ECOLE DOCTORALE
PROBLÉMATIQUES DE L'ÉDUCATION ET DIDACTIQUES DES DISCIPLINES
PE2Di

Université d'Antsiranana
MADAGASCAR
"Oser le changement vers l'excellence"

UNIVERSITE D'ANTANANARIVO

Ecole Doctorale: Problématiques de l'Education et Didactiques des Disciplines
Equipe d'Accueil: Education et Didactique des Mathématiques et de l'Informatique

THÈSE

présentée à l'UNIVERSITÉ D'ANTANANARIVO

En vue de l'obtention du grade de

DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ D'ANTANANARIVO

Spécialité : DIDACTIQUE DES MATHÉMATIQUES ET DE L'INFORMATIQUE

par :

Stephan Rodin RANDRIANTSARALAZA

Enseignement-apprentissage du calcul mental en primaire et secondaire et analyse comparative des méthodes ASI-M_{GK} et TRI

soutenue publiquement le *03 Mai 2019* **, devant le jury composé de :**

Jean Claude Omer ANDRIANARIMANANA, Professeur Titulaire, Université d'Antananarivo	Président
Jean DIATTA, Professeur des universités , Université de La Réunion	Rapporteur interne
Hanitriniaina Sammy Grégoire RAVELONIRINA, Professeur, Université d'Antananarivo	Rapporteur externe
Feno Daniel RAJAONASY, Maître de Conférences, Université de Toamasina	Examinateur
Princy RANDRIAMBOLOLONDRANTOMALALA, Professeur, Université d'Antananarivo	Examinateur
André TOTOHASINA, Professeur Titulaire, Université d'Antsiranana	Directeur
Dominique TOURNÈS, Professeur des universités, Université de La Réunion	Co-Directeur

THESE

ECOLE DOCTORALE
PROBLÉMATIQUES DE L'ÉDUCATION ET DIDACTIQUES DES DISCIPLINES
PE2Di

Université d'Antsiranana
MADAGASCAR
"Oser le changement vers l'excellence"

UNIVERSITE D'ANTANANARIVO

ECOLE DOCTORALE: PROBLÉMATIQUES DE L'EDUCATION ET DIDACTIQUES DES DISCIPLINES
EQUIPE D'ACCUEIL: EDUCATION ET DIDACTIQUE DES MATHÉMATIQUES ET DE L'INFORMATIQUE

THÈSE

présentée à l'UNIVERSITÉ D'ANTANANARIVO

En vue de l'obtention du grade de

DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ D'ANTANANARIVO
Spécialité : DIDACTIQUE DES MATHÉMATIQUES ET DE L'INFORMATIQUE

par :

Stephan Rodin RANDRIANTSARALAZA

Enseignement-apprentissage du calcul mental en primaire et secondaire et analyse comparative des méthodes ASI-M_{GK} et TRI

soutenue publiquement le *03 Mai 2019* **, devant le jury composé de :**

Jean Claude Omer ANDRIANARIMANANA, Professeur Titulaire, Université d'Antananarivo	Président
Jean DIATTA, Professeur des universités , Université de La Réunion	Rapporteur interne
Hanitriniaina Sammy Grégoire RAVELONIRINA, Professeur, Université d'Antananarivo	Rapporteur externe
Feno Daniel RAJAONASY, Maître de Conférences, Université de Toamasina	Examinateur
Princy RANDRIAMBOLOLONDRANTOMALALA, Professeur, Université d'Antananarivo	Examinateur
André TOTOHASINA, Professeur Titulaire, Université d'Antsiranana	Directeur
Dominique TOURNÈS, Professeur des universités, Université de La Réunion	Co-Directeur

T H E S E

Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier Madame Judith RAZAFIMBELO, Professeure Titulaire à l'Université d'Antananarivo, Madagascar, Directeur de l'École Doctorale *Problématiques de l'Éducation et Didactique des Disciplines* (PE2Di) de m'avoir inscrit parmi ses doctorants.

Je tiens à remercier tous les membres du jury pour avoir bien voulu donner de leur temps pour lire ce travail, pour avoir accepté de participer à la soutenance de cette thèse et faire partie des examinateurs. Certains ont dû prendre en compte de se déplacer de leur endroit de travail.

Je tiens à remercier Monsieur Jean Claude Omer ANDRIANARIMANANA, Professeur Titulaire, à l'Université d'Antananarivo, Madagascar, pour avoir accepté de présider le jury.

Je tiens à remercier également mes deux directeurs de thèse Monsieur André TOTOHASINA, Professeur Titulaire de l'Université d'Antsiranana, Madagascar, et Monsieur Dominique TOURNÈS, Professeur des universités, de l'Université de La Réunion, France. Je remercie très chaleureusement Monsieur André TOTOHASINA pour m'avoir proposé ce sujet, et m'avoir supporté dans toutes les étapes de cette thèse et pour tous ses conseils et critiques.

Je tiens à adresser mes vifs remerciements à Monsieur Jean DIATTA, Professeur des universités, à l'Université de La Réunion, France, et à Monsieur Hanitriniaina Sammy Grégoire RAVELONIRINA, Professeur à l'Université d'Antananarivo, Madagascar, pour avoir consacré du temps à la lecture de ce document en tant que rapporteurs de ce travail.

Je tiens également à remercier Monsieur Princy RANDRIAMBOLOLONDRANTOMALALA, Professeur à l'Université d'Antananarivo, Madagascar et Monsieur Feno Daniel RAJAONASY, Maître de Conférences à l'Université de Toamasina, Madagascar, qui ont accepté d'être membres du jury en tant qu'examinateurs.

Enfin, je remercie mille fois ma femme Francise et nos enfants Bruissel, Esmirah et Florida, pour leur soutien précieux moral et affectif et toute ma famille pour son soutien tout le long de cette thèse notamment dans les moments les plus difficiles.

Sommaire

Liste des figures

Liste des tableaux

Liste des sigles et acronymes

APC	:	Approche Par Compétence ;
ASI	:	Analyse Statistique Implicative ;
BAC	:	Baccalauréat de l'enseignement secondaire ;
BEPC	:	Brevet d'Etude du Premier Cycle ;
CCI	:	Courbe Caractéristique d'Items ;
CCT	:	Courbe Caractéristique du Test ;
ET	:	Erreur-type ;
FRI	:	Fonction de Réponse d'Items ;
IRT	:	Item Response Theory ;
IST	:	Institut Supérieur de Technologie ;
MDMM	:	Modèle de Double Monotonie de Mokken ;
MEN	:	Ministère de l'Éducation Nationale ;
$\mathbf{M_{GK}}$	:	Mesure de Guillaume Khenchaff ;
MHMM	:	Modèle d'Homogénéité Monotone de Mokken ;
MRI	:	Modèle de Réponse aux Items ;
OE	:	Opportunités d'Évaluation ;
PGCD	:	Plus Grand Commun Diviseur ;
PLM	:	Procédé La Martinière ;
PPCM	:	Plus Petit Commun Multiple ;
PPO	:	Pédagogie Par Objectif ;
TRI	:	Théorie des Réponse aux Items ;
UNESCO	:	United Nations Educational, Scientific and Cultural Organization .

Liste des annexes

CHAPITRE 1

Introduction générale

1.1 Contextes et problématique

L'éducation est incontestablement le levier du développement humain durable, et elle ne doit pas « conduire à une déculturation, comme le craignent de nombreux parents, notamment en zone rurale, mais elle doit conduire l'enfant à trouver ses repères entre le monde social et culturel auquel il appartient et le monde de l'école avec ses savoirs calibrés. Les jeunes scolarisés pourraient alors jouer un rôle de médiation culturelle favorable au développement durable » (Noyau, 2004).
L'éducation est l'une des plus merveilleuses pratiques de l'homme et a toujours été l'une des préoccupations majeures des sociétés. En effet, la transmission des systèmes de valeurs humaines, l'évolution actuelle de la science et de la technologie ont été possibles grâce à l'éducation. C'est ainsi que dans les écoles ont été développés des programmes et des méthodes d'enseignement qui sont censés aider les apprenants à acquérir des aptitudes et des attitudes favorisant leur épanouissement. Les mathématiques sont considérées aujourd'hui comme l'une des disciplines les plus fondamentales de l'enseignement général et professionnel, et une des conditions nécessaires d'accès à un nombre de plus en plus grand de métiers (Laborde et Vergnaud, 1994). Elle est l'une des disciplines clés enseignées dans les écoles malgaches.

Pendant le renforcement académique des enseignants du primaire sur les mathématiques, nous avons constaté que le problème majeur de l'enseignement de mathématiques à Madagascar est basé sur le calcul mental et les stratégies d'enseignement de mathématiques. Aussi, les enseignants maîtrisent-ils les disciplines qu'ils enseignent et leur didactique ?

En outre, les difficultés que rencontrent les apprenants dans les écoles secondaires malgaches (Collège et Lycée) sur l'enseignement de mathématiques sont les modes des raisonnements et les recours à la calculatrice devant un calcul simple. Il est important de cerner les capacités réelles des apprenants, leurs difficultés spécifiques, les causes de ces difficultés, leurs manifestations, leurs besoins langagiers, et les situations d'apprentissage auxquelles ils participent. Une analyse de ces éléments permettra de trouver de meilleures manières de gérer l'enseignement-apprentissage des mathématiques et ce, la pratique du calcul mental dans toutes les classes.

Le calcul mental a besoin des techniques efficaces en apprentissage, des techniques efficaces en temps (c'est-à-dire l'efficience) et une expérimentation pédagogique pour pouvoir rapidement répondre aux questions posées. L'opportunité vraiment facile de se procurer une calculette, un téléphone portable, voire un ordinateur, serait probablement à l'origine de cet évitement du calcul mental, voire d'un comportement de dépendance prégnante aux machines, même pour opérer à des petits calculs quotidiens. Cette opportunité se trouve encore renforcée, peut-être par ignorance, par le décideur du MEN (Ministère de l'Éducation Nationale) de distribuer gracieusement des tablettes aux écoliers. Par ailleurs, le choix du mot malagasy « Solosaina » (littéralement « Suppléant en réflexion ») et en raisonnement comme traduction officielle d'ordinateur risque aussi d'engendrer une paresse intellectuelle chez nos jeunes à Madagascar. C'est pour cela qu'à nos jours, les élèves ne savent pratiquement plus calculer mentalement. L'apprentissage de calcul mental s'acquiert tout d'abord par le développement de pratiques de calcul mental chez les enseignants et l'identification des méthodes pédagogiques appropriées afin de permettre de résoudre ces problèmes.

