les fonctions continues bornées h de $\mathcal{C}([0, 1] : \mathbb{R}^d)$ sur \mathbb{R} , on a

$$\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon \log E_{x_0} \left\{ \exp \left[-\frac{h(X^\varepsilon)}{\varepsilon} \right] \right\} \leq - \inf_{\varphi \in \mathcal{C}([0, 1] : \mathbb{R}^d)} \{I_{x_0}(\varphi) + h(\varphi)\}.$$

Nous montrerons la limite inférieure équivalente

$$\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} W^\varepsilon(x_0) \geq \inf_{\varphi \in \mathcal{C}([0, 1] : \mathbb{R}^d)} \{I_{x_0}(\varphi) + h(\varphi)\}, \quad (4.1)$$

où

$$W^\varepsilon(x_0) \doteq - \varepsilon \log E_{x_0} \left\{ \exp \left[-\frac{h(X^\varepsilon)}{\varepsilon} \right] \right\}.$$

Il est suffisant de prouver la limite inférieure à partir de la quantité (4.1), lorsque ε est remplacé par toute sous-suite le long de laquelle $W^\varepsilon(x_0)$ converge. Une telle sous-suite existe car $|W^\varepsilon(x_0)| \leq \|h\|_\infty$. Nous allons travailler avec une telle sous-suite et qui est fixée le reste de la preuve, et pour plus de commodité, nous ré-étiquetons les indices avec $\varepsilon > 0$. La clé de la preuve est l'utilisation de la formule de représentation de $W^\varepsilon(x_0)$ donnée

dans le théorème 3.1.1. Grâce à ce théorème, nous pouvons construire une famille des contrôles $\{v^\varepsilon, \varepsilon > 0\}$ dans \mathcal{A} de sorte que pour chaque $\varepsilon > 0$

$$W^\varepsilon(x_0) \geq E_{x_0} \left\{ \frac{1}{2} \int_0^1 \|v^\varepsilon(t)\|^2 dt + h(\bar{X}^\varepsilon) \right\} - \varepsilon, \quad (4.2)$$

où \bar{X}^ε est la diffusion contrôlée associée avec v^ε par (3.1). Puisque, par définition $|W^\varepsilon(x_0)| \leq \|h\|_\infty$, la famille $\{v^\varepsilon, \varepsilon > 0\}$ satisfait à la condition 3.1. Donc, si nous utilisons la famille des contrôles $\{v^\varepsilon, \varepsilon > 0\}$ pour définir les mesures $\nu^\varepsilon, \nu^{(1),\varepsilon}, \nu^{(2),\varepsilon}, \gamma^{(1),\varepsilon}$ et $\gamma^{(2),\varepsilon}$ comme dans le chapitre 3, puis le long de certaines sous-suites de $\varepsilon > 0$

$$(\nu^\varepsilon, \nu^{(1),\varepsilon}, \nu^{(2),\varepsilon}, \gamma^{(1),\varepsilon}, \gamma^{(2),\varepsilon}, \bar{X}^\varepsilon) \xrightarrow{\mathcal{D}} (\nu, \nu^{(1)}, \nu^{(2)}, \gamma^{(1)}, \gamma^{(2)}, \bar{X}).$$

Les quantités limites $\nu, \nu^{(1)}, \nu^{(2)}, \gamma^{(1)}, \gamma^{(2)}$ et \bar{X} satisfont aux conclusions du théorème 3.2.1. Par le théorème de représentation de Skorohod, nous pouvons supposer que la convergence dans la dernière quantité se produit avec la probabilité 1. Nous pouvons maintenant évaluer la limite inférieure de la quantité $W^\varepsilon(x_0)$. Chaque étape du processus est expliquée après les inégalités ci-dessous. Nous avons

$$\begin{aligned} & \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} W^\varepsilon(x_0) \quad (4.3) \\ & \geq \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ E_{x_0} \left\{ \frac{1}{2} \int_0^1 \|v^\varepsilon(t)\|^2 dt + h(\bar{X}^\varepsilon) \right\} - \varepsilon \right\} \\ & \geq \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} E_{x_0} \left\{ \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^d \times [0,1]} \|y\|^2 \nu^\varepsilon(dy \times dt) + h(\bar{X}^\varepsilon) \right\} \\ & \geq E_{x_0} \left\{ \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^d \times [0,1]} \|y\|^2 \nu(dy \times dt) + h(\bar{X}) \right\} \\ & = E_{x_0} \left\{ \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^d \times [0,1]} \|y\|^2 \nu^{(1)}(dy \times dt) + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^d \times [0,1]} \|y\|^2 \nu^{(2)}(dy \times dt) + h(\bar{X}) \right\} \\ & = E_{x_0} \left\{ \frac{1}{2} \int_0^1 \int_{\mathbb{R}^d} \|y\|^2 \nu^{(1)}(dy | t) dt + \frac{1}{2} \int_0^1 \int_{\mathbb{R}^d} \|y\|^2 \nu^{(2)}(dy | t) dt + h(\bar{X}) \right\} \\ & \geq E_{x_0} \left\{ \frac{1}{2} \int_0^1 \left\| \frac{1}{\hat{\gamma}^{(1)}(t)} \int_{\mathbb{R}^d} y \nu^{(1)}(dy | t) \right\|^2 \hat{\gamma}^{(1)}(t) dt \right\} \\ & + E_{x_0} \left\{ \frac{1}{2} \int_0^1 \left\| \frac{1}{\hat{\gamma}^{(2)}(t)} \int_{\mathbb{R}^d} y \nu^{(2)}(dy | t) \right\|^2 \hat{\gamma}^{(2)}(t) dt + h(\bar{X}) \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\geq E_{x_0} \left\{ \int_0^1 \hat{\gamma}^{(1)}(t) L^{(1)} \left(\bar{X}(t), b^{(1)}(\bar{X}(t)) + \sigma(\bar{X}(t)) \frac{1}{\hat{\gamma}^{(1)}(t)} \int_{\mathbb{R}} y \nu^{(1)}(dy | t) \right) dt \right\} \\
&+ E_{x_0} \left\{ \int_0^1 \hat{\gamma}^{(2)}(t) L^{(2)} \left(\bar{X}(t), b^{(2)}(\bar{X}(t)) + \sigma(\bar{X}(t)) \frac{1}{\hat{\gamma}^{(2)}(t)} \int_{\mathbb{R}} y \nu^{(2)}(dy | t) \right) dt \right\} \\
&+ E_{x_0} \{h(\bar{X})\} \\
&\geq E_{x_0} \left\{ \int_0^1 \tilde{L}(\bar{X}(t), \dot{\bar{X}}(t)) dt + h(\bar{X}) \right\} \\
&\geq \inf_{\varphi \in \mathcal{C}([0,1]:\mathbb{R}^d)} \{I_x(\varphi) + h(\varphi)\}.
\end{aligned}$$

Les deux premières lignes de ces inégalités sont des conséquences de (4.2). La troisième ligne utilise les représentations de mesures de contrôle ν^ε pour les contrôles v^ε donnés dans (3.3). Puisque h est continue sur $\mathcal{C}([0,1]:\mathbb{R}^d)$ et avec la probabilité 1 $\{\bar{X}^\varepsilon\}$ converge uniformément sur $[0,1]$ vers \bar{X} , $h(\bar{X}^\varepsilon) \rightarrow h(\bar{X})$ avec la probabilité 1. La quatrième ligne du (4.3) suit maintenant du lemme de Fatou et de la convergence avec la probabilité 1 $\nu^\varepsilon \Rightarrow \nu$ et la cinquième ligne de l'égalité de la $\nu = \nu^{(1)} + \nu^{(2)}$. La sixième ligne est obtenue à partir des décompositions de $\nu^{(i)}(dy \times dt) = \nu^{(i)}(dt | y) \otimes dt$, avec la probabilité-1, et après la normalisation, la septième ligne et huitième ligne suivent de l'inégalité de Jensen. La normalisation est bien définie si nous adoptons la convention $0 \cdot \infty = 0$. La neuvième ligne et la dixième ligne suivent des expressions $L^{(i)}(x, \beta)$ donnée en (2.1), et la onzième ligne du fait qu'avec la probabilité 1 et presque sûrement pour tout $t \in [0,1]$ et en s'inspirant de la preuve de la proposition 7.4.1 dans [7], par définition, pour tout x et β dans \mathbb{R}^d . On a la quantité (2.6) et on va définir

$$I_x(\varphi) \doteq \int_0^1 \tilde{L}(\varphi(t), \dot{\varphi}(t)) dt,$$

donc avec la probabilité 1, et pour tout $t \in [0,1]$

$$\begin{aligned}
\bar{X}(t) &= x + \int_{\mathbb{R}^d \times [0,t]} y \nu(dy \times ds) \\
&= x + \int_0^t \left(\int_{\mathbb{R}^d} y \nu(dy | s) \right) ds.
\end{aligned}$$

Comme $\bar{X}(t)$ est absolument continue pour tout $t \in [0,1]$, donc elle est dérivable quelque soit $t \in [0,1]$. On a donc

$$\dot{\bar{X}}(t) = \int_{\mathbb{R}^d} y \nu(dy | t)$$

et par définition de

$$\nu(dy | t, w) = \nu^{(1)}(dy | t, w) + \nu^{(2)}(dy | t, w);$$

on a

$$\dot{X}(t) = \int_{\mathbb{R}^d} y \nu^{(1)}(dy | t) + \int_{\mathbb{R}^d} y \nu^{(2)}(dy | t)$$

et, enfin

$$\dot{X}(t) = \tilde{\gamma}^{(1)}(t) \left(\frac{1}{\tilde{\gamma}^{(1)}(t)} \int_{\mathbb{R}^d} y \nu^{(1)}(dy | t) \right) + \tilde{\gamma}^{(2)}(t) \left(\frac{1}{\tilde{\gamma}^{(2)}(t)} \int_{\mathbb{R}^d} y \nu^{(2)}(dy | t) \right).$$