Sur le plan mathématique, le calcul mental comprend les points suivants :

1. Des prérequis :
   - Table d'addition et de multiplication classiques ;
   - Les règles de complémentation aux plus proches multiples de dix ou plus proches puissances de 10 supérieurs à un entier ;
   - Savoir doubler, diviser par 2, tripler, diviser par 3, quadrupler, diviser par 4, quintupler, diviser par 5, multiplier par 5, par 9, par 11, multiplier et diviser par 10, 100, 1000, 10^k avec k un entier.
2. Addition mentale de deux entiers ou décimaux à un chiffre, à 2 chiffres, à 3 chiffres,..., à k chiffres ; savoir la différence entre procédés par calcul mental et par calcul posé. Une technique repose sur la décomposition additive commençant par les puissances de 10 le plus élevés, et en procédant au regroupement par ordre décroissant de multiples

de puissance de 10.

3. Soustraction mentale de deux nombres (entiers ou décimaux) :
4. Multiplication mentale de deux facteurs entiers (ou facteurs décimaux) de 2 chiffres, de 3 chiffres, de 2 chiffres par 3 chiffres.

D'autre part, sur le plan comportemental, la capacité à procéder à un calcul mental engendre plusieurs qualités humaines dont, entre autres, la spontanéité de réaction, la rapidité de réaction positive pertinente, l'hygiène mental, la réflexion spontanée et efficace dans le choix de stratégie à prendre, parmi les possibilités qui s'offrent, au développement de la mémoire logique, à l'éducation des futurs citoyens actifs. Par ailleurs, par rapport à la théorie récente du développement de l'intelligence humaine, l'intelligence est la capacité de multiple dimensions dont la capacité à résoudre rapidement un problème et la capacité à se débrouiller. Aussi, l'apprentissage du calcul mental aux jeunes esprits contribue certainement au développement de leurs intelligences. Par ailleurs, Le calcul mental cultive l'esprit créatif, la débrouillardise et l'autonomie.

En fouille des données, les travaux récents de Totohasina A. (cf. sa thèse d'habitation à diriger des recherches (Totohasina, 2008)) ont déjà proposé la théorie unificatrice des mesures de qualité normalisées, c'est-à-dire des mesures d'implication statistique prenant ses valeurs dans l'intervalle [-1, +1] et qui s'annulent en cas d'indépendance, valent +1 en cas d'implication logique et -1 en cas de situation d'incompatibilité, sont positives en cas d'attraction et négatives en cas de répulsion : de tels indices s'avéreraient plus pertinents et donc meilleures pour extraire des associations orientées non symétriques répondant à des besoins de recherche de causes ou d'effets. Cette théorie règle déjà partiellement le problème majeur de la fouille des règles d'association dans un contexte binaire, à savoir la non-pertinence et la non-utilité de beaucoup de règles extraites.
Par ailleurs, il y a la Théorie de Réponse à Items (TRI en français / IRT en anglais) qui est déjà assez utilisée par les chercheurs anglo-saxon, notamment pour analyser des données d'enquêtes comme les techniques relatives à l'ASI (Analyse Statistique Implicative). Cependant, il n'existe pas des travaux qui étudient les liens éventuels entre TRI et l'indice M$_{GK}$ qui s'utilise en ASI.

Suite à ce qui est développé ci-dessus, notre objectif est de mener de travaux de recherche en didactique de calcul mental parallèlement en l'identification de lien entre TRI et ASI-M$_{GK}$, puis la proposition des erreurs-types sur les indices M$_{GK}$, avec validation effective sur les données collectées à l'issue des expérimentations sur l'enseignement-apprentissage de calcul mental au niveau primaire, au niveau collège et lycée. Au bout de nos travaux, nous produirons, entre autres, des prescriptions et guides pédagogiques sur le calcul mental ; ce qui sera certainement utile au formateur d'enseignant aussi bien du primaire que du collège. Aussi, la thèse qui découle de nos travaux s'avèrera en une contribution à l'amélioration de la qualité d'enseignement de mathématiques, en essayant d'atteindre la célèbre et importante recommandation de l'UNESCO de « L'enseignement des mathématiques pour tous ».

1.2 Contributions

Dans ce travail, nous avons tenté de répondre aux problématiques exposées ci-dessus. Nos travaux ont donné lieu à plusieurs contributions : sur la didactique de mathématiques et sur la science des données.
En didactique de mathématiques, il s'agit de :

a) Clarifier la théorie de calcul mental avec plusieurs approches.
b) Procéder à l'analyse des programmes scolaires sur le calcul mental et à l'étude comparative des approches possibles afin d'en identifier la plus efficace et adaptée au contexte du système éducatif de Madagascar.
c) Elaborer des fiches de calcul mental au niveau secondaire.
d) Effectuer des expérimentations pédagogiques et des enquêtes auprès des enseignants, des élèves et des parents, avec une population témoin, avec enseignement selon le Procédé La Martinière, l'approche par les compétences, c'est-à-dire selon la pédagogie par les objectifs combinés au constructivisme (i.e. APC=PPO + constructivisme). Il est à noter que l'enseignement du calcul mental d'un produit de deux entiers naturels procèdera sous forme de schéma organisé afin d'enrichir la référence en images mentales de l'élève et profiter de la mémoire haptique qui est censée être longue.
e) Procéder à de l'analyse statistique des données sous M_{GK} et TRI, afin d'identifier les conclusions scientifiques qui s'imposent.

En science des données, cela consiste à :

a) Analyser le lien entre TRI et ASI- M_{GK} ;
b) Trouver les erreurs-types des indices M_{GK} afin de mieux interpréter les résultats obtenus ;
c) Valider le résultat d'étude comparative sur les données didactiques.

1.3 Structure du mémoire

Ce mémoire est organisé en trois parties reflétant l'ensemble des travaux accomplis de cette thèse. La première partie, cadre théorique du calcul mental, portant sur un état de l'art est divisée en deux chapitres : Le chapitre 2 proposant les développements du calcul mental dans l'éducation des mathématiques et le chapitre 3 proposant les stratégies du calcul mental. Dans la deuxième partie, le chapitre 4 détaille le premier apport de nos travaux de thèse. Il s'intéresse à l'analyse d'enseignement-apprentissage du calcul mental à Madagascar. Le chapitre 5 nous présente des implications pédagogiques du calcul mental.
Nous consacrons le chapitre 6 de la dernière partie à l'élaboration des erreurs-types des indices M_{GK}, lien entre TRI et ASI- M_{GK} et aux résultats de l'expérimentation. Enfin, nous terminons ce mémoire par les conclusions et perspectives.

Première partie

Cadre théorique du calcul mental

CHAPITRE 2

Calcul mental et ses développements dans l'éducation des mathématiques

2.1 Introduction et quelques définitions

Le calcul mental est un processus ou une activité qui permet d'effectuer mentalement une série d'opérations. En vérité, tout calcul est « mental » : calcul purement mental, calcul mental avec traces écrites persistantes ou temporaires et calcul écrit avec étapes mentales. Il y a aussi des calculs instrumentés avec des abaques, des bouliers ou d'autres instruments ; par ailleurs, même dans un calcul avec calculatrice, il y a une composante mentale pour contrôler les ordres de grandeur et détecter les erreurs de frappe. Le calcul mental est tout à fait différent du calcul écrit. Le premier opère simplement sur les nombres ; le calculateur fait simplement l'effort de mémoire de poser l'opération dans sa tête, tandis que le calcul écrit opère sur les chiffres, sans tenir compte des nombres, excepté pour le résultat final. Si en addition posée, on procède de droite à gauche, en addition mentale on procède inversement.

Les termes, d'une époque à une autre, ont quelque peu varié. En première approximation, on peut être tenté d'opposer le calcul mental au calcul écrit ou instrumenté. Mais pratiquer un calcul mental ne signifie pas que tout se passe sans écrire. L'expression « calcul mental » n'implique pas qu'aucun support écrit ne puisse intervenir dans la consigne, dans la formulation du résultat, voire des résultats intermédiaires (Butlen et Pezard, 2000) : l'essentiel du travail reste mental. Ce qu'on désigne sous le terme de calcul écrit (l'opération posée) requiert la connaissance des tables et la gestion des retenues, donc du calcul mental déjà mais encore trop léger. Il ne dispense donc pas de calculer mentalement, bien au contraire ; la technique écrite française traditionnelle de la division, avec ou sans les soustractions intermédiaires, requiert de nombreux traitements mentaux. Le calcul mental est une activité qui n'utilise pas nécessairement uniquement l'oral : il est parfois utile d'autoriser l'écriture de résultats intermédiaires (par exemple lors d'un calcul un peu complexe) ou d'écrire l'énoncé d'un calcul. Le calcul mental est notamment effectué « dans la tête » plutôt que sur le papier, pourtant cela n'empêche pas le besoin d'enregistrer la symbolisation pour faciliter le raisonnement mathématique (Harries et Spooner, 2000).

De plus, faisant nécessairement appel aux connaissances des nombres et des opérations mathématiques, le calcul mental fait non seulement appel à la mémoire, mais il la développe. Ensuite, exigeant une attention constante et ne pouvant pas se faire d'une manière mécanique, comme c'est souvent le cas dans le calcul écrit, le calcul mental s'avère aussi un moyen important pour développer le sens du nombre et pour acquérir une meilleure compréhension de la valeur de position et des opérations mathématiques. L'élève qui est habile en calcul mental sera plus habile à saisir les liens entre les données numériques et à les transformer.

Il y a deux caractéristiques différentes de calcul mental. Cela produit une réponse exacte, et la procédure effectuée mentalement, sans utiliser des dispositifs externes tels que le crayon et le papier. Le calcul mental est un composant important d'estimation en ce qu'il fournit la pierre angulaire nécessaire pour la diversité les processus numériques utilisés dans le calcul d'estimation. Certains des problèmes de la vie courante nécessitent le calcul mental, et d'autres nécessitent une estimation de calcul. Parfois, un problème est résolu avec le calcul mental seul ou avec une combinaison de calcul mental et estimation. Par exemple, pour trouver le reste de la différence 5 à $1,83$, l'estimation de calcul peut entraîner une réponse d'environ $3,20$. Une personne qui utilise exclusivement un calcul mental rapide rapporterait $3,17$. Bien que le calcul mental soit une partie intégrante des deux processus de solution, l'exemple précédent peut être résolu en utilisant soit l'estimation de calcul, soit le calcul mental. Il est possible d'être simultanément compétent au calcul mental et très pauvre à l'estimation. Cependant, l'inverse n'est pas vrai ; c'est-à-dire, les gens qui sont bons en estimation de calcul sont également bons au calcul mental (R. E. Reys, Bestgen, Rebolt et Wyatt, 1982). Or l'estimation est une partie importante du programme d'études de mathématiques. Elle permet, par exemple, de vérifier la cohérence des résultats lorsqu'on résout des problèmes avec une calculatrice. En effet, souvent, nous devons faire des calculs rapidement et mentalement à des moments où nous n'avons ni papier, ni crayon, ni calculatrice sous la main. Ainsi, le calcul mental ayant alors une grande utilité pratique contribue à la préparation des apprenants à la vie active. La littérature en didactique des mathématiques montre aussi que « *Les élèves en*

difficulté en mathématiques le sont en général en calcul mental ».
Tout ceci explique les enjeux de la formation au calcul mental. Pour progresser, il faut s'entrainer, mettre en place diverses stratégies pour que les choses deviennent naturelles. Le calcul mental doit occuper la place principale à l'école primaire et faire l'objet d'une pratique régulière, dès la classe de 9ème. Une bonne maîtrise de celui-ci est indispensable pour les besoins de la vie quotidienne (que ce soit pour obtenir un résultat exact ou pour évaluer un ordre de grandeur). Elle est nécessaire également à une bonne compréhension de certaines notions mathématiques (traitements relatifs à la proportionnalité, compréhension du calcul sur les nombres relatifs ou sur les fractions au collège).

Enfin, le calcul mental permet de structurer le cerveau, de façonner sa manière de réfléchir, de booster la mémoire, l'esprit d'analyse et de synthèse. Il contribue ainsi à former le talent mathématique, c'est-à-dire la pensée logique, la capacité de généralisation rapide, de réversibilité du raisonnement mathématique, la flexibilité de la pensée comme en témoigne l'existence des calculateurs prodiges dont fait partie le célèbre garçon allemand Rüdiger (Camos, 2004). Devant une multiplication ou une division qui peut paraître complexe, il va par exemple s'agir de se demander dans quelle mesure il est possible de simplifier le calcul et/ou de le décomposer pour se faciliter la tâche. Il est reconnu aussi que les lacunes en calcul de tête impactent négativement l'avenir des apprenants. Au-delà d'apprendre les tables de soustraction, d'addition et de multiplication, le calcul de tête a plus d'un intérêt, à savoir : mettre en place des automatismes, affiner son raisonnement, s'habituer à manipuler les nombres, mieux connaître les propriétés des nombres. Des études ont montré que plus l'on entraînera son cerveau à se souvenir, plus des automatismes apparaîtront et sa capacité en calcul mental sera décuplée. Certains scientifiques ont pu déterminer que le calcul mental active des zones du cerveau liées à l'attention spatiale (Krutetski, 2004). La représentation des nombres serait ainsi comparable à la représentation spatiale. Bon pour le cerveau, il permettrait de lutter contre le vieillissement et de retarder des maladies comme la maladie d'Alzheimer. Il permet aussi de faire fonctionner ses neurones à toute vitesse en s'amusant et de faire des mathématiques sans s'en rendre vraiment compte. Par conséquent, le calcul mental a tout bon.

On distingue deux aspects du calcul mental : le calcul automatisé et le calcul réfléchi qui seront décrits ultérieurement. En plus de sa fonction pédagogique classique consistant à développer la capacité à conduire un raisonnement rapide sur le choix de stratégie gagnante de ses dimensions de calcul automatisé ou réfléchi (Mansour, 2013), le calcul mental possède, entre autres, une fonction sociale indispensable dans la vie quotidienne pour obtenir discrètement et rapidement un résultat exact et un ordre de grandeur pour se contrôler.

2.2 Deux aspects de calcul mental

Le calcul mental, exact ou approché, comporte en effet deux aspects : *calcul mental automatisé* et *calcul mental réfléchi*.

2.2.1 Calcul mental automatisé

Le calcul mental automatisé peut rapidement définir comme le calcul où les résultats sont immédiatement produits, de façon spontanée, sans conscience du chemin suivi. Il correspond à l'idée restrictive qu'on se fait trop souvent du calcul mental, limité à la connaissance par cœur de résultats et de règles. Le calcul automatisé vise la mobilisation automatique de résultats et de procédures (appelées faits numériques) supposées difficiles à mémoriser comme les tables d'addition, de multiplication, quelques doubles, carrés, multiplier un nombre entier par 10 ou 100. Dans ce cas, l'exigence de rapidité sera un critère de réussite.
Par exemple : lorsqu'on produit un résultat pris dans les tables de multiplication, qu'on applique une technique comme la multiplication par 10 ; 100 ; 1000 ou qu'on calcule la moitié de 50.
Le calcul automatisé demande peu d'effort, car il s'appuie sur des résultats complètement mémorisés et disponibles instantanément. Avant d'être automatisés, les résultats sont construits par le raisonnement, donc « réfléchis ». L'entraînement quotidien et progressif conduira l'élève à mémoriser peu à peu ces faits numériques sans le recours au calcul réfléchi (Butlen et Pezard, 1991).

2.2.2 Calcul mental réfléchi

Le calcul mental réfléchi est le calcul sur lequel les résultats sont obtenus par une reconstruction personnelle. De façon à se faciliter le calcul, on s'appuie sur des propriétés connues et bien maîtrisées. Les étapes sont plus nombreuses, si besoin on écrit des résultats intermédiaires. Pour un même calcul, les procédures varient selon les individus, le moment et le contexte où ce calcul est proposé. Le calcul réfléchi est d'une autre nature que le calcul automatisé. Il ne s'agit plus de récupérer directement en mémoire un résultat ou une procédure directement applicable, mais d'élaborer une procédure adaptée au calcul particulier qui est proposé. La stratégie et le raisonnement sont alors sollicités. Le calcul réfléchi (ou raisonné) consiste pour l'élève à mettre en œuvre des procédures qui relèvent d'un traitement raisonné lié aux nombres en jeu. En effet, le calcul réfléchi fait appel à l'élaboration et l'utilisation de procédures intermédiaires pour obtenir le résultat et peut faire intervenir l'écrit car les élèves peuvent avoir besoin de garder une trace écrite des étapes du calcul. L'élève doit donc adapter son raisonnement au contexte et développer la caractérisation des nombres. La rapidité, sans être complètement écartée, peut être retenue comme un critère de réussite.

D'autres représentations des nombres sont mobilisées, notamment celles qui sont liées à leur expression dans les deux systèmes de numération utilisés, numération chiffrée et numération orale. Ces deux numérations ne sont pas exactement superposables. La traduction chiffrée de « quatre-vingt-douze » ne fait intervenir ni 4, ni 20, ni 12. C'est une première raison pour laquelle il n'est pas équivalent de proposer un calcul à faire mentalement sous la forme écrite « $92 + 15 = ?$ » et sous la forme orale « quatre-vingt-douze plus quinze ». Une autre raison relève de la mémorisation : dans le premier cas, la consigne reste visible alors que dans le second, elle doit être enregistrée, ce qui occupera une partie de la mémoire de travail. Le calcul réfléchi peut, du fait de l'enchaînement des procédures, rapidement conduire à une saturation de la mémoire de travail (il ne peut contenir qu'un nombre limité d'informations). Pour soulager cette mémoire, il est utile d'automatiser aussi certaines techniques. En permettant à des élèves de réussir un calcul par des procédures personnelles avant de s'approprier une procédure automatisée, le calcul réfléchi est un moyen de gérer l'hétérogénéité. Examinons quelques procédures qui peuvent être mises en place pour traiter les deux calculs apparemment proches suivants : 25×12 et 25×19.
Pour calculer 25×12, nous utilisons les procédures suivantes :

– *Procédure P_1 : calcul séparé de 25×10 et de 25×2, puis somme des résultats partiels ;*
  i.e : $25 \times 12 = 25 \times (10 + 2) = (25 \times 10) + (25 \times 2) = 250 + 50 = 300$
– *Procédure P_2 : décomposition de 12 en 4×3, et calcul de 25×4, puis de 100×3 ;*
  i.e : $25 \times 12 = 25 \times (4 \times 3) = (25 \times 4) \times 3 = 100 \times 3 = 300$.
– *Procédure P_3 : utilisation du fait que 25 est le quart de 100, en divisant d'abord 12 par 4, puis en multipliant le résultat par 100 (ou multiplication de 12 par 100, puis division du résultat par 4) ;*
  i.e : $25 \times 12 = \frac{100}{4} \times (4 \times 3) = 100 \times \frac{4}{4} \times 3 = 100 \times 1 \times 3 = 300$.

Pour calculer 25×19, nous pouvons procéder des manières suivantes :

– *Procédure P_4* : calcul de 25×20 (directement ou par $25 \times 2 \times 10$), puis soustraction de

25 au résultat obtenu ;

i.e : $25 \times 19 = 25 \times (20 - 1) = (25 \times 20) - 25 = 500 - 25 = 475.$

– *Procédure P_5* : calcul de 19×20 (par $19 \times 2 \times 10$), puis de 5×19 (nouveau calcul réfléchi qui peut être traité par la somme de 5×10et de 5×9, par exemple), puis somme des deux résultats partiels ;

i.e : $25 \times 19 = (20 + 5) \times 19 = (20 \times 19) + (5 \times 19) = (10 \times 2 \times 19) + (5 \times 10) + (5 \times 9)$
$= 380 + 50 + 45 = 430 + 45 = 475.$

Bien que 25 soit un des facteurs des deux produits, sa présence n'induit pas les mêmes stratégies de calcul et les procédures choisies dépendent des connaissances préalables des élèves à partir desquelles ils analysent les nombres en présence. Ainsi, pour utiliser la *procédure P_3*, il faut savoir que 25 est le quart de 100, mais aussi que 12 est un multiple de 4. Pour reconnaître que cette procédure est difficilement applicable pour 25×19, il faut savoir que 19 n'est pas un multiple de 4.