En combinant les définitions de $\bar{X}(t)$ et $\dot{X}(t)$ avec la définition de $\tilde{L}(\cdot, \cdot)$, on a l'inégalité suivante

$$\begin{aligned} \tilde{L}(\bar{X}(t), \dot{X}(t)) &\leq L^{(1)} \left(\bar{X}(t), \frac{1}{\tilde{\gamma}^{(1)}(t)} \int_{\mathbb{R}^d} y \nu^{(1)}(dy | t) \right) \tilde{\gamma}^{(1)}(t) \\ &\quad + L^{(2)} \left(\bar{X}(t), \frac{1}{\tilde{\gamma}^{(2)}(t)} \int_{\mathbb{R}^d} y \nu^{(2)}(dy | t) \right) \tilde{\gamma}^{(2)}(t) \end{aligned}$$

avec $\frac{1}{\tilde{\gamma}^{(1)}(t)} \int_{\mathbb{R}^d} y \nu^{(1)}(dy | t) \geq 0$, $\frac{1}{\tilde{\gamma}^{(2)}(t)} \int_{\mathbb{R}^d} y \nu^{(2)}(dy | t) \leq 0$ et de l'inégalité (7.37) de [7], pour $i = 1, 2$ $\frac{1}{\tilde{\gamma}^{(i)}(t)} \leq b^{(i)}(\bar{X}(t)) + \sigma(\bar{X}(t))$ donc, on a le résultat suivant

$$\begin{aligned} \tilde{L}(\bar{X}(t), \dot{X}(t)) &\leq \tilde{\gamma}^{(1)}(t) L^{(1)} \left(\bar{X}(t), b^{(1)}(\bar{X}(t)) + \sigma(\bar{X}(t)) \int_{\mathbb{R}^d} y \nu^{(1)}(dy | t) \right) \\ &\quad + \tilde{\gamma}^{(2)}(t) L^{(2)} \left(\bar{X}(t), b^{(2)}(\bar{X}(t)) + \sigma(\bar{X}(t)) \int_{\mathbb{R}^d} y \nu^{(2)}(dy | t) \right). \end{aligned}$$

Cette formule est basée sur la définition de $\tilde{L}(\cdot, \cdot)$.

Enfin, la dernière ligne de (4.3) est une conséquence de la définition de la fonctionnelle d'action. Nous avons montré que chaque sous-suite convergente de $\{W^\varepsilon(x_0), \varepsilon > 0\}$ a une sous sous-suite satisfaisant :

$$\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} W^\varepsilon(x_0) \geq \inf_{\varphi \in \mathcal{C}([0,1]:\mathbb{R}^d)} \{I_{x_0}(\varphi) + h(\varphi)\}.$$

Un argument par l'absurde établit cette limite inférieure pour la famille entière

$$\{W^\varepsilon(x_0), \varepsilon > 0\}.$$

Ainsi, la preuve de la borne supérieure du principe de Laplace est complète.

4.2 La preuve de la borne inférieure du principe de Laplace

La preuve de la borne inférieure du principe de Laplace nécessite certaines propriétés de $L^{(i)}(x, \beta)$, $i = 0, 1, 2$ et de $\tilde{L}(x, \beta)$. Nous les affirmons dans le lemme suivant.

Lemme 4.2.1. *Sous les conditions 2.1, 2.2 et 2.3, les fonctions $L^{(0)}(x, \beta)$, $L^{(1)}(x, \beta)$, $L^{(2)}(x, \beta)$ et $\tilde{L}(x, \beta)$, ont les propriétés suivantes.*

(a) *Pour x et β dans \mathbb{R}^d , on a*

$$L^{(0)}(x, \beta) \leq L^{(1)}(x, \beta) \text{ si } \beta_1 \geq 0 \text{ et } L^{(0)}(x, \beta) \leq L^{(2)}(x, \beta) \text{ si } \beta_1 \leq 0$$

(b) *Pour chaque $x \in \mathbb{R}^d$, $ri(dom L^{(0)}(x, \cdot))$ est égale à $\Sigma = int(conv S_{\mu^{(i)}(\cdot|x)})$.*

(c) *$L^{(0)}(x, \beta)$ est une fonction continue sur $(x, \beta) \in \mathbb{R}^d \times (\Sigma \cap \partial)$.*

(d) *Pour chaque $x \in \mathbb{R}^d$, $ri(dom \tilde{L}(x, \cdot))$ est égale à Σ .*

Preuve. (a) Supposons que $\beta \in \mathbb{R}^d$ satisfait $\beta_1 \geq 0$. Si dans la définition de $L^{(0)}(x, \beta)$ on prend $\rho^{(0)} \doteq 1$, $\rho^{(2)} \doteq 0$, $\beta^{(1)} \doteq \beta$ et $\beta^{(2)} \doteq 0$ alors $L^{(0)}(x, \beta) \leq L^{(1)}(x, \beta)$. De même, si $\beta \in \mathbb{R}^d$ satisfaisant $\beta \leq 0$, alors $L^{(0)}(x, \beta) \leq L^{(2)}(x, \beta)$.

(b) La partie (a) du lemme implique que si $L^{(1)}(x, \beta) < \infty$ et $L^{(2)}(x, \beta) < \infty$, on a donc $L^{(0)}(x, \beta) < \infty$.

Ainsi de la partie (a) du lemme 7.5.2 dans [5], $L^{(0)}(x, \beta) < \infty$ pour $(x, \beta) \in \mathbb{R}^d \times \Sigma$. D'autre part, si $(x, \beta) \in \mathbb{R}^d \times (cl \Sigma)^c$, et puis, pour tout $\rho^{(1)}$, $\rho^{(2)}$, $\beta^{(1)}$ et $\beta^{(2)}$ satisfaisant aux contraintes de

$$\rho^{(1)} \geq 0, \rho^{(2)} \geq 0, \rho^{(1)} + \rho^{(2)} = 1,$$

$$(\beta^{(1)})_1 \geq 0, (\beta^{(2)})_1 \leq 0,$$

$$\rho^{(1)}\beta^{(1)} + \rho^{(2)}\beta^{(2)} = \beta,$$

$\rho^{(1)} > 0$ et $\beta^{(1)} \in (cl \Sigma)^c$ ou $\rho^{(2)} > 0$ et $\beta^{(2)} \in (cl \Sigma)^c$, alors $L^{(0)}(x, \beta) = \infty$.

(c) Dans la partie (a) du Lemme 7.5.5 dans [7], nous allons prouver que sous les conditions 2.2 et 2.3, $L^{(0)}(x, \beta)$ est une fonction semi-continue inférieurement de $(x, \beta) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$. Afin de prouver la partie (c) du présent lemme, nous montrons que $L^{(0)}(x, \beta)$ est une fonction semi-continue inférieurement de $(x, \beta) \in \mathbb{R}^d \times (\Sigma \cap \partial)$.

En effet, on fixe $(x, \beta) \in \mathbb{R}^d \times (\Sigma \cap \partial)$ et on donne $\varepsilon > 0$. La condition 2.3

implique que $0 \in \Sigma \cap (\text{int}\Lambda^{(i)})$ pour $i = 1, 2$. Nous affirmons qu'il existe $\rho^{(1)}, \rho^{(2)}, \beta^{(1)}$ et $\beta^{(2)}$ satisfaisant

$$\begin{aligned} \rho^{(1)} > 0, \rho^{(2)} > 0, (\beta^{(1)})_1 > 0, (\beta^{(2)})_1 < 0, \beta^{(1)} \in \Sigma, \beta^{(2)} \in \Sigma, \\ \rho^{(1)} + \rho^{(2)} = 1, \rho^{(1)}\beta^{(1)} + \rho^{(2)}\beta^{(2)} = \beta, \end{aligned} \quad (\text{quantité } A)$$

et

$$\rho^{(1)}L^{(1)}(x, \beta^{(1)}) + \rho^{(2)}L^{(2)}(x, \beta^{(2)}) \leq L^{(0)}(x, \beta) + \varepsilon. \quad (\text{quantité } B)$$

Pour plus de détail, on commence par $\rho^{(1)}, \rho^{(2)}, \beta^{(1)}$ et $\beta^{(2)}$ satisfaisant

$$\begin{aligned} \rho^{(1)} \geq 0, \rho^{(2)} \geq 0, (\beta^{(1)})_1 \geq 0, (\beta^{(2)})_1 \leq 0, \beta^{(1)} \in \text{cl}\Sigma, \beta^{(2)} \in \text{cl}\Sigma, \\ \rho^{(1)} + \rho^{(2)} = 1, \rho^{(1)}\beta^{(1)} + \rho^{(2)}\beta^{(2)} = \beta, \end{aligned}$$

et

$$\rho^{(1)}L^{(1)}(x, \beta^{(1)}) + \rho^{(2)}L^{(2)}(x, \beta^{(2)}) \leq L^{(0)}(x, \beta) + \varepsilon/4.$$

Premièrement, si l'un des $\rho^{(i)}$ est égale à 0, on va prendre le correspondant $\beta^{(i)} \doteq 0$ et on perturbe $\rho^{(1)}$ et $\rho^{(2)}$ afin que les deux soient positifs et les quantités (A) et (B) tiennent avec ε remplacé par $\varepsilon/3$.

Deuxièmement, si $\beta^{(1)}$ ou $\beta^{(2)}$ est inclus dans $\partial\Sigma$, alors on utilisera le fait que $\beta \in \Sigma$, $\beta_1 = 0$, la convexité de Σ et une propriété de continuité de $L^{(1)}(x, \cdot)$ et $L^{(2)}(x, \cdot)$ [7, Théorème D.2.2 (c)] pour perturber $\beta^{(1)}$ et $\beta^{(2)}$ sur Σ , afin que $(\beta^{(1)})_1 \geq 0$, $(\beta^{(2)})_1 \leq 0$, (A) et (B) continueront à tenir avec $\varepsilon/3$ remplacé par $\varepsilon/2$.