Par ailleurs, comme cela a déjà été souligné, le calcul réfléchi suppose la mise en œuvre, souvent implicite, de diverses propriétés des opérations en jeu. En calcul réfléchi, aucune procédure ne s'impose a priori et, le plus souvent, plusieurs sont possibles. Le travail en classe doit donc être axé sur l'explicitation et la confrontation des procédures possibles et efficaces. Aussi, un calcul réfléchi effectué mentalement mobilise une partie de la mémoire de travail, éventuellement pour le maintien de l'énoncé (s'il est donné sous forme orale) et dans tous les cas pour la représentation des règles de calcul et la mémorisation de résultats intermédiaires. Une cause possible d'erreur de calcul provient de la « saturation » de la mémoire de travail. Ce risque de saturation peut être diminué en autorisant les élèves à noter des résultats intermédiaires ou, dans certains cas, en notant au tableau le calcul à effectuer. Mais il ne faut pas oublier que le calcul mental privilégie le traitement des nombres conçus du point de vue de la numération orale : l'énoncé oral des calculs à effectuer est donc à privilégier. Le cas du calcul approché est encore plus délicat.

Selon le moment de l'apprentissage ou selon l'individu, le résultat d'un même calcul peut relever d'un calcul réfléchi ou automatisé. Ces deux formes de calculs évoluent, cohabitent. Le calcul réfléchi se nourrit du calcul automatisé et sa pratique fait qu'on mémorise, par souci d'économie, toujours plus de résultats, devenant ainsi de plus en plus performant en calcul mental.

Considérons l'exemple de la recherche d'une approximation pour 439×17. On peut hésiter entre le calcul de 400×20, 450×20 ou 500×15. Chacun d'entre eux fournit une approximation acceptable si on se contente d'avoir un résultat à environ 500 près. Pourtant ces calculs sont a priori très différents. C'est pourquoi les premiers exercices de calcul approché peuvent être centrés sur la détermination du choix d'un ou plusieurs résultats plausibles parmi un ensemble de résultats fournis ou sur le repérage d'un nombre rond proche du résultat, sur la droite numérique, ce qui revient à déterminer un ordre de grandeur du résultat. Entraîner les élèves à évaluer les effets prévisibles des choix effectués constitue une autre dimension du calcul approché qui, moins encore que le calcul réfléchi « exact », ne peut être mécanisé. Sa pratique dans les classes est pourtant importante pour entraîner les élèves à contrôler les résultats qu'ils obtiennent par un calcul instrumenté ou par un calcul posé.

Et surtout, une pratique régulière du calcul mental réfléchi permet de familiariser les élèves avec les nombres et d'approcher (en situation) certaines propriétés des opérations (voir les différentes méthodes utilisables pour calculer $37 + 18$ ou 25×16). Dans ce domaine particulièrement, il convient de distinguer ce qu'il faut mémoriser ou automatiser (les tables, quelques doubles et moitiés, le calcul sur les dizaines et les centaines entières, les compléments à la dizaine supérieure) et ce qu'il faut être capable de reconstruire (et qui relève du calcul réfléchi : idée de rendre plus simple un calcul, souvent en procédant par étapes plus nombreuses, mais en s'appuyant sur ce qui est connu).

2.3 Les différentes fonctions du calcul mental

Au-delà de vertus traditionnellement évoquées (« gymnastique intellectuelle », « adresse de l'esprit » et même « formation du caractère » ou plus précisément « développement de l'attention et de la mémoire »), la pratique du calcul mental a une double fonction, sociale et pédagogique.

2.3.1 Fonction sociale

Il est d'abord un calcul d'usage. Il s'agit de mettre en place des moyens efficaces de calculer, utiles dans la vie courante en l'absence de supports ou d'instruments. Même si l'usage de la calculette est de plus en plus répandu, il demeure nécessaire de savoir calculer sans elle ou, à tout le moins, de pouvoir effectuer un calcul approché. C'est là d'ailleurs un moyen efficace de contrôle, une erreur de manipulation étant toujours possible. Enfin, comme cela a déjà été souligné, sans disponibilité rapide des résultats des tables, il n'y a pas d'accès possible aux techniques opératoires : n'oublions pas que, dans le cas de la multiplication, à l'entrée en sixième les erreurs de table sont plus fréquentes que celles dues à une mauvaise maîtrise de l'algorithme de calcul. Dans cette perspective, trois types d'objectifs peuvent être distingués :

- l'automatisation des calculs simples, orientée vers la production de résultats immédiatement disponibles : récupération en mémoire ou reconstruction instantanée, procédures automatisées ;
- la diversification des stratégies de calcul complexe : calcul réfléchi ou raisonné ;
- une première maîtrise du calcul approché, souvent utilisé dans la vie courante et dont l'apprentissage doit se poursuivre au collège.

2.3.2 Fonction pédagogique

Dans les apprentissages mathématiques, il joue un rôle important pour la compréhension et la maîtrise des notions enseignées. Cinq pistes peuvent être distinguées (Lingani, 2015) :

- le calcul mental permet aux élèves de construire et de renforcer leurs premières connaissances relatives à la structuration arithmétique des nombres entiers naturels (relations additives ou multiplicatives entre les nombres) ;
- la pratique du calcul réfléchi s'appuie, le plus souvent implicitement, sur les propriétés des opérations et, en retour, en assure une première compréhension ;
- les premiers maniements des notions mathématiques (qui en permettent la compréhension initiale) sont le plus souvent fondés sur le recours au calcul mental. Que l'on pense aux situations de proportionnalité ou aux travaux sur les fractions à l'école primaire ou, plus tard, aux calculs sur les nombres relatifs ou au calcul algébrique ; pour l'essentiel, les compétences des élèves se construisent dans un domaine numérique ;
- le calcul réfléchi nécessite l'élaboration de procédures originales et, par là, contribue au développement des capacités de raisonnement des élèves (d'où l'expression de « calcul raisonné ») ;
- le calcul mental apporte souvent une aide à la résolution de problèmes, en permettant de ramener un problème à un champ numérique dans lequel les opérations deviennent plus familières : essayer avec des nombres plus petits permet, par exemple, d'avoir une intuition d'un mode de traitement possible.

Tout comme dans les Mathématiques de l'école primaire, Bovier-Lapierre (1887) semble lui aussi bien résumer l'importance du calcul mental quand il affirmait depuis fort longtemps que :

> « Non-seulement le calcul mental offre une préparation indispensable à l'arithmétique écrite, mais il donne lieu à une gymnastique intellectuelle de la plus haute importance ; il fait contracter des habitudes d'analyse et de réflexion qui accroissent bien vite la perspicacité de l'esprit. Aussi ne faut-il pas considérer le calcul mental comme devant cesser après les premiers mois d'étude, pour être totalement remplacé par le calcul écrit. Il ne doit jamais disparaître ; on y trouve à tous les degrés un stimulant que rien ne supplée, un moyen précieux de vivifier, de varier, d'égayer même l'enseignement ; il pique la curiosité, aiguise l'émulation, secoue les intelligences ; il aiguillonne les uns, il retient les autres ; par les fautes mêmes qu'il amène, il prémunit les esprits trop prompts contre leur propre légèreté, les esprits lourds contre leur lenteur, les imaginations vives contre leur mobilité. Au point de vue pédagogique ou psychologique, le calcul mental ne complète pas seulement, il consomme l'œuvre de l'enseignement arithmétique : c'est par lui que l'esprit s'assimile en quelque sorte la substance de cet enseignement, et en recueille tout le fruit. »

Les avantages ci-dessus du calcul mental devraient lui attribuer une place cardinale pendant les séquences de classe. Mais, sa force est de constater que sa pratique, si elle n'est pas escamotée, est tout simplement ignorée par l'enseignant qui y voit une perte de temps.

2.3.2.1 Avantages de l'enseignement du calcul mental

Le calcul mental est une activité mathématique à part entière, avec ses temps de découverte, d'entraînement et d'évaluation. Pratiqué régulièrement, il permet :

- d'activer, d'entretenir ou de finaliser l'acquisition des savoirs ;
- d'ancrer les apprentissages ;
- de développer la mémoire et l'automatisation des procédures ;
- d'élaborer et d'échanger des procédures personnelles ;
- d'aborder des notions nouvelles dans des situations de recherche.

Cinq raisons largement acceptées pour l'enseignement de calcul mental sont :

1. c'est une condition préalable au développement réussi de tous les algorithmes arithmétiques écrits ;
2. il favorise une meilleure compréhension de la structure des nombres et leurs propriétés ;
3. il favorise une pensée créative et indépendante et encourage les étudiants à créer, de manières ingénieuses, la manipulation des nombres ;

4. il contribue au développement des meilleures compétences pour la résolution des problèmes ;
5. c'est une base pour développer les compétences d'estimation de calcul (R. E. Reys, 1984).

Un apprentissage significatif aide à faire l'arithmétique moins d'un défi au mémoire d'un élève et plus d'un défi à son intelligence. L'instruction en calcul mental permet aux enseignants de fournir ce défi intellectuel à des étudiants. Par exemple, $1 + 2 = 3$ est un fait fondamental. Cette connaissance devrait conduire naturellement à résoudre les problèmes tels que $100+200$ et $10000+20000$. Ce transfert direct de faits fondamentaux est une première étape importante dans le calcul mental et devrait être encouragé d'avance. Pourtant, plus que l'encouragement est souvent nécessaire, car la réaction immédiate de très nombreux étudiants à ces problèmes (c'est-à-dire, $100 + 200$ ou $10000 + 20000$) est de les écrire et appliquer un algorithme écrit confiant. L'écriture n'est pas une réaction naturelle des problèmes de calcul simples, mais celui qui a été cultivé à l'école. Les étudiants sont souvent réprimandés pour ne pas montrer tout leur travail, alors ils peuvent enregistrer un algorithme écrit bien que ce soit inutile. Un tel conditionnement décourage le calcul mental. D'ailleurs, les étudiants qui postulent les algorithmes écrits sont généralement liés à la réponse et généralement inconscients de tous les modèles mathématiques qui existent.

L'utilisation d'un algorithme écrit au lieu de faire un calcul mental simple à résoudre de tels problèmes est désavantageux pour au moins quatre raisons (R. E. Reys, 1984). D'abord, il décourage la pensée, puisque les algorithmes sont souvent appliqués mécaniquement. Deuxièmement, c'est une utilisation inefficace du temps pour écrire un problème qui peut être fait plus rapidement et souvent plus de précision mentale. Troisièmement, il inhibe la reconnaissance et utilise des relations structurelles. Par exemple, « $5 \times 99 = ?$ » pourrait être résolu mentalement de plusieurs façons différentes. On pourrait penser : « 5 fois 90 est 450, et plus 45 (c'est-à-dire, 5×9) est égal à 495. » Une autre personne pourrait penser : « 5 fois 100 est 500, et moins 5 pour obtenir 495. » Bien que chaque approche utilise la propriété de distribution, ils utilisent des relations structurelles un peu différent pour produire leur réponse. C'est l'une des raisons de calcul mental qui stimule une variété de chemins de solution. Et enfin, l'utilisation d'un algorithme écrit ignore la réalité, puisque les mathématiques du monde réel ne sont pas toujours des tolérantes d'une dépendance aux méthodes de papier-et-crayon.

L'utilisation du calcul mental garantit que les étudiants confronteront non seulement de nombreux modèles structurels mais, plus important, les utilisent pour résoudre des problèmes. Par exemple, en considérant comme le fait de base $3 + 4 = 7$, on pourrait étendre pour résoudre 3 milliards $+$ 4 milliards. Ce problème est beaucoup plus facile à résoudre mentalement que par écrit : $3000000000 + 4000000000$. En outre, ce problème surchargerait la plupart des calculatrices non scientifiques.

Un autre avantage de l'instruction du calcul mental concerne la résolution de problèmes. Nombreuses études (par exemple (Driscoll, 1981)) indiquent que passer 10 minutes par jour pendant plusieurs mois sur les activités de calcul mental améliore les performances de résolution de problèmes ainsi que des compétences de calcul mental pour les deux apprenants rapides et lents. Basé sur une révision de recherche sur le calcul mental, Zepp (1976) déclare que les données sont cohérentes et assez concluante que l'instruction de calcul mentale produit de bons résultats en une croissance arithmétique générale. En effet, la liberté des étudiants à décider sur différentes façons de faire du calcul mental encourage la pensée flexible, ce qui est un aspect crucial de la résolution de problèmes.

Dans les apprentissages, le calcul mental joue un rôle important dans la compréhension et la maîtrise des contenus des séquences. En classe, il est organisé autour de certains axes. Par rapport aux résultats mémorisés, les enfants accédant nouvellement à l'école n'ont pas les mêmes aptitudes, tout comme d'ailleurs les plus anciens : d'autres appréhendent, alors que certains ont des difficultés à se rappeler sans se tromper. Vis-à-vis des anciens, il revient à l'enseignant de mettre l'accent sur l'entraînement, voire de le reconstruire dans le but de renforcer la mémorisation pour la rendre aisément mobilisable lors des exercices. Par rapport aux nouveaux élèves, malgré le programme, il est nécessaire de leur permettre de transférer leurs connaissances acquises en famille en mettant le point sur l'oral compte tenu des limites qu'ils ont à l'écrit. En vue d'accroître les compétences des élèves, l'enseignant doit mettre accorder plus de regard à la mémorisation qui, dans la plupart des cas, revient à l'élève, alors que la vérification des connaissances s'est déroulée en classe par le canal des exercices. La pratique du calcul mental prend appui sur les procédures personnelles de l'élève qui fait appel à ses connaissances. L'exercice de calcul est marqué par une phase orale au cours de laquelle l'élève verbalise ses procédures et ses savoirs. Ceci engendre souvent de la part de la classe des débats en cas d'incompréhension ; ce qui rend la classe vivante et motivée. Ces opportunités de débats permettent aux élèves de se rendre compte de leurs erreurs ou de vérifier la qualité de leur raisonnement, de comprendre et de mémoriser.

Dans l'enseignement, le calcul mental contribue à entretenir la mémoire et les connaissances des élèves. Les instructions officielles recommandent de ne pas le mettre en relation avec la séquence du jour. La tenue de la phase du calcul mental donne lieu à un nouveau contrat entre l'élève et l'enseignant. C'est ainsi qu'il est attendu de ce dernier qu'il fasse lever le doigt, permette à l'élève en difficulté ou réservé de participer et de veiller à la qualité du débat. Du côté de l'élève, la nécessité d'être attentif, d'écouter, d'assumer seul la responsabilité des solutions et des preuves doit être de mise.

2.3.3 Des programmes qui mettent l'accent sur le calcul

Le calcul mental devrait être une partie visible d'un programme de mathématiques élémentaires. En tant que tel, le calcul mental devrait être récompensé tôt, et son utilisation continue devrait être encouragé tout au long de programme de mathématiques. Selon R. E. Reys (1984), un programme scolaire qui met l'accent sur le calcul mental devrait posséder les caractéristiques suivantes :

1. L'instruction doit inclure des nombres différents (nombres entiers, fractions, et décimales) et diverses opérations avec eux.
2. L'instruction doit être construite sur un cadre qui prévoit systématique le développement du calcul mental à travers les notes.
3. Des procédures de calcul mental spécifiques doivent être soigneusement et significativement enseignées, de sorte qu'ils sont compris par tous les apprenants. Il présente quelques excellentes idées pour l'utilisation immédiate en classe.
4. Les procédures devraient être présentées et développées d'une manière d'envisager les différences individuelles. Les choix abondent au fur et à mesure que les apprenants apprennent, découvrent, et créent des raccourcis de calcul.
5. L'instruction devrait encourager les étudiants à penser à haute voix et à participer activement dans le partage des procédures.
6. La technologie, comme les calculatrices à main et les ordinateurs, devrait être utilisée pour développer et pratiquer des compétences de calcul mental.
7. La possibilité de faire oralement le calcul mental doit être fournie.

Le calcul mental est une compétence important à part entière, mais l'estimation de calcul augmente considérablement son potentiel. Très souvent, la complexité des nombres dans un problème empêche le calcul mental d'une réponse exacte, mais le problème peut être résolu avec l'estimation de calcul. Ainsi, l'un des objectifs importants d'un programme mettant l'accent sur le calcul mental est d'aider les élèves à reconnaître quand le calcul mental peut et doit être utilisé ainsi que lorsque l'estimation de calcul est plus appropriée.

2.4 Entrainement au calcul mental

Butlen et Charles-Pézard (2003) montrent qu'une pratique régulière de calcul mental, en améliorant les habiletés calculatoires des élèves, se traduit pour un certain type de problèmes standards par une accélération du processus de reconnaissance de l'opération en jeu. Il s'agit de problèmes relevant de modèles relativement familiers aux élèves, mais dont la reconnaissance n'est pas encore automatisée. D'après leurs recherches, un entraînement au calcul mental, en allégeant les tâches de calcul, favorise donc une « prise de sens » lors de la résolution de problèmes et contribue à accélérer l'automatisation de la reconnaissance du modèle (opération(s) en jeu). Les automatismes de calcul installés au cours d'une pratique régulière de calcul mental permettent aux élèves de construire des schémas de problèmes. Tout se passe comme si l'élève avait construit une mémoire des problèmes déjà rencontrés ainsi que des procédures de résolution associées. Cette mémoire s'organise grâce à une certaine catégorisation et à un recours à des problèmes prototypiques représentatifs de chaque catégorie. L'élève s'avère alors capable de mobiliser à bon escient le modèle le plus adapté pour résoudre le problème.

2.5 Difficulté des élèves

Les élèves en difficulté en mathématiques et notamment en difficulté en calcul mental ne réussissent pas aussi bien que leurs pairs à entrer dans cette dynamique (Butlen et Charles-Pézard, 2007). En effet, ce sont souvent des élèves qui, au quotidien, ne parviennent pas suffisamment à appréhender les enjeux des situations d'enseignement qui leurs sont proposées. De plus, ils éprouvent des difficultés à mettre en relation les nouvelles connaissances avec les connaissances plus anciennes. De ce fait, ils ne comprennent pas toujours le contenu des institutionnalisations.

Ainsi, toutes les procédures peuvent leur apparaître comme égales. La pertinence de leur mobilisation peut ne pas être mise en relation avec les propriétés des nombres intervenant dans les calculs. Ces élèves peuvent alors devenir prisonniers d'une dynamique renforçant leurs difficultés. Leurs connaissances insuffisantes sur les nombres, sur les opérations et leurs propriétés les conduisent à produire plus souvent que leurs pairs des procédures de calculs inadaptées. Ne comprenant pas les enjeux des moments d'échanges d'expériences de calculs, ne prenant pas suffisamment la mesure des hiérarchies effectuées, ils ne peuvent pas bénéficier des procédures automatisées installées à ces occasions. Ne fréquentant pas assez de nouvelles décompositions des nombres, leurs connaissances ne s'accroissent pas suffisamment pour leur permettre d'échapper à l'automatisme. Cela contribue à renforcer les différences de performances et de connaissances entre les élèves. Ce constat nous a conduit à préciser d'autres conditions permettant à ces élèves d'échapper à l'automatisme.

2.6 Numératie

2.6.1 Définition

La numératie est l'habileté, la confiance et la volonté d'interagir avec l'information quantitative ou spatiale pour prendre des décisions éclairées dans tous les aspects de la vie quotidienne (Gouvernment, 2015). L'information quantitative décrit ce qui peut être mesurée et exprimée en quantités. Elle comprend, entre autres, les nombres, les régularités, les statistiques et la probabilité. Tandis que l'information spatiale décrit l'emplacement des objets ou des personnes ou leur relation par rapport à d'autres. Elle comprend, entre autres, les mesures, le lieu, la direction, la forme et l'espace. La numératie est l'utilisation réfléchie des mathématiques mises en contexte. Une personne ayant des capacités en numératie a la confiance et la conscience nécessaires pour savoir quand et comment mettre en application des connaissances quantitatives et spatiales, que ce soit à la maison, à l'école, au travail ou dans la communauté.