Enfin, si $(\beta^{(1)})_1 = 0$ ou $(\beta^{(2)})_1 = 0$, on utilise la continuité de $L^{(i)}(x, \cdot)$ dans Σ [7, Lemma 7.5.2 (b)] pour perturber $\beta^{(1)}$ et $\beta^{(2)}$ à l'intérieur de Σ pour que $(\beta^{(1)})_1 > 0$, $(\beta^{(2)})_1 < 0$, et en tenant compte de (A) et (B).

Maintenant, soit (ξ, v) un point quelconque dans $\mathbb{R}^d \times \Sigma$ et soit $v^{(1)}$ et $v^{(2)}$ des points dans \mathbb{R}^d satisfaisant

$$(v^{(1)})_1 \geq 0, (v^{(2)})_1 \leq 0, \rho^{(1)}v^{(1)} + \rho^{(2)}v^{(2)} = v.$$

alors

$$\begin{aligned} L^{(0)}(\xi, v) - L^{(0)}(x, \beta) &\leq \rho^{(1)}L^{(1)}(\xi, v^{(1)}) + \rho^{(2)}L^{(2)}(\xi, v^{(2)}) \quad (\text{quantité } C) \\ &\quad - \rho^{(1)}L^{(1)}(x, \beta^{(1)}) - \rho^{(2)}L^{(2)}(x, \beta^{(2)}) + \varepsilon. \end{aligned}$$

Nous définissons maintenant

$$v^{(1)} \doteq \beta^{(1)} \quad \text{et} \quad v^{(2)} \doteq \frac{v - \rho^{(1)}v^{(1)}}{\rho^{(2)}} = \frac{v - \rho^{(1)}\beta^{(1)}}{\rho^{(2)}}.$$

alors $(v^{(1)})_1 = (v^{(1)})_1 > 0, v^{(1)} \in \Sigma$,

$$(v^{(2)})_1 = \frac{(v - \beta)_1}{\rho^{(2)}} + \frac{(\beta - \rho^{(1)}\beta^{(1)})_1}{\rho^{(2)}} = \frac{(v - \beta)_1}{\rho^{(2)}} + (\beta^{(2)})_1 \leq \frac{\|v - \beta\|}{\rho^{(2)}} + (\beta^{(2)})_1,$$

et

$$\|v^{(2)} - \beta^{(2)}\| \leq \frac{1}{\rho^{(2)}} \|v - \beta\|.$$

Puisque $(\beta^{(2)})_1 < 0$ et $\beta^{(2)}$ sont inclus dans l'ensemble ouvert Σ , nous pouvons garantir que $(v^{(2)})_1 < 0$ et que $v^{(2)}$ est inclus dans Σ en faisant $\|v - \beta\|$ soit suffisamment petit. Nous insérons maintenant $v^{(1)}$ et $v^{(2)}$ dans la quantité (C). La continuité de $L^{(1)}(\cdot, \cdot)$ et $L^{(2)}(\cdot, \cdot)$ dans $\mathbb{R}^d \times \Sigma$ implique que si $\|(\xi, v) - (x, \beta)\|$ est suffisamment petit, alors

$$L^{(0)}(\xi, v) - L^{(0)}(x, \beta) \leq 2\varepsilon.$$

Cela prouve que $L^{(0)}(\cdot, \cdot)$ est semi-continue supérieurement dans $\mathbb{R}^d \times \Sigma$ et termine la preuve de la partie (c).

(d) En utilisant la partie (a) du lemme 7.5.2 du [7] et la partie (b) du présent lemme. En effet, pour chaque $x \in \mathbb{R}^d$ l'ensemble $\text{ri}(\text{dom } L^{(i)}(x, \cdot)) = \text{ri}(\text{conv } S_{\mu^{(i)}(\cdot|x)})$ est égale à Σ , et en combinant avec $\text{ri}(\text{dom } L^{(0)}(x, \cdot))$ égale à Σ . Donc on a $\text{ri}(\text{dom } \tilde{L}(x, \cdot))$ égale à Σ pour chaque $x \in \mathbb{R}^d$. \square

Remarques 4.2.2. La preuve de la partie (b) découle directement des conditions 2.1 et 2.2.

Afin de prouver la borne inférieure du principe de Laplace, nous devons vérifier que

$$\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon \log E_{x_0} \{ \exp[-h(X^\varepsilon)/\varepsilon] \} \geq - \inf_{\varphi \in \mathcal{C}([0,1]:\mathbb{R}^d)} \{ I_{x_0}(\varphi) + h(\varphi) \}.$$

Pour prouver cette affirmation, nous adaptons une procédure d'approximation présentée dans le chapitre 7 de [7]. Soit \mathcal{N}_0 la classe des fonctions $\psi^* \in \mathcal{C}([0,1]:\mathbb{R}^d)$ qui répondent aux conditions suivantes :

- (a) $\psi^*(t)$ est constante par morceaux avec seulement un nombre fini de sauts dans l'intervalle $(0, 1)$.
- (b) Ou bien $(\psi^*(t))_1 \neq 0$ ou bien $(\psi^*(t))_1 = 0$ sur chaque intervalle de la constance de ψ^* .

Afin d'avoir $\psi^*(t)$ défini pour tout $t \in [0, 1]$, on remplace la fonction définie presque partout dans ψ^* par sa régularisation continue à droite. Nous allons montrer que, quel que soit $x_0 \in \mathbb{R}^d$ on a l'inégalité

$$\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} W^\varepsilon(x_0) \doteq \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} -\varepsilon \log E_{x_0} \{ \exp[-h(X^\varepsilon)/\varepsilon] \} \leq I_{x_0}(\psi^*) + h(\psi^*), \quad (4.4)$$

valable pour tout $\psi^* \in \mathcal{N}_0$. Grâce au lemme 4.2.3, voir ci-dessous, dont la preuve peut être trouvée dans [7. Théorème 7.5.4], cette propriété peut ensuite être étendue à tout l'espace $\mathcal{C}([0, 1] : \mathbb{R}^d)$.

Lemme 4.2.3. *Supposons que la Condition 2.1 soit vraie. On donne $x_0 \in \mathbb{R}^d$, et soit $\psi \in \mathcal{C}([0, 1] : \mathbb{R}^d)$ satisfaisant à $I_{x_0}(\psi) < \infty$. Ensuite, pour chaque $\eta > 0$, il existe $\psi^* \in \mathcal{N}_0$ tels que*

$$\| \psi^* - \psi \|_\infty \leq \eta \quad \text{et} \quad I_{x_0}(\psi^*) \leq I_{x_0}(\psi) + \eta$$

et pour chaque $k \in \{1, 2, \dots, r\}$ soit $(\psi^(t))_1 \neq 0$ pour tout $t \in (t_k, t_{k+1})$ ou $(\psi^*(t))_1 = 0$ pour tout $t \in (t_k, t_{k+1})$. Les intervalles (t_k, t_{k+1}) , $k = 1, 2, \dots, r$ désignent l'intérieur des intervalles successifs sur lesquels ψ^* est constante.*

Supposons que (4.4) soit vraie pour $\psi^* \in \mathcal{N}_0$. Nous décrivons maintenant comment compléter la preuve de la borne inférieure du principe de Laplace. On se donne $\eta > 0$, et soit $\psi \in \mathcal{C}([0, 1] : \mathbb{R}^d)$ satisfaisant

$$I_{x_0}(\psi) + h(\psi) \leq \inf_{\varphi \in \mathcal{C}([0, 1] : \mathbb{R}^d)} \{ I_{x_0}(\varphi) + h(\varphi) \} + \eta < \infty.$$

Puisque h est bornée, cela implique que $I_{x_0}(\psi) < \infty$. Puisque h est continue, il existe $\psi^* \in \mathcal{N}_0$ telle que

$$h(\psi^*) \leq h(\psi) + \eta \quad \text{et} \quad I_{x_0}(\psi^*) \leq I_{x_0}(\psi) + \eta.$$

Il s'ensuit que

$$\begin{aligned} \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon \log E_{x_0} \left\{ \exp \left[-\frac{h(X^\varepsilon)}{\varepsilon} \right] \right\} \\ \geq -I_{x_0}(\psi^*) - h(\psi^*) \\ \geq -I_{x_0}(\psi) - h(\psi) - 2\eta \\ \geq - \inf_{\varphi \in \mathcal{C}([0, 1] : \mathbb{R}^d)} \{ I_{x_0}(\varphi) + h(\varphi) \} - 3\eta. \end{aligned}$$

Puisque $\eta > 0$ est arbitraire, cette inégalité donne la borne inférieure du principe de Laplace .

Nous allons maintenant montrer que (4.4) est valable pour tout $\psi^* \in \mathcal{N}_0$.

A cette fin, prenons $\psi^* \in \mathcal{N}_0$ satisfaisant à $I_{x_0}(\psi^*) < 0$. Pour chaque $k \in \{1, \dots, r\}$ et soit $\beta_k \doteq \psi^*(t)$, où t est un point quelconque de l'intérieur de l'intervalle de constance (t_k, t_{k+1}) de dérivées. Soient $\beta_k^{(1)}$ et $\beta_k^{(2)}$ définis comme suit : si $(\psi^*(t))_1 \neq 0$ pour tous $t \in (t_k, t_{k+1})$, prenons $\beta_k^{(1)} = \beta_k^{(2)} \doteq \beta_k$. Dans le cas contraire, si $(\psi^*(t))_1 = 0$ pour tous $t \in (t_k, t_{k+1})$, étant donné $\eta > 0$, $\beta_k^{(1)}$ et $\beta_k^{(2)}$ sont choisis en même temps avec les constantes $\rho_k^{(1)}$ et $\rho_k^{(2)}$ de sorte que

$$\begin{aligned} \rho_k^{(1)} > 0, \rho_k^{(2)} > 0, \quad (\beta_k^{(1)})_1 > 0, (\beta_k^{(2)})_1 < 0, \\ \rho_k^{(1)} + \rho_k^{(2)} = 1, \quad \rho_k^{(1)}\beta_k^{(1)} + \rho_k^{(2)}\beta_k^{(2)} = \beta_k, \end{aligned} \quad (4.5)$$

et

$$\rho_k^{(1)}L^{(1)}(\psi^*(t), \beta_k^{(1)}) + \rho_k^{(2)}L^{(2)}(\psi^*(t), \beta_k^{(2)}) \leq L^{(0)}(\psi^*(t), \beta_k) + \eta \quad (4.6)$$

pour tout $t \in (t_k, t_k + \lambda)$, où $\lambda > 0$. L'existence de $\beta_k^{(1)}, \beta_k^{(2)}, \rho_k^{(1)}$ et $\rho_k^{(2)}$ satisfaisant (4.5) et (4.6) suit de la continuité de $L^{(1)}(\cdot, \cdot)$ et $L^{(2)}(\cdot, \cdot)$ dans $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ (Lemme 4.2.1), comme dans la démonstration du lemme 7.5.2 dans [7] qui ont des résultats principaux : la propriété de la continuité et de la fonctionnelle de Cramer. L'égalité $ri(dom L^{(i)}(x, \cdot)) = ri(conv S_{\mu^{(i)}(\cdot|x)})$ est définie à partir du lemme 6.2.3 dans [7], en utilisant la partie (a) de la condition 7.2.2 dans [7], elle est égale à l'ensemble $\Sigma \doteq int(conv S_{\mu^{(i)}(\cdot|x)})$ et puis $L^{(i)}(x, \beta)$ est une fonction continue sur $(x, \beta) \in \mathbb{R}^d \times \Sigma$.

Les propriétés de continuité de $L^{(0)}, L^{(1)}, L^{(2)}$ et ψ^* impliquent, que si besoin est nous pouvons ajouter de point à la subdivision originale $0 = t_1 < t_2 < \dots < t_s < \dots < t_{k+1} = 1$ dans $(0, 1)$ pour obtenir une subdivision plus fine $0 = \hat{t}_1 < \hat{t}_2 < \dots < \hat{t}_{s+1} = 1$ dans $(0, 1)$ pour laquelle $(\psi^*(t))_1 = 0$ pour tout $t \in (\hat{t}_k, \hat{t}_{k+1})$, (4.6) est valable pour tout $t \in (\hat{t}_k, \hat{t}_{k+1})$. Pour simplifier, nous conserverons la même notation pour la subdivision d'origine et la subdivision raffinée.

Nous décrivons ci-dessous comment utiliser les vecteurs $\beta_k^{(i)}$, $k \in \{1, \dots, r\}$, $i = 1, 2$ pour désigner une famille de contrôles $\{v^\varepsilon, \varepsilon > 0\}$ dans \mathcal{A} et une famille correspondante de processus contrôlés $\{\bar{X}^\varepsilon, \varepsilon > 0\}$. Ces familles seront utilisées pour prouver (4.4) grâce à la formule de représentation donnée dans le théorème 3.1.1. Pour chaque $x \in \mathbb{R}^d$, $i = 1, 2$ et $t \in [0, 1]$ tels que $t \in [t_k, t_{k+1})$ pour certains $k \in \{1, \dots, r\}$ définissons

$$v^{(i)}(x, t) \doteq \sigma^{-1}(x)(\beta_k^{(i)} - b^{(i)}(x)).$$

D'après (2.1), ces vecteurs satisfont

$$\frac{1}{2} \| v^{(i)}(x, t) \|^2 = L^{(i)}(x, \beta_k^{(i)}).$$

Maintenant définissons

$$f(x, t) \doteq v^{(1)}(x, t) 1_{\{x_1 \leq 0\}}(x) + v^{(2)}(x, t) 1_{\{x_1 > 0\}}(x)$$

et soit \bar{X}^ε la solution de l'E D S

$$\bar{X}^\varepsilon(t) = x_0 + \int_0^t b(\bar{X}^\varepsilon(s)) ds + \int_0^t \sigma(\bar{X}^\varepsilon(s)) f(\bar{X}^\varepsilon(s), s) ds + \varepsilon^{\frac{1}{2}} \int_0^1 \sigma(\bar{X}^\varepsilon(s)) dW(s).$$

Enfin, posons

$$v^\varepsilon(t) \doteq f(\bar{X}^\varepsilon(t), t),$$

les contrôles v^ε ont les propriétés suivantes.

Tout d'abord, pour chaque $\varepsilon > 0$, le contrôle v^ε est un élément de \mathcal{A} . En effet, puisque \bar{X}^ε et t , sont progressivement mesurables, v^ε est aussi progressivement mesurable. Alors v^ε est aussi bornée, $v^\varepsilon \in \mathcal{A}$. Ensuite, si $t \in [t_k, t_{k+1})$ et $(\bar{X}^\varepsilon(t))_1 \leq 0$, alors

$$\frac{1}{2} \| v^\varepsilon(t) \|^2 = L^{(1)}(\bar{X}^\varepsilon(t), \beta_k^{(1)}) \text{ et } \beta_k^{(1)} = b^{(1)}(\bar{X}^\varepsilon(t)) + \sigma(\bar{X}^\varepsilon(t)) v^\varepsilon(t) \quad (4.7)$$

et si $(\bar{X}^\varepsilon(t))_1 > 0$, alors

$$\frac{1}{2} \| v^\varepsilon(t) \|^2 = L^{(2)}(\bar{X}^\varepsilon(t), \beta_k^{(2)}) \text{ et } \beta_k^{(2)} = b^{(2)}(\bar{X}^\varepsilon(t)) + \sigma(\bar{X}^\varepsilon(t)) v^\varepsilon(t). \quad (4.8)$$

Enfin, nous affirmons que la famille $\{v^\varepsilon, \varepsilon > 0\}$ satisfait la condition 3.1. Pour chaque $\varepsilon > 0$ l'égalité de (4.7) et (4.8) donnent

$$\begin{aligned} E_{x_0} \left\{ \frac{1}{2} \int_0^1 \| v^\varepsilon(t) \|^2 dt \right\} &= E_{x_0} \left\{ \sum_{k=1}^r \int_{t_k}^{t_{k+1}} \left[L^{(1)}(\bar{X}^\varepsilon, \beta_k^{(1)}) 1_{\{(\bar{X}^\varepsilon(t))_1 \leq 0\}} \right] \right\} \\ &\quad + E_{x_0} \left\{ \left[L^{(2)}(\bar{X}^\varepsilon, \beta_k^{(2)}) 1_{\{(\bar{X}^\varepsilon(t))_1 > 0\}} \right] \right\} \\ &\leq \sup_{x \in \mathbb{R}^d} \left\{ \| a^{-1}(x) \| \sum_{k=1}^r \left[\| \beta_k^{(1)} - b^{(1)}(x) \|^2 + \| \beta_k^{(2)} - b^{(2)}(x) \|^2 \right] \right\}. \end{aligned} \quad (4.9)$$

La condition 2.1 implique donc que la suite des valeurs attendues dans la dernière quantité est bornée pour $\varepsilon > 0$.

Puisque la condition (3.1) est satisfaite, nous pouvons appliquer les résultats de compacité et de convergence obtenue dans le chapitre 3. L'utilisation de la famille $\{\nu^\varepsilon, \varepsilon > 0\}$ construite ci-dessus, nous permet de définir les mesures $\nu^\varepsilon, \nu^{(1),\varepsilon}, \nu^{(2),\varepsilon}, \gamma^{(1),\varepsilon}$ et $\gamma^{(2),\varepsilon}$ comme dans (3.2)- (3.8).

La proposition 3.1.2 implique que la famille $\{(\nu^\varepsilon, \nu^{(1),\varepsilon}, \nu^{(2),\varepsilon}, \gamma^{(1),\varepsilon}, \gamma^{(2),\varepsilon}, \bar{X}), \varepsilon > 0\}$ est tendue. Le théorème 3.2.1 et le théorème de Prohorov impliquent alors que, étant donné une suite, il existe une sous-suite satisfaisant à

$$(\nu^\varepsilon, \nu^{(1),\varepsilon}, \nu^{(2),\varepsilon}, \gamma^{(1),\varepsilon}, \gamma^{(2),\varepsilon}, \bar{X}) \xrightarrow{\mathcal{D}} (\nu, \nu^{(1)}, \nu^{(2)}, \gamma^{(1)}, \gamma^{(2)}, \bar{X}).$$

Les quantités limites $\nu, \nu^{(1)}, \nu^{(2)}, \gamma^{(1)}, \gamma^{(2)}$ et \bar{X} satisfont (3.11)-(3.14) et la conclusion du théorème 3.2.1. Par le théorème de représentation de Skorohod, nous pouvons supposer que la convergence a lieu avec la probabilité 1. Notre prochaine étape est de montrer que $\bar{X}(s) = \psi^*(s)$ pour tout $s \in [0, 1]$. Il suffit de montrer qu'avec la probabilité 1, $\bar{X}(s) = \psi^*(s)$ pour chaque $k \in \{1, 2, \dots, r+1\}$ et tout $s \in [0, t_k]$. La preuve de cette affirmation est démontrée par récurrence sur k . Pour $k = 1$, l'égalité est valable parce que pour $t = 0$ et avec la probabilité 1 $\bar{X}(0) = x_0 = \phi^*(0)$. Supposons qu'avec la probabilité 1, $\bar{X}(s) = \psi^*(s)$ pour tous $k \in \{1, 2, \dots, r\}$ et tous $s \in [0, t_k]$, nous devons démontrer qu'avec la probabilité 1 $\bar{X}(s) = \psi^*(s)$ pour tout $s \in [0, t_{k+1}]$. Considérons d'abord le cas où $(\psi^*(s))_1 \neq 0$ pour tout $s \in (t_k, t_{k+1})$. En utilisant le quantité (4.7) et (4.8) et le fait que, par définition, β_k est égale à la valeur constante ψ^* pour tout $s \in (t_k, t_{k+1})$. On obtient

$$\begin{aligned} \bar{X}(t) - \bar{X}(t_k) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^d \times (t_k, t]} (b^{(1)}(\bar{X}^\varepsilon(s)) + \sigma(\bar{X}^\varepsilon(s))y) \nu^{(1),\varepsilon}(dy \times ds) \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}^d \times (t_k, t]} (b^{(2)}(\bar{X}^\varepsilon(s)) + \sigma(\bar{X}^\varepsilon(s))y) \nu^{(2),\varepsilon}(dy \times ds) \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^d \times (t_k, t]} \beta_k \nu^\varepsilon(dy \times ds) \\ &= \int_{t_k}^t \psi^*(s) ds = \psi^*(t) - \psi^*(t_k), \end{aligned}$$

est valable avec la probabilité 1 pour tout $t \in [t_k, t_{k+1})$. L'égalité $\bar{X}(t) - \bar{X}(t_k) = \psi^*(t) - \psi^*(t_k)$ s'étend par continuité à $t = t_{k+1}$. Grâce à l'hypothèse de récurrence, ceci implique qu'avec la probabilité 1 pour tout $t \in [t_k, t_{k+1}]$, $\bar{X}(t_k) = \psi^*(t_k)$ et donc pour tout $t \in [0, t_{k+1}]$.