2.6.2 Importante de la numératie

Chaque jour, nous sommes exposés à de l'information quantitative ou spatiale que nous devons interpréter et utiliser pour donner un sens à notre monde. Nous nous appuyons sur nos habiletés en numératie pour comparer des couts, nous rendre à une destination, juger des distances, faire entrer des objets dans un espace restreint, interpréter un tableau ou adapter une recette. À l'école, avec la littératie, la numératie permet aux élèves de donner un sens à ce qu'ils apprennent dans les matières telles que les mathématiques, les arts langagiers, les sciences et les études sociales. Une personne capable de calculer a la capacité de formuler, d'utiliser et d'interpréter les mathématiques dans une variété de contextes du programme d'études et du quotidien. Cette capacité comprend le raisonnement mathématique, l'utilisation des mathématiques dans un but et une intention et l'utilisation de concepts, de procédures, de faits et d'outils mathématiques pour décrire, expliquer et prévoir des phénomènes. La numératie aide les gens à reconnaître le rôle joué par les mathématiques dans le monde, à poser des jugements fondés et à prendre des décisions nécessaires en tant que citoyens constructifs, engagés et réfléchis.

2.6.3 Relation entre la numératie et les mathématiques

Les mathématiques et la numératie sont toutes deux basées sur le même ensemble de connaissances, mais elles ne sont pas identiques. La numératie permet d'examiner une situation particulière et de puiser dans ses connaissances mathématiques pertinentes afin de prendre une décision éclairée et personnellement convenable. Par exemple, pour choisir le forfait de téléphone cellulaire le plus avantageux pour une famille, il faut effectuer des calculs (faire des mathématiques) et tenir compte de la quantité de données, de minutes et de textos dont chaque utilisateur aura besoin (faire preuve de compétences en numératie).

Le développement de la numératie (ou littératie mathématique) est généralement considéré comme un but clé de l'étude des mathématiques à l'école. Willis (1990) considère un tel développement pour être un service aux étudiants. Il devrait les équiper de compétences et de compréhensions nécessaires pour traiter avec succès d'autres aspects de leur vie à la maison, dans la main-d'œuvre et à travers le programme scolaire. Comme l'exigence technologique en matière de travail et les interactions sociales au sein d'une société augmentent, la manière dont la numératie est aussi conceptualisée doit également être modifiée (Council, 1989).

2.7 Sens du nombre

2.7.1 Importance du sens du nombre

Le sens du nombre est une façon de penser au sujet de nombres. Le sens du nombre est décrit comme un aspect de plein de bon sens et lié à plus haute niveau de pensée et de raisonnement. McIntosh (1990b) souligne que l'importance de pouvoir manier les nombres et de calculer n'est pas diminuée par la disponibilité des appareils calculateurs : Ce que nous avons tous besoin de devenir, ce sont des calculatrices avec une capacité d'adaptation, d'improviser des méthodes et de tester rapidement la fiabilité des résultats produits par les machines.

Et nous avons besoin, maintenant plus que jamais dans cet âge de la calculatrice, un bon développement et un sens flexible du nombre (McIntosh, 1990b).

Bien que le sens du nombre ne puisse pas être défini précisément (J. A. Hope, 1989), et soit dépendant sur le système du nombre qui est utilisé (par exemple, il est possible d'avoir le bon sens du nombre pour les nombres entiers, mais pas pour les fractions) (J. T. Sowder, 1992). Howden (1989) suggère qu'il peut être décrit « comme bonne intuition au sujet de nombres et leurs rapports ». C'est probablement être insaisissable et difficile de cerner (Greeno, 1991), mais il y a des caractéristiques identifiables dans le comportement de ceux qui ont une idée bien développée sur le nombre. Le Conseil National de Professeurs de Mathématiques (National Council of Teachers of Mathematics, 1989) croit que les enfants ayant un bon sens du nombre :

- ont bien compris les significations des nombres,
- ont développé de rapports multiples entre des nombres,
- reconnaissent les grandeurs relatives des nombres,
- reconnaissent les effets relatifs d'opérer sur les nombres,
- et ont développé les référents pour les mesures d'objets communs et des situations dans leur environnement.

J. T. Sowder (1992), Resnick (1989a) étendent cette liste pour inclure la capacité à exécuter des calculs mentaux avec stratégies du non standard qui profitent de la capacité composer et décomposer des nombres, utiliser des nombres flexibles pour estimer des réponses numériques aux calculs et réaliser quand l'estimation est appropriée, et juger du caractère raisonnable des solutions obtenues, en fonction de leur conviction que les mathématiques ont un sens et qu'ils sont capables de trouver un sens dans une situation numérique.

Alors que le développement de sens du nombre est quelque chose qui s'est toujours produit dans beaucoup de classes, le rôle essentiel qu'il joue dans la capacité des individus de répondre de manière flexible et créative aux situations de nombre exige son développement à être considéré comme un objectif majeur des mathématiques de l'école primaire. Markovits (1989) suggère que lorsqu'une tâche mathématique est donnée à étudiants avec sens du nombre, ils se sont attendus à avoir dans esprit qu'il n'y a pas toujours une seule réponse, qu'il n'y a pas toujours un algorithme, que les mathématiques et la vie réelle sont liées, et que les décisions et les jugements sont attendu.

2.7.2 Calcul mental dans le sens du nombre

Il y a les évidences que l'instruction sur le calcul mental peut amener les apprenants à améliorer la compréhension du nombre et la flexibilité dans le travail avec les nombres. L'autre évidence que la compétence en calcul mental est attentivement en rapport avec une compréhension et l'usage flexible de la structure du système du nombre entier a été trouvé en étudiant des calculateurs mentaux inexpérimentés et habiles parmi les élèves à l'école secondaire (J. A. Hope, 1987). Les calculateurs inexpérimentés ont ignoré des propriétés évidentes de nombre qui les aideraient et dépendent complètement des algorithmes écrits effectués mentalement. De l'autre côté, les calculateurs habiles ont utilisé une variété de stratégies, ont effectué habituellement les opérations de gauche à droite, et ont évité « porter » et autres procédures avec les hautes exigences de la mémoire. Ils ont utilisé des procédures effectives et exactes et ont favorisé d'utiliser des multiples formes de distributivité et des factorisations pour simplifier leur travail.

Mais les écoles ne sont pas certainement la seule place où les gens acquièrent une bonne compétence du calcul mental. Dans études conduites avec les gens de Dioula de la Côte d'Ivoire (Ginsburg, Posner et Russell, 1981 ; Petitto et Ginsburg, 1982), les enfants sans éducation, qui ont travaillé avec leurs parents dans la place du marché, ont développé des compétences supérieures en calcul mental et ont montré la perspicacité profonde dans la structure et les propriétés du système du nombre entier.

Le calcul mental peut jouer donc un rôle important dans le développement du sens du nombre à travers explorations que forcent des apprenants à utiliser des nombres et des relations de nombre dans la manière qui est possible d'augmenter la conscience de la structure du système de nombre. Cependant, ce n'est pas la base de calcul mental dans la plupart des textes courants. Plutôt, le calcul mental est envisagé à faire très rapidement des problèmes dans la tête, et l'instruction penche donc vers un drill qui utilise des calculs en chaîne (par exemple, $5 + 14; -9; \times 2; \times 3; -15; \div 5$ est égale à 9) et sur l'apprentissage des trucs comme la multiplication par 9 ou par 11.

En outre, les élèves ayant le sens du nombre ont tendance à analyser tout le problème en premier, plutôt que d'appliquer immédiatement un algorithme standard. Ils cherchent des relations parmi les nombres, et avec les opérations et les contextes impliqués. La procédure de calcul choisi ou inventé exploite ces relations observées. À chaque étape de la solution, les individus avec un sens du nombre semblent être conscients du caractère mathématique raisonnable de ce qui est fait et des réponses obtenues (Markovits, 1989). Ainsi, Carroll (1996) suggère que le sens du nombre d'un individu peut être évalué par une analyse des stratégies mentales utilisées lors du calcul.

2.8 Apprentissage des mathématiques

Les développements actuels liés à l'enseignement et à l'apprentissage des mathématiques, y compris le développement des compétences de calcul mental, sont assez cohérents à travers les pays développés (Literacy et Project, 1991). Ceux-ci sont basés sur des convictions qui soutiennent que :

- L'apprentissage est amélioré lorsque les enfants sont placés en situations de résolution de problèmes ;
- L'apprentissage nécessite des occasions de participation active et de réflexion ;
- L'apprentissage est amélioré lorsque la reconnaissance de ce que l'enfant a déjà connu ;
- L'apprentissage est très adapté à la situation dans laquelle il se produit.

De telles convictions placent l'enfant au centre du processus d'apprentissage où des solutions personnellement significatives peuvent être développées. Le pouvoir mathématique est gagné. Cela nécessite que les environnements de classe soient des « cultures de sens » (Board et Council, 1990), les environnements dans lesquels les mathématiques présentées sont vues comme être prévisible, utile et personnellement pertinent. Cette vue des mathématiques qui n'était pas un résultat des programmes scolaires d'études de la nouvelle ère des mathématiques a été un facteur dans leur échec d'atteindre les objectifs fixés, en particulier ceux qui visent à développer des attitudes positives vers les mathématiques et d'être capable de penser de manière intentionnelle et efficace dans des situations mathématiques. Dans la perspective de R. E. Reys (1992), la capacité d'un enfant à raisonner mathématiquement et d'utiliser une gamme de compétences de pensées flexibles est renforcée par le processus de calculer mentalement. Ce processus nécessite une inspection considérée de la situation du problème avant de calculer, favorise et encourage l'usage de propriétés mathématiques de base, récompenses approches adaptables à manipuler des nombres, et facilite l'usage de compétences rationnelles visuelles.