Supposons maintenant que $(\psi^*(s))_1 = 0$ pour tout $s \in (t_k, t_{k+1})$. On donne les nombres α et t satisfaisant $t_k < \alpha < t < t_{k+1}$.

$$\begin{aligned}
& \int_{\mathbb{R}^d \times (\alpha, t]} (b^{(1)}(\bar{X}^\varepsilon(s)) + \sigma(\bar{X}^\varepsilon(s))y) \nu^{(1),\varepsilon}(dy \times ds) \\
& + \int_{\mathbb{R}^d \times (\alpha, t]} (b^{(2)}(\bar{X}^\varepsilon(s)) + \sigma(\bar{X}^\varepsilon(s))y) \nu^{(2),\varepsilon}(dy \times ds) \\
& = \beta_k^{(1)} \gamma^{(1),\varepsilon}((\alpha, t]) + \beta_k^{(2)} \gamma^{(2),\varepsilon}((\alpha, t]).
\end{aligned}$$

Selon (3.13), avec la probabilité 1 $\gamma^{(i)}$ est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue sur $[0,1]$. Ainsi, après la normalisation, la partie (e) du théorème de Portmanteau [3, théorème 2.2.1] appliquée aux suites faiblement convergentes $\{\gamma^{(i),\varepsilon}\}$ implique qu'avec la probabilité 1, pour tout α et t satisfaisant $t_k < \alpha < t < t_{k+1}$.

$$\begin{aligned}
\bar{X}(t) - \bar{X}(\alpha) &= \int_{\mathbb{R}^d \times (\alpha, t]} (b^{(1)}(\bar{X}(s)) + \sigma(\bar{X}(s))y) \nu^{(1)}(dy \times ds) \\
&+ \int_{\mathbb{R}^d \times (\alpha, t]} (b^{(2)}(\bar{X}(s)) + \sigma(\bar{X}(s))y) \nu^{(2)}(dy \times ds) \\
&= \beta_k^{(1)} \gamma^{(1)}((\alpha, t]) + \beta_k^{(2)} \gamma^{(2)}((\alpha, t]).
\end{aligned}$$

Comme dans la proposition 7.5.1 dans [7], cette relation implique qu'avec la probabilité 1

$$\hat{\gamma}^{(1)}(s) = \rho_k^{(1)} \quad \text{et} \quad \hat{\gamma}^{(2)}(s) = \rho_k^{(2)} \quad (4.10)$$

et que $\bar{X}(s) = \psi^*(s)$ pour tout $s \in [t_k, t_{k+1}]$ et donc pour tout $s \in [0, t_{k+1}]$, comme nous voulons montrer.

Pour évaluer la limite supérieure de $W^\varepsilon(x_0)$, nous avons besoin d'introduire la notation supplémentaire. Pour $k \in \{1, 2, \dots, r\}$ et $s \in [0, 1]$, nous définissons

$$g_k(t) \doteq \begin{cases} L^{(1)}(\psi^*(t), \beta_k) & \text{si } (\psi^*(t))_1 < 0 \\ L^{(2)}(\psi^*(t), \beta_k) & \text{si } (\psi^*(t))_1 > 0 \\ \rho_k^{(1)} L^{(1)}(\psi^*(t), \beta_k^{(1)}) + \rho_k^{(2)} L^{(2)}(\psi^*(t), \beta_k^{(2)}) & \text{si } (\psi^*(t))_1 = 0. \end{cases}$$

Il s'ensuit que

$$g_k(t) \leq \tilde{L}(\psi^*(t), \dot{\psi}^*(t)) + \eta. \quad (4.11)$$

Nous utilisons cette propriété dans les dernières expositions suivantes, où la limite supérieure de $W^\varepsilon(x_0)$ est évaluée sur une sous-suite de $\varepsilon > 0$ pour laquelle avec la probabilité 1

$$(\nu^\varepsilon, \nu^{(1),\varepsilon}, \nu^{(2),\varepsilon}, \gamma^{(1),\varepsilon}, \gamma^{(2),\varepsilon}, \bar{X}^\varepsilon) \rightarrow (\nu, \nu^{(1)}, \nu^{(2)}, \gamma^{(1)}, \gamma^{(2)}, \bar{X}).$$

Nous avons :

$$\begin{aligned} \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} W^\varepsilon(x_0) &= \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \inf_{v \in \mathcal{A}} E_{x_0} \left\{ \frac{1}{2} \int_0^1 \|v(t)\|^2 dt + h(X^{v,\varepsilon}) \right\} \\ &\leq \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} E_{x_0} \left\{ \frac{1}{2} \int_0^1 \|v^\varepsilon(t)\|^2 dt + h(\bar{X}^\varepsilon) \right\} \\ &\leq \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} E_{x_0} \left\{ \sum_{k=1}^r \int_{t_k}^{t_{k+1}} L^{(1)}(\bar{X}^\varepsilon(t), \beta_k^{(1)}) \gamma^{(1),\varepsilon}(dt) \right\} \\ &\quad + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} E_{x_0} \left\{ \sum_{k=1}^r \int_{t_k}^{t_{k+1}} L^{(2)}(\bar{X}^\varepsilon(t), \beta_k^{(2)}) \gamma^{(2),\varepsilon}(dt) + h(\bar{X}^\varepsilon) \right\} \\ &= E_{x_0} \left\{ \sum_{k=1}^r \int_{t_k}^{t_{k+1}} \left[L^{(1)}(\bar{X}(t), \beta_k^{(1)}) \hat{\gamma}^{(1)}(t) + L^{(2)}(\bar{X}(t), \beta_k^{(2)}) \hat{\gamma}^{(2)}(t) \right] dt \right\} \\ &\quad + E_{x_0} \{h(\bar{X})\} \\ &= \sum_{k=1}^r \int_{t_k}^{t_{k+1}} g_k(t) dt + E_{x_0} \{h(\bar{X})\} \\ &\leq \int_0^1 \hat{L}(\psi^*(t), \dot{\psi}^*(t)) dt + h(\psi^*) + \eta \\ &= I_{x_0}(\psi^*) + h(\psi^*) + \eta. \end{aligned}$$

La première ligne de la démonstration est une suite de la formule de représentation donnée dans le théorème 3.1.1. Dans la deuxième ligne, nous introduisons la famille des contrôles $\{v^\varepsilon, \varepsilon > 0\}$. L'équation (4.9), les définitions des mesures $\gamma^{(i),\varepsilon}$ et des processus contrôlés \bar{X}^ε donnent la troisième et la quatrième ligne. Avec la probabilité 1 pour $i = 1, 2$ et $\gamma^{(i),\varepsilon} \Rightarrow \gamma^{(i)}$, ce qui est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue et a la décomposition $\gamma^{(i)}(dt) = \hat{\gamma}^{(i)}(t)(dt)$. Par conséquent, la convergence uniforme de \bar{X}^ε vers \bar{X} avec la probabilité 1 dans \mathbb{R}^d de $L^{(i)}(\cdot, \beta)$ pour chaque $\beta \in \mathbb{R}^d$. Le théorème 5.5 dans [3], la continuité de h sur $\mathcal{C}([0, 1])$, et le théorème de la convergence dominée de Lebesgue donnent les lignes cinq et six. Avec la probabilité 1 $\bar{X}(t) = \psi^*(t)$ pour tout $t \in [0, 1]$. Les trois dernières lignes de la démonstration suivent maintenant des propriétés de $\hat{\gamma}^{(i)}$ donné à partir de (3.29) et (4.10), l'inégalité (4.11) relative à g_k et $\hat{L}(\cdot, \cdot)$, et la définition de $I_{x_0}(\psi^*)$.

Puisque $\eta > 0$ est arbitraire, nous avons montré que la limite supérieure

$$\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} W^\varepsilon(x_0) \leq I_{x_0}(\psi^*) + h(\psi^*)$$

est valable pour la sous-suite convergente. Un argument par l'absurde appliqué à une suite arbitraire de la famille d'origine $\{W^\varepsilon(x_0), \varepsilon > 0\}$ donne la même limite supérieure pour toute la famille. Ceci termine la preuve de la borne supérieure du principe de Laplace . Puisque $I_{x_0}(\cdot)$ a un ensemble de niveau compact [7, théorème 7.6.1], ceci termine la preuve du principe de Laplace indiqué dans le théorème 2.2.1.

Conclusion

Cette étude nous a permis de déduire le principe de Laplace pour la famille $\{X^\varepsilon, \varepsilon > 0\}$ dans l'espace de probabilité canonique $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$, cf le théorème 2.2.1. En bref, ce principe de Laplace est valable uniformément sur le compact $K \in \mathbb{R}^d$.

Il a également permis d'énoncer une formule de représentation, ainsi que des résultats généraux sur la compacité et la convergence. Cela exige l'analyse du comportement asymptotique de $\omega^\varepsilon(x_0) \doteq -\log E_{x_0}\{\exp[-h(X^\varepsilon)/\varepsilon]\}$. Cette analyse limite les propriétés de certaines familles de contrôles, étudie la compacité et introduit le processus contrôlé dans la représentation. Cette recherche a aussi contribué à prouver le principe de Laplace qui est de montrer que

$$\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon \log E_{x_0} \left\{ \exp \left[-\frac{h(X^\varepsilon)}{\varepsilon} \right] \right\} \leq - \inf_{\varphi \in \mathcal{C}([0,1]:\mathbb{R}^d)} \{I_{x_0}(\varphi) + h(\varphi)\}$$

et

$$- \inf_{\varphi \in \mathcal{C}([0,1]:\mathbb{R}^d)} \{I_{x_0}(\varphi) + h(\varphi)\} \leq \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon \log E_{x_0} \left\{ \exp \left[-\frac{h(X^\varepsilon)}{\varepsilon} \right] \right\}$$

pour toute fonction continue bornée h de $\mathcal{C}([0,1] : \mathbb{R}^d)$ sur \mathbb{R} , et de dire la nécessité de certaines propriétés de $L^{(i)}(x, \beta)$, pour $i = 0, 1, 2$ et de $\tilde{L}(x, \beta)$. Donc, en conclusion, le principe de Laplace est équivalent à un principe de grandes déviations avec la même fonctionnelle d'action et le principe de grandes déviations pour la famille $\{X^\varepsilon, \varepsilon > 0\}$ est la conséquence directe du théorème 2.2.1 qui est le résultat principal de ce mémoire.

Un sujet d'étude possible est "d'étudier le coefficient de diffusion où le σ présente de discontinuité, ou bien le processus est avec réflexion à la frontière mais il y a de discontinuité sur la dérive et le coefficient de diffusion".

Annexe A

Théorème classique

Théorème de représentation de Skorohod

Théorème A.1. Soit $X_n, n \geq I$, une suite de variables aléatoires à valeurs dans un espace topologique S , de Lusin. Supposons que X_n converge en loi vers une variable aléatoire X à valeurs dans S quand $n \rightarrow \infty$. Alors il existe un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ tel que :

- * pour chaque entier n , Y_n et X_n ont même loi ;
- * les variables aléatoires Y et X ont même loi ;
- * Y_n converge $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ -presque sûrement vers Y .

Mode de convergence : théorème de Prohorov

Théorème A.2. Soit μ_n une suite de probabilités sur \mathbb{R} . Pour que la suite μ_n soit tendue il faut et il suffit qu'on puisse extraire de μ_n une sous-suite μ_{n_k} qui converge vers une probabilité μ .

Cramer dans le cas général

Théorème A.3. Le système (Σ) admet une solution unique $(\chi_1; \chi_2; \dots, \chi_n)$ si et seulement si c'est un système de Cramer.

Dans ce cas, cette solution est donnée par les formules de Cramer :

$$\text{pour tout } i \in \{1, 2, \dots, n\}, \chi_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}.$$

Dans ces formules, Δ désigne le déterminant de (Σ) , et Δ_i le déterminant obtenu en remplaçant, dans Δ , la i -ème colonne par la colonne des b_k qui figurent dans le second membre de (Σ) .

Annexe B

Quelques inégalités importantes

Probabilité :

Inégalité de Chebychev :

Soit ϕ une fonction non décroissante de \mathbb{R} et $\phi(t) > 0$. Alors $P(X \geq t) \leq \phi(t)^{-1} E[\phi(X)]$. Les exemples généralement utilisés de l'inégalité de Chebychev sont $P\{|X| \geq t\} \leq t^{-p} E[|X|^p]$ et $P\{X \geq t\} \leq e^{-\lambda t} E[e^{\lambda X}]$ pour tout t , p et λ positifs.

Inégalité de Jensen :

Soit $-\infty \leq a < b$, $P(a < \mathcal{X} < b) = 1$, et soit ϕ une fonction convexe sur (a, b) . Supposons que $E\mathcal{X}$ et $E[\phi(\mathcal{X})]$ sont tous définies. Alors $\phi(E\mathcal{X}) \leq E[\phi(\mathcal{X})]$. Si ϕ est strictement convexe alors $\phi(E\mathcal{X}) = E[\phi(\mathcal{X})]$ si et seulement si $P(\mathcal{X} = E\mathcal{X}) = 1$.

Inégalité de Cauchy-Swartz

$$E[|XY|] \leq E[X^2]^{1/2} \cdot E[Y^2]^{1/2}.$$

Mesure et intégrale :

Inégalité de Hölder : Soient p et q deux réels tels que $p > 1$ et $q > 1$ et $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Alors, pour 2 fonctions mesurables f et g on a

$$\int |fg| d\mu \leq \left(\int |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\int |g|^q d\mu \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Lemme de Fatou : Soit $\{f_n\}$ des fonctions non négatives de Borel. Alors

$$\int_{\mathcal{X}} (\liminf_{n \rightarrow \infty} f_n) d\mu \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathcal{X}} f_n d\mu.$$

Annexe C

Calcul stochastique :

Chaîne de Markov :

Définition C.1. Soit $E = 1, 2, \dots, m$ un ensemble fini. Une chaîne de Markov sur E est une suite de variables aléatoires (X_0, X_1, \dots) , prenant leurs valeurs dans E , telle que

$$P\{X_k = j / X_1 = i_1, \dots, X_{k-1} = i_{k-1}\} = P\{X_k = j / X_{k-1} = i_{k-1}\}.$$

Cette dernière probabilité ne dépendant que de j et i_{k-1} , mais pas de k . La matrice de transition de la chaîne est la matrice P de la taille $m \times m$ dont les éléments sont donnés par : $p_{ij} = P\{X_k = j / X_{k-1} = i\}$.

Mouvement Brownien :[12]

Définition C.2. Soit $(B_t)_{t \geq 0}$ un processus stochastique tel que $B_t : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ est un mouvement brownien standard si :

- $B_0 = 0$
- B_t est un processus à accroissement indépendant
- $B_{t+h} - B_t \rightarrow N(0, \sqrt{h})$ pour tout $t \geq 0$ et $h > 0$
- $t \in \mathbb{R}_t \rightarrow B_t \in \mathbb{R}$ P -p.s continue.

Comme précédemment, soit $(\mathcal{W}^m, \mathcal{B}, \theta)$ l'espace canonique de probabilité pour le mouvement brownien de dimension m dans l'intervalle de temps $[0, T]$, et soit (\mathcal{G}_t) un filtration θ -augmenté produit par le processus de même rang W . Soit $\mathcal{M}^2[0, T]$ l'espace de tous les processus (\mathcal{G}_t) -prévisibles de carré intégrable à valeur dans \mathbb{R}^m . Le théorème 3.1 dans Boué et Dupuis [1998] fournit la représentation suivante pour les fonctions de Laplace du

mouvement brownien W . Pour tout $F : \mathcal{W}^m \rightarrow \mathbb{R}$ bornée et mesurable,

$$-\log \mathbf{E} \left[e^{-F(W)} \right] = \inf_{v \in \mathcal{M}^2[0,T]} \mathbf{E} \left[\frac{1}{2} \int_0^T |v_s|^2 ds + F \left(W + \int_0^\cdot v_s ds \right) \right], \quad (\text{C.1})$$

où \mathbf{E} dénote l'espérance par rapport à la mesure de Wiener θ . Soit $b(\cdot, \cdot)$ et $\sigma(\cdot, \cdot)$ des fonctions prévisibles de $[0, T] \times \mathcal{W}^d$ vers \mathbb{R}^d et vers $\mathbb{R}^{d \times m}$, respectivement. Fixons $x \in \mathbb{R}^d$, et on considère l'équation différentielle stochastique

$$dX_t = b(t, X)dt + \sigma(t, X)dW_t \quad (\text{C.2})$$

pour $t \in [0, T]$ et avec la condition initiale $X_0 = x$. Supposons que l'équation (C.2) a une solution forte. Alors il existe une fonction $\mathcal{B}(\mathcal{W}^m) \setminus \mathcal{B}(\mathcal{W}^d)$ -mesurable $h : \mathcal{W}^m \rightarrow \mathcal{W}^d$ tel que $X = h[W]$ θ -presque sûrement ; par le théorème 10.4 dans Rogers et Williams [2000, p.126]. Par conséquent, pour tout $F : \mathcal{W}^d \rightarrow \mathbb{R}$ bornée et mesurable, $F \circ h$ est bornée et mesurable de \mathcal{W}^m vers \mathbb{R} . Dans la formule de représentation (C.1) pour le mouvement brownien, il suit que

$$\begin{aligned} -\log \mathbf{E} \left[e^{-F(X)} \right] &= -\log \mathbf{E} \left[e^{-F \circ h(W)} \right] \\ &= \inf_{v \in \mathcal{M}^2[0,T]} \mathbf{E} \left[\frac{1}{2} \int_0^T |v_s|^2 ds + F \circ h \left(W + \int_0^\cdot v_s ds \right) \right]. \end{aligned} \quad (\text{C.3})$$

Pour $v \in \mathcal{M}^2[0, T]$, considérons l'équation différentielle stochastique contrôlée

$$dX_t^v = b(t, X^v)dt + \sigma(t, X^v)v_t dt + \sigma(t, X^v)dW_t \quad (\text{C.4})$$

pour $t \in [0, T]$ et avec la condition initiale $X_0^v = x$. Si l'existence forte et l'unicité de la trajectoire se tiennent pour l'équation (C.2), alors la limite $F \circ h(W + \int_0^\cdot v_s ds)$ dans (C.3) peut être réécrite en terme de solutions de l'équation (C.4). Le lemme C.3 devrait être comparé au Théorème 4.1 dans Boué et Dupuis [1998].