Cet accent centré sur l'enfant est conforme à l'approche constructiviste pour l'apprentissage qui a sa genèse contemporaine dans l'œuvre de Piaget qui croyait que les enfants apprennent à travers l'assimilation et l'accommodation de nouveaux avec des connaissances existantes. L'apprentissage des mathématiques est un processus actif de résolution de problèmes dans lequel l'interaction sociale joue un rôle important. Dans l'étude de Yackel, Cobb, Wood, Wheatley et Merkel (1990), les problèmes qui se posent lorsque l'on tente de communiquer sont des expériences d'apprentissage aussi valables que les tâches du problème elle-même. De plus, prévoir une réflexion sur les expériences permet aux enfants de lien nouveau aux connaissances existantes, un processus essentiel pour l'expansion et l'affinement des compréhensions actuelles.

Apprendre en tant qu'acquérir la connaissance située est en corrélation avec les convictions que l'apprentissage est la connaissance dépendante et un processus de construction de la connaissance (Resnick, 1989b). Lave (1985) suggère que les gens s'engagent dans des tâches mathématiques de manières richement variées dans des différentes situations. Lorsqu'ils sont engagés dans la situation arithmétique, les gens ont changé des problèmes, les ont décomposés et les ont recomposés dans chemins qui ont reflété l'organisation de l'activité proche aussi bien que la structure du système du nombre, et souvent ont changé l'environnement social et physique en un dispositif de calcul.

Ces contrastes avec les mathématiques scolaires dans lesquelles les procédures traditionnellement sont enseignées sont conçus pour être sans contexte et donc universellement applicables. Howson et Wilson (1986) suggèrent qu'il existe trois types de mathématiques. Ce sont : (a) ethno-mathématiques, les manières idiosyncratiques dont les gens, en particulier les groupes socioculturels, réfléchissent et s'engagent dans des tâches mathématiques ; (b) mathématiques scolaires et (c) mathématiques supérieures (pures). Si les mathématiques sont significatives à l'enfant, les mathématiques scolaires doivent incarner des liens clairs entre les trois types. Alors seulement les enfants qui acquerront un pouvoir mathématique et apprendront ainsi les mathématiques peuvent aider à la solution de leurs problèmes et dans leur propre prise de décision (Howson et Wilson, 1986).

2.9 Calcul

Le calcul est une tâche de manipuler des nombres pour accomplir la réponse désirée quel que soit le référent. La réponse désirée peut être une réponse précise et exacte ou ce peut être qu'une valeur approximative plutôt qu'une réponse précise suffira. En vérité, tout calcul est « mental » : calcul purement mental, calcul mental avec traces écrites persistantes ou temporaires et calcul écrit avec étapes mentales, même le calcul algébrique. Il y a aussi des calculs instrumentés avec des abaques, des bouliers ou d'autres instruments ; par ailleurs, même dans un calcul avec calculatrice, il y a une composante mentale pour contrôler les ordres de grandeur et détecter les erreurs de frappe.

Les enfants devraient développer la confiance dans leur capacité, apprendre et exécuter des mathématiques, et acquérir des idées sur les idées de nombre et les relations, à travers leur capacité de découvrir des modèles et des généralisations de la forme, l'aboutissement au développement d'une capacité à raisonner mathématiquement pour résoudre les problèmes de signification pour l'individu.

Outre les notions suivantes : « Analyse, Application des mathématiques au travail quotidien, Calcul, Appréciation du changement et de l'invariance, Classification, Comparaison, Contraste, Conversion, Compte et énumération, Création, Pensée critique, Détermination de la stratégie la plus adéquate, Justification et preuve, Conception ou construction, Discussion ou explication, Faire ou défaire, Formulation de conclusions, Encodage ou décodage, Compréhension de l'équivalence, Estimation, Examen critique, Explication, Exploration des problèmes et des situations, Compréhension de la littératie en matière de finances, Graphiques, Formulation d'hypothèses, Identification des possibilités, des objectifs et des variables, Identification des probabilités, Interprétation et création de graphiques, cartes, tableaux et diagrammes et visualisations de toute nature, Mesure, Modélisation, Classement, Planification de projets (budgétisation du temps, de l'argent, des ressources), Prédiction, Compréhension et utilisation des projections, des inférences et de la réflexion systématique, Compréhension des concepts de la preuve et de l'incertitude », les capacités de calcul comprennent aussi la schématisation des algorithmes des stratégies du calcul mental.

2.9.1 Le processus de calcul

Le besoin de calcul provient le plus souvent de situations problématiques. Dans de telles situations, un individu doit être capable de (a) reconnaître que le calcul est nécessaire, (b) formuler le calcul en décidant quelles opérations utiliser, (c) choisir une méthode de calcul appropriée, (d) réaliser le calcul, et (e) interpréter la solution obtenue en termes de caractère raisonnable des caractéristiques de la situation. Ce dernier peut entraîner des changements à la nature de la réponse requise ou à la méthode de calcul. De plus, Morgan (1999) suggère que la méthode choisie sur le calcul dépend d'une gamme de facteurs qui comprend :

– La nature de l'opération à effectuer : l'opération spécifique, son degré de complexité, le type et la taille des nombres impliqués ;
– Le degré de précision exigé : si une réponse approximative ou exacte est plus appropriée ;
– La disponibilité d'outils de calcul particuliers : le cerveau humain, matériels pour écrire, calculateurs électroniques ;
– Le degré de confiance ressenti à l'égard des mathématiques intégrées dans la situation et l'utilisation des outils de calcul particuliers disponibles.

Le niveau de confiance avec lequel une tâche de calcul est approchée est influencé par l'état émotionnel de l'individu.

Indépendamment de l'approche adoptée - calcul mental, calcul écrit, calcul instrumenté - la solution peut être une réponse exacte ou approximative, dépendante des besoins de la situation de calcul. En ce qui concerne le calcul mental, Morgan (1999) suggère que le calcul mental et l'estimation de calcul sont interdépendants. Ce dernier implique de calculer des réponses exactes en utilisant nombres approximés, dérivés des nombres incorporés dans l'environnement de tâche problématique (Silver, 1987), pour fournir une estimation raisonnable de la vraie réponse à un problème. Par conséquent, lors de l'estimation de calcul, une plage limitée de nombres est manipulée par rapport à celui pour le calcul mental. Cette et d'autres caractéristiques de la relation entre le calcul mental et l'estimation de calcul sont exploré à la section suivante.

2.10 Arithmétique mentale

2.10.1 Définition

L'arithmétique, généralement appelée « science des nombres », est la branche des mathématiques qui étudie les nombres et les opérations élémentaires (addition, soustraction, division, multiplication). D'ailleurs, dans le programme scolaire, l'objectif de l'enseignement de l'arithmétique qui est de « préparer l'enfant à la vie et de cultiver son esprit ». Traditionnellement, l'arithmétique mentale a été utilisée comme un terme générique pour tous les calculs mentaux, équivalent à l'utilisation du calcul mental. Elle était typiquement définie comme « l'arithmétique faite sans l'aide de papier et de crayon » (Flournoy, 1954) et généralement sans indication initiale claire, si les réponses exactes ou approximatives étaient en cours d'examen. Les problèmes arithmétiques présentés verbalement étaient également appelés problèmes mentaux ou problèmes oraux (Hall, 1947). Thompson (Hall, 1947) a soutenu que l'arithmétique orale pouvait être classée l'arithmétique mentale, mais que toute l'arithmétique mentale n'est pas nécessairement orale. Il pourrait être classé comme oral si le calcul a été commencé par une question orale, ou si son résultat a été enregistré dans le discours (Hall, 1947). Cependant, le stimulus pour un calcul mental n'a pas besoin d'être oral. Il pourrait être quelque chose qui a été lue ou simplement pensée. En outre, la solution pourrait être enregistrée mentalement ou par écrit, et pas nécessairement communiquée oralement. Hall (1954) définit l'arithmétique mentale comme :

– des problèmes arithmétiques qui surviennent d'une manière orale, sous forme écrite, ou « dans la tête » de la personne qui a besoin de résoudre le problème ;
– des problèmes dans lesquels le crayon, des appareils mécaniques en papier et autres, tel que les calculateurs, ne sont pas utilisés pour enregistrer les étapes intermédiaires entre la déclaration du problème et sa réponse ;
– des problèmes dans lesquels le crayon et le papier sont utilisés, et qu'ils ne sont utilisés qu'à enregistrer la réponse ;
– des problèmes dans lesquels les estimations rapides sont faites et ne peuvent pas être vérifiées par une réponse écrite non plus.

2.10.2 Différence entre le calcul mental et l'arithmétique mentale

Depuis plusieurs années, le calcul mental a été confondu avec arithmétique mentale. Pourtant, pédagogiquement il y a des différences entre les deux. Le calcul mental est le processus d'effectuer des opérations arithmétiques sans l'aide d'appareils externes (Threadgill-Sowder, 1988). Aussi, il est basé sur l'approche constructiviste. Il développe les compréhensions des enfants et favorise le développement de la métacognition. D'après Caney (2004), « les expériences qui encouragent la discussion et l'apprentissage sont très éloigné de l'importance sur les activités qui se concentrent sur les tests qui a dominé le calcul mental dans les écoles primaires et secondaires pour longtemps ». Tandis que l'arithmétique mentale est basée sur le rappel rapide et exact de faits du nombre, et compte principalement sur la compétence de la mémoire d'un enfant. Les sessions d'arithmétiques mentales chronométrées peuvent prendre l'accentuation d'enfants qui comprennent comment ils trouvent leurs réponses et ne peuvent pas leur fournir les compétences pour développer leurs compréhensions plus loin. Ces sessions peuvent faire simplement ces enfants, avec une bonne mémoire, bien se sentir et laisser le reste de la sensation de la classe déçu. Cela est supporté par McIntosh (2004) qui affirme que cette vitesse journalière et les épreuves de l'exactitude n'ont pas rendu perceptiblement les enfants plus compétent, mais ils les ont rendus légèrement plus névrosé au sujet de nombres.