Lemme C.3. *Soit $v \in \mathcal{M}^2[0, T]$ tel que $\int_0^T |v_s|^2 ds \leq N$ θ -presque sûrement pour quelque $N > 0$. Supposons que l'existence forte et l'unicité de la trajectoire soient vérifiées pour l'équation (C.2) avec la condition initiale $X_0 = x$. Alors l'équation (C.4) a une unique solution forte X^v avec $X_0^v = x$ et*

$$h \left(W + \int_0^\cdot v_s ds \right) = X^v \quad \theta - p.s.$$

Démonstration. On va définir le processus

$$\tilde{W}_t = W_t + \int_0^t v_s ds, \quad t \in [0, T].$$

Puisque $\int_0^t |v_s|^2 ds \leq N$ θ -presque sûrement, le théorème de Girsanov est applicable; par conséquent, il existe une mesure γ dans \mathcal{W}^m équivalente à θ telle que \tilde{W} soit un \mathcal{G}_t -mouvement Brownien sur $[0, T]$ (par exemple, Théorème 5.2 dans Karatzas et Shreve [1991, p.191]). Par rapport à la mesure γ , l'équation contrôlée (C.4) devient

$$dX_t^v = b(t, X^v)dt + \sigma(t, X^v)d\tilde{W}_t. \quad (\text{C.5})$$

L'unicité des solutions de l'équation (C.4) suit de l'hypothèse d'unicité de la trajectoire pour l'équation (C.2). En effet, si X et Y sont deux solutions de l'équation (C.4) contrôlées par θ et dirigée par W , alors elles sont des solutions de l'équation (C.5) contrôlée par γ et par rapport à \tilde{W} . Par l'unicité des trajectoires, X , Y sont indistinguables. Nous prouvons maintenant l'existence des solutions. Pour la continuité du processus Z , (\mathcal{G}_t) -adapté, définissons l'application $\Psi(Z) : \mathcal{W}^m \rightarrow \mathcal{W}^d$ par

$$\Psi(Z)(w) = x + \int_0^\cdot b(s, h[Z(w)])ds + \left(\int_0^\cdot \sigma(s, h[Z(w)])dZ_s \right) (w).$$

L'application $\Psi(Z)$ est certainement bien définie quand Z est donnée par

$$Z_t(w) = \tilde{W}_t(w) = w(t) + \int_0^t v_s(w)ds$$

avec $v \in \mathcal{M}^2[0, T]$. Dans cette situation, pour θ -presque tout $w \in \mathcal{W}^m$,

$$\begin{aligned} \Psi(\tilde{W})(w) &= x + \int_0^\cdot b(s, h[\tilde{W}(w)])ds \\ &+ \int_0^\cdot \sigma(s, h[\tilde{W}(w)])v_s(w)ds + \left(\int_0^\cdot \sigma(s, h[\tilde{W}])dW_s \right) (w), \end{aligned} \quad (\text{C.6})$$

où W est le processus coordonnée sur \mathcal{W}^m . Puisque $h[W]$ est une solution de l'équation (C.2), par construction nous avons

$$h[W(w)] = \Psi(W)(w) \quad \text{pour } \theta\text{-presque tout } w \in \mathcal{W}^m.$$

Par le théorème 10.4 dans Rogers et Williams [2000, p.126], $h(\tilde{W})$ satisfait

$$h[\tilde{W}] = x + \int_0^\cdot b(s, h[\tilde{W}])ds + \int_0^\cdot \sigma(s, h[\tilde{W}])d\tilde{W}_s \quad \gamma\text{-p.s.}$$

Puisque γ est équivalent à θ , il suit que

$$h[\tilde{W}] = \Psi(\tilde{W}) \quad \theta\text{-p.s.}$$

Grâce à (C.6), ceci implique que θ -presque sûrement,

$$\begin{aligned} h[\tilde{W}]_t &= \Psi(\tilde{W})_t \\ &= x + \int_0^t b(s, h[\tilde{W}])ds + \int_0^t \sigma(s, h[\tilde{W}])v_s ds + \int_0^t \sigma(s, h[\tilde{W}])dW_s, \end{aligned}$$

montrant que $h[\tilde{W}]$ est une solution forte de l'équation (C.4) par rapport à W et θ . Nous avons déjà vu que l'unicité de la trajectoire se tient pour l'équation (C.4). Il suit que

$$h\left(W + \int_0^\cdot v_s ds\right) = W^v \quad \theta\text{-p.s.}$$

pour toute solution X^v de (C.4) avec $X_0^v = x$. \square

Le lemme suivant fournit une estimation de croissance si les coefficients b , σ satisfont une condition de croissance sous linéaire. La preuve utilise seulement des arguments standard comprenant la localisation le long des périodes de sortie, de l'inégalité de Burkholder-Davis-Gundy, et du lemme de Gronwall.

Lemme C.4. *Soit $v \in \mathcal{M}^2[0, T]$ tel que $\int_0^T |v_s|^2 ds \leq N$ θ -presque sûrement pour $N > 0$. Supposons que b , σ sont tels que, pour une certaine constante positive M ,*

$$|b(t, \varphi)| \vee |\sigma(t, \varphi)| \leq M \left(1 + \sup_{s \in [0, t]} |\varphi_s|\right)$$

pour tout $t \in [0, T]$, tous $\varphi \in \mathcal{W}^d$. Si X^v est une solution de l'équation (A.4) avec $X_0^v = x$, alors pour tout $p \geq 2$,

$$\mathbf{E} \left[\sup_{t \in [0, T]} |X_t^v|^p \right] \leq C_p(T, N, M)(1 + |x|^p),$$

où $C_p(T, N, M)$ est non décroissante dans chacun de ses trois arguments.

Processus indistinguable

Deux processus X et Y sont dits indistinguables si $P(\forall t \in T, X_t = Y_t) = 1$ (On admet implicitement que l'évènement $\{\forall t \in T, X_t = Y_t\}$ est mesurable.

Annexe D

Girsanov

Théorème de Girsanov

[Geneviève Gauthier. *Changement de mesure et théorème de Girsanov*, 80-646-08, *Calcul stochastique*. HEC Montréal]

Théorème D.1 (Théorème de Girsanov I). \star Nous nous concentrons sur un intervalle de temps borné $[0, T]$.

\star Soit $W = \{W_t : t \in [0, T]\}$ représente un mouvement brownien construit sur un espace probabilisé filtré $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}, P)$ tel que la filtration $\{\mathcal{F}_t\}$ est celle engendrée par le mouvement brownien, augmentée de tous les événements de probabilité nulle, c'est-à-dire que pour tout $t \geq 0$,

$$\mathcal{F}_t = \sigma(\mathcal{N} \text{ et } W_s : 0 \leq s \leq t).$$

\star Le théorème suivant nous permettra de construire nos mesures risque-neutre.

Théorème D.2 (Théorème de Cameron-Martin-Girsanov). Soit $\gamma = \{\gamma_t : t \in [0, T]\}$, un processus $\{\mathcal{F}_t\}$ -prévisible tel que

$$E^P \left[\exp \left(\frac{1}{2} \int_0^T \gamma_t^2 dt \right) \right] < \infty.$$

Il existe une mesure Q sur (Ω, \mathcal{F}) telle que

(CMG1) Q est équivalente à P .

(CMG2)

$$\frac{dQ}{dP} = \exp \left[- \int_0^T \gamma_t dW_t - \frac{1}{2} \int_0^T \gamma_t^2 dt \right].$$

(CMG3) Le processus $\tilde{W}_t = \{\tilde{W}_t : t \in [0, T]\}$ défini par $\tilde{W}_t = W_t + \int_0^t \gamma_s ds$ est un $(\{\mathcal{F}_t\}, Q)$ -mouvement brownien.

Théorème D.3 (Théorème de Girsanov III). (ref. Baxter et Rennie, page 74; Lamberton et Lapeyre, page 84).

La condition $E^P \left[\exp \left(\frac{1}{2} \int_0^T \gamma_t^2 dt \right) \right] < \infty$ est une condition suffisante mais non nécessaire. Elle est connue sous l'appellation de *condition de Novikov*

Théorème D.4 (Théorème de Girsanov IV). \star Considérons l'équation différentielle stochastique

$$dX_t = b(X_t, t)dt + a(X_t, t)dW_t$$

où W représente un mouvement brownien sur l'espace probabilisé filtré $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}, P)$.

- \star Nous supposons que les coefficients de dérive et de diffusion sont tels qu'il existe une unique solution à l'équation que nous notons X .
- \star Nous cherchons une mesure de probabilité Q qui fasse en sorte que sur l'espace $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}, Q)$, la dérive de X soit $\tilde{b}(X_t, t)$ au lieu de $b(X_t, t)$.

En effet, on va prendre d'abord

$$\begin{aligned} dX_t &= b(X_t, t)dt + a(X_t, t)dW_t \\ &= \tilde{b}(X_t, t)dt + a(X_t, t) \left(\frac{b(X_t, t) - \tilde{b}(X_t, t)}{a(X_t, t)} \right) dt \\ &\quad + a(X_t, t)dW_t \\ &\text{tel que } a(X_t, t) \text{ soit différent de } 0. \\ &= \tilde{b}(X_t, t)dt + a(X_t, t) d \left(W_t + \int_0^t \frac{b(X_s, s) - \tilde{b}(X_s, s)}{a(X_s, s)} ds \right) \\ &= \tilde{b}(X_t, t)dt + a(X_t, t)d\tilde{W}_t \end{aligned}$$

où

$$\tilde{W}_t = W_t + \int_0^t \gamma_s ds \quad \text{et} \quad \gamma_t = \frac{b(X_t, t) - \tilde{b}(X_t, t)}{a(X_t, t)}.$$

Théorème D.5 (Théorème de Girsanov V). \star si

$E^P \left[\exp \left(\frac{1}{2} \int_0^T \gamma_t^2 dt \right) \right] < \infty$ alors par les théorèmes de Radon-Nikodym et de Cameron-Martin-Girsanov,

$$Q(A) = E^P \left[\exp \left[- \int_0^T \gamma_t dW_t - \frac{1}{2} \int_0^T \gamma_t^2 dt \right] \delta_A \right], A \in \mathcal{F}$$

et $\tilde{W} = \{\tilde{W}_t : t \in [0, T]\}$ est un (\mathbb{F}, Q) -mouvement brownien.

★ *En pratique, nous n'avons pas besoin de déterminer la mesure Q . Il nous suffit de savoir qu'elle existe et de connaître l'équation différentielle stochastique du processus qui nous intéresse sur l'espace $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}, Q)$.*

Lemme de Gronwall : Soient φ, ψ et y trois fonctions continues sur un segment $[a, b]$, à valeurs positives et vérifiant l'inégalité

$$\forall t \in [a, b], \quad y(t) \leq \varphi(t) + \int_a^t \psi(s)y(s)ds$$

alors

$$\forall t \in [a, b], y(t) \leq \varphi(t) + \int_a^t \varphi(s)\psi(s) \exp\left(\int_s^t \psi(u)du\right) ds.$$

En effet, posons $F(t) = \int_a^t \psi(s)y(s)ds$. En multipliant les deux membres de l'inégalité donnée en hypothèse par $\psi(t)$, on obtient

$$F'(t) - \psi(t) \leq \varphi(t)\psi(t),$$

ce qui s'écrit aussi

$$G'(t) \leq \varphi(t)\psi(t) \exp\left(-\int_a^t \psi(s)ds\right) \quad \text{avec} \quad G(t) = F(t) \exp\left(-\int_a^t \psi(s)ds\right).$$

Comme $G(a) = F(a) = 0$, on en déduit, par intégration

$$G(t) \leq \int_a^t \varphi(s)\psi(s) \exp\left(-\int_a^s \psi(u)du\right) ds.$$

Or par hypothèse, $y(t) \leq \varphi(t) + G(t) \exp\left(\int_a^t \psi(s)ds\right)$, d'où le résultat en utilisant l'inégalité ci-dessus.

Annexe E

Kolmogorov

Critère de Kolmogorov(sur le processus \mathbf{X}) :

Supposons que le processus $X = \{X_t; 0 \leq t \leq T\}$ dans l'espace de probabilité (Ω, \mathcal{F}, P) satisfaisant à la condition

$$E|X_t - X_s|^\alpha \leq C|t - s|^{1+\beta}, 0 \leq s, t \leq T,$$

pour tout α, β et $C \in \mathbb{R}^+$. Alors il existe une modification continue $\tilde{X} = \{\tilde{X}_t; 0 \leq t \leq T\}$ dans X , donc elle est localement Hölderienne continue d'exposant γ pour chaque $\gamma \in (0, \beta/\alpha)$, c'est à dire,

$$P \left[w; \sup_{0 < t-s < h(w), s, t \in [0, T]} \frac{|\tilde{X}_t(w) - \tilde{X}_s(w)|}{|t - s|^\gamma} \leq \delta \right] = 1,$$

où $h(w)$ est presque sûrement aléatoire positive et $\delta > 0$ est une constante quelconque.

Démonstration. cf. Ioannis Karatzas et Steven E. Shreve. □

Critère de Kolmogorov(sur la mesure \mathbb{Q}) :

Soit Q une mesure absolument continue par rapport à \mathbb{P} sur \mathcal{F}_∞ . On suppose que $(Z_t)_t$ est continue. Alors,

- i) chaque \mathbb{P} -semi-martingale est une \mathbb{Q} -semi-martingale.
- ii) si M est une \mathbb{P} -martingale locale continue et si $M' = M - \frac{1}{Z} \langle M, Z \rangle$, alors M' est bien définie sur $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_t, \mathbb{Q})$ et $(M'_t)_t$ est une \mathbb{Q} -martingale locale. De plus

$$\langle M', M' \rangle = \langle M, M \rangle \quad \mathbb{Q} - ps.$$

Soit X_t un processus de \mathbb{R}^n vérifiant une équation de la forme

$$dX_t = a(t, w)dt + b(t, w)dB_t$$

pour tout $t \in [0, +\infty[$, où les processus a et b sont \mathcal{F}_t -adaptés et B_t est un mouvement brownien m -dimensionnel. On suppose qu'il existe des processus $\theta(t, w) \in \mathbb{R}^m$ et $\alpha(t, w) \in \mathbb{R}^n$ tels que

$$b(t, w)\theta(t, w) = \alpha(t, w) - a(t, w)$$

vérifiant la condition de Novikov

$$\mathbb{E} \left[\exp \left(\frac{1}{2} \int_0^t \theta_s^2 ds \right) \right] < \infty.$$

Lemme de Kolmogorov Soit $X = (X_t, t \in I)$ un processus aléatoire indexé par un intervalle borné I de \mathbb{R} , à valeurs dans un espace métrique complet (E, d) . Supposons qu'il existe trois réels $q, \varepsilon, C > 0$ tels que, pour tous $s, t \in I$,

$$E[d(X_s, W_t)^q] \leq C|t - s|^{1+\varepsilon},$$

alors, il existe une modification Y de X dont les trajectoires sont höldériennes d'exposant α pour tout $\alpha \in]0, \frac{\varepsilon}{q}[$: pour tout $\alpha \in]0, \frac{\varepsilon}{q}[$ il existe une constante $C_\alpha(w)$ telle que, pour tous $s, t \in I$,

$$d(Y_s(x), Y_t(w)) \leq C_\alpha(w)|t - s|^\alpha.$$

En particulier, Y est une modification continue de X (unique à indistinguabilité près d'après ci-dessus).

Bibliographie

- [1] M.ALANYALI and B.HAJEK. On large deviations of Markov processes with discontinuous statistics. Thechnical report, Univ. of Illinois , 1996.
- [2] P.ANDERSON and S.OREY. Small random perturbation of dynamical systeme with reflecting boundary. *Nagoya Mathematical Journal*, 60, 189-216, 1976.
- [3] P. BILLINGSLEY. *Convergence of Probability Measures*. John wiley and Sons, New york , 1968
- [4] V.M. BLINOVSKII and R.L.DOBRUSHIN. Process level large deviations for a class of piecewise homogeneous random walks. In M. I. Freidlin , editor, *The Dynkin Festschrift. Markov Processes and Their Applications* , volume 34 of progress in Probability, pages 1-59. Birkhäuser, Boston 1994
- [5] M. BOUÉ and P. DIPUIS. A variational representation for certain functionals of Brownian motion . *The Annals of Probability*. 1998, Vol.26, No.4, 1641-1659
- [6] T.S. CHIANG and S.J. SHEU. Large deviation of diffusion processes and occupation times with discontinous drift. Vol. 28, No.1(jan., 2000)pp. 140-165.
- [7] P. DUPUIS. and R.S.ELLIS. *A Weak Convergence Approach to the theory of Large deviations*. John Wiley and Sons, 1997.
- [8] P. DUPUIS and R.S.ELLIS. The Large deviations principle for a general class of queueing systems, I. *Trans , Amer . Math . Soc.* 347 : 2689-2751, 1995.
- [9] P. DUPUIS and R.S.ELLIS. The Large deviations for Markov processes with discontinuous statistics,II : Random walks. *Probab. Th. Relat . Fields*, 91 :153-194,1992.

- [10] P. DUPUIS . R.S.ELLIS and M. BOUÉ. *Probab. Theory : Large deviation for small noise diffusions with discontinuous statistique*. Relat. Fields 116,125-149(2000).
- [11] S. N. ETHEIR . and T. G. KURTZ. *Markov Processes : Characterization and Convergence*. John Wiley and Sons, New York, 1986.
- [12] M. FISCHER . and A. CHIARINI. *On large deviation for small noise Itô processes* . Octobre 18,2012.
- [13] M.I.FREIDLIN. and A. D . WENTZELL *Random perturbations of dynamical systems*. Springer Verlag , Berlin, 1984.
- [14] I.KARATZAS. and S.E.SHREVE *Brownian Motion and Stochastic Calculus*. Springer Verlag ,NY, second edition,1991.
- [15] A.P.KOROSTELEV. and S.L.LEONOV. Action functional for diffusion processes with discontinuous drift, Theory Probab. Appl. 37, 570-576, 1992(In Russian)
- [16] A.P.KOROSTELEV. and S.L.LEONOV. Action functional for diffusion in discontinuous media, Probab. Theory and Related Fields, 94, 317-333, 1993.
- [17] H.J.KUSHNER. *Approximation and Weak Convergence Methods for Random Processes with Applications to Stochastic System Theory*. MIT Press, Cambridge, 1984.
- [18] H.J.KUSHNER. and P.DUPUIS. *Numerical Methods for Stochastic control Problems in Continuous Time*. Spring - Verlag, New York, 1992.
- [19] R.T. PUKHAFELLAR. *Convex Analyses* . Princeton University Press, Princeton , 1970 .
- [20] A.JU.VERETENIKOV. On strong solutions and explicit formulas for solutions of stochastic integral equations. Math. USSR Sbornik, 39, 387-403, 1981.
- [21] K.WANG and R.S.ELLIS. Limit theorems for the empirical vector of the Curie-Weiss-Potts model. *Stoch. Proc . Appl.*, 35 :59-79,1990.
- [22] K.WANG and R.S.ELLIS. Limit theorems for maximum likelihood estimators in the Curie-Weiss-Potts model.*Stoch. Proc . Appl.*, 40 :251-288, 1992

Impétrant : Antemasoa Zonarindra RANAIVOANDRIAMANANTENA

E-mail : ivoandry05@gmail.com

Tél : (+261)331730004

Titre : GRANDES DEVIATIONS DES DIFFUSIONS AVEC PETIT BRUIT ET STATISTIQUES DISCONTINUES

Résumé : Dans ce travail, on prouve un principe de grandes déviations pour une classe de diffusion non-dégénérée avec petit bruit, avec la dérive discontinue et avec la matrice de diffusion dépendant de l'état.

La preuve est basée sur une représentation variationnelle pour une solution forte d'équations différentielles stochastiques et sur une méthode de convergence faible.

Mots clés : Grand déviations diffusions avec petit bruit, statistique discontinue

Abstract : In this work, we prove the large deviation principle for a class of non-degenerate small noise diffusions with discontinuous drift and with state-dependent diffusion matrix. The proof is based on a variational representation for functionals of strong solutions of stochastic differential equations and on weak convergence methods.

KeyWords : Large deviation, small noise diffusions, discontinuous statistique

Encadreur : Mr Toussaint Joseph RABEHERIMANANA
Professeur Titulaire
Département de Mathématiques Informatique
Faculté des Sciences
Université d'Antananarivo
E-mail :rabeherimanana.toussaint@gmx.fr