Dans Beishuizen et Angileri (1998), de façon intéressante, Van den Heuvel-Panhuizen suggère qu'il y a un composant de calcul mental qui compte sur l'engagement de faits du nombre à mémoriser le style de l'arithmétique mentale. Ils affirment que l'automatisme avec les nombres de base comme compléments de 10 est une condition préalable importante pour l'arithmétique mentale flexible. Par conséquent, il est important pour les enfants de développer le rappel immédiat de certains faits du nombre de base donc ils peuvent appliquer ceux-ci dans les calculs mentaux plus compliqués. Comme tel, il paraît que les sessions d'arithmétiques mentales ont une place dans la classe moderne si les professeurs et les étudiants sont informés du lien important dont ils ont pour le calcul mental.

Le calcul mental est sans doute une des compétences mathématiques les plus usagées que les enfants prennent avec eux dans leurs vies. La recherche de McIntosh (2004) suggère que les adultes utilisent le calcul mental pour plus de trois quarts de tous leurs calculs et le calcul écrit et l'utilisation de la calculatrice sont chacun impliqué dans moins que 15% de tous les calculs. Cela conduit les gens à questionner sur le montant considérable du temps d'apprentissage qui est dirigé vers l'introduction et l'entraînement aux algorithmes. C'est une bonne idée que si les écoles préparent les enfants à s'attaquer à la vie, il devrait se concentrer sur le calcul mental.

2.11 Mathématiques mentales

2.11.1 Importance des mathématiques mentales

J. Hope (1990) a expliqué l'importance de mathématiques mentales comme suit : « les mathématiques mentales sont la pierre angulaire pour estimation et des rôles principaux à mieux comprendre de concepts du nombre et les opérations des nombres ». Les mathématiques mentales sont la capacité d'exécuter des calculs mathématiques sans l'aide d'un calculateur, abaque, crayon et papier, ou objets qu'on peut manipuler. La capacité d'exécuter des calculs mentaux simples est utile pas seulement pour les étudiants mais aussi pour des gens de tous les milieux : « pour les ouvriers, les consommateurs, et les citoyens » (Rubenstein, 2001). Avoir la capacité de calculer et de résoudre des problèmes mentalement sont une compétence importante de toute une vie humaine (Education et Training, 1997). Les mathématiques mentales ont été utilisées il y a beaucoup de siècles, dans l'école et en dehors d'école, avant l'invention du papier, des crayons ou des calculateurs. Au Japon, par exemple, l'usage de calcul mental dans la vie ordinaire était depuis le 10ème siècle (R. E. Reys, B. J. Reys, Nohda, Ishida *et al.*, 1991).

Des articles écrits par des professeurs de classe, à savoir Burns (2007), Menon (2003) et Rubenstein (2001), décrivent des activités de mathématiques mentales qu'ils avaient faites oralement à leurs étudiants pendant la classe de mathématiques. Les réponses calculées dans notre tête sont une compétence importante, et Burns (2007) a suggéré que les professeurs donnent à cette compétence un « rôle important » dans leurs apprentissages de mathématiques. Elle aide à développer les compétences en mathématiques mentales de ses étudiants à travers une activité appelée « des mains sur la table de mathématiques ». Elle encourage des étudiants à partager leurs idées et avoir des nouvelles de leurs camarades de classe pour élargir leur répertoire pour calculer, ce qui aide à comprendre leur sens du nombre et la forme de la flexibilité.

Les écoles peuvent avoir besoin de placer plus d'accentuation sur les mathématiques mentales. Les études faites par R. E. Reys, B. J. Reys, Nohda et Emori (1995) montrent que les étudiants trouvent le calcul mental plus provocateur que le calcul écrit, et que la plupart des étudiants préfèrent le papier-et-crayon, la méthode de calcul de droite vers gauche, et n'essaient même pas d'autre méthode de calcul sur les sommes les plus évidentes. De plus, la plupart des enfants et jeunes adultes ne peuvent pas exécuter les calculs mentaux les plus simples même s'ils sont informés qu'un calcul mental est souvent la méthode la plus commode de solution (J. Hope, Reys et Reys, 1988).

2.11.2 Compétences des apprenants

Les compétences en mathématiques mentales peuvent être développées. Dans une étude du cas d'un calculateur mental très habile de 13 ans, J. A. Hope (1987) a affirmé qu'à partir des 50 items de la multiplication qui ont été présentés oralement, la fille a calculé correctement et rapidement 46 items dans une seule tentative, avec une période moyenne de $1,75$ secondes par calcul. Une exception qui l'a prise 50 secondes était le calcul de 123×456. Elle a aussi affirmé la réponse corrigée aux quatre items inexacts. Ses techniques du calcul mental ont inclus des stratégies de décomposition additive d'un ou plusieurs facteurs et la distributivité ; par exemple, 123×456 peut être écrit comme $(100 \times 456) + (20 \times 456) + (3 \times 456)$. Elle avait une capacité remarquable à reconnaître des nombres principaux et une mémoire incroyable pour les carrés, en rappelant dans un deuxième la plupart des carrés de nombres à deux chiffres. La reconnaissance des modèles du nombre était une autre de ses capacités.

J. A. Hope (1987) a remarqué qu'un haut niveau de capacité dans calcul mental paraisse exiger un intérêt dans les modèles du nombre et les propriétés et, comme dans les autres tâches cognitives ordinaires, le succès dans calcul mental dépend de la capacité de sélectionner la méthode correcte pour chaque tâche. J. A. Hope et Sherrill (1987) a discuté ces étudiants habiles et inexpérimentés n'utilisent pas les mêmes types de stratégies du calcul. Dans leur effort de déterminer les caractéristiques de calculateurs mentaux inexpérimentés et habiles, J. A. Hope et Sherrill (1987) ont administré, sur une base individuelle, une épreuve de 30 items de multiplication mentale à 30 étudiants des mathématiques dont 15 habiles et 15 inexpérimentés qui ont été choisis basés sur leur performance sur une épreuve de la multiplication mentale antérieure assistés par 284 étudiants. L'étude a montré que les étudiants inexpérimentés ont été utilisés des calculs à papier-et-crayon bien que beaucoup ont compté sur les tels calculs lourds plutôt que l'usage de calculs mentaux simples. En fait, la plupart des étudiants inexpérimentés font des calculs comme s'ils avaient un imaginaire bloc de papier à lettres. Les étudiants habiles ont utilisé une variété de stratégies pendant leurs calculs avec l'existence la plus fréquente la stratégie de la distribution. La tendance d'étudiants habiles à calculer de gauche à droite en faisant des calculs mentaux, a aussi été observé par J. A. Hope et Sherrill (1987). Comme la plupart des algorithmes de calcul écrit paraissent exiger un type du de raisonnement diffèrent aux algorithmes mentaux. J. A. Hope (1987) a discuté qu'une accentuation tôt sur les algorithmes écrits peut décourager le développement de la capacité de calculer mentalement .

2.11.3 Activités en classe

Irvine et Walker (1996) ont suggéré que les professeurs font une partie d'exercice journalière de mathématiques mentales rapides au commencement et fin du jour. Les activités de mathématique mentale ne devraient pas arrêter avec les nombres entiers mais devraient continuer avec les fractions, les chiffres décimaux et pourcentages et autres essentiels ont ajouté à la liste chaque année.

Rubenstein (2001) a développé des stratégies pour rendre brusquement effectif des activités mentales dans toutes ses classes, et a décrit les avantages suivants : « Quand les étudiants ont occasions régulières d'estimer, partager oralement, évaluer, comparer leurs approches, et transférer des stratégies aux nouveaux cadres, ils se sentent défiés et finalement ont autorisé ». Elle a aussi affirmé que les étudiants ont amené la fierté d'être capable d'utiliser ces nouvelles compétences et de n'avoir pas besoin de compter sur leurs calculateurs.

McIntosh (1998) a suggéré que nous devrions changer notre accentuation dans apprentissage des mathématiques à l'enseignement de calculs mentaux. Il raisonne que les algorithmes formels ne correspondent pas à la façon dans laquelle les gens ont tendance à penser au sujet de nombres, mais restreignent les réflexions des enfants. Il a affirmé que ces stratégies du calcul mental sont flexibles et peuvent être adaptées aux nombres concernés. De plus, il a réclamé que les étudiants développeront le sens du nombre en analysant les nombres impliqués et décident sur la stratégie utilisée.

2.11.4 Avantages de mathématiques mentales

Les bonnes compétences de l'estimation sont une activité de mathématique mentale très habile. R. E. Reys, Bestgen *et al.* (1982) ont conçu une étude d'explorer et de déterminer des stratégies rationnelles utilisées par les apprenants et les adultes, et Dowker (1992) a conçu une étude pour déterminer quelle stratégie rationnelle les mathématiciens professionnels utilisent quand on a demandé d'estimer oralement les réponses. Ces études ont révélé que les sujets ont utilisé une variété de stratégies pour leurs calculs mentaux pendant les entrevues. Les résultats ont indiqué que les sujets étaient flexibles dans leur pensée, utilisé un grand nombre et variété de stratégies de l'estimation qui ont impliqué la compréhension de propriétés arithmétiques et leur relation et étaient rapide dans choisir l'approche à un problème particulier qui a paru être confortable et naturel à eux. Ils étaient capables de changer les données numériques à une forme mentalement maniable, avaient un rappel rapide et exact de faits de base, savaient utiliser des propriétés du nombre et, en général, avaient de bonnes compétences du nombre, des processus cognitifs, et des attributs affectifs.

Dans leur étude de la recherche mentionnée ci-dessus, R. E. Reys, Bestgen *et al.* (1982) ont suggéré que ces mathématiques mentales aident des étudiants à penser et à calculer efficacement et correctement. Les étudiants devraient posséder des compétences de l'arithmétique mentales adéquates afin qu'ils ne soient pas dépendant sur les calculateurs pour faire des calculs simples et soient capable de détecter les réponses non raisonnables lorsqu'ils utilisent des calculateurs pour résoudre des calculs plus durs. Council (2001) a affirmé qu'être capable de penser mathématiquement est très important aujourd'hui. Les citoyens qui ne peuvent pas raisonner mathématiquement sont coupés de royaumes entiers d'effort humain. Ils ont affirmé plus loin que la mal connaissance en numératie exclut d'occasions des gens aussi bien que de compétence dans les tâches journalières. Les étudiants d'aujourd'hui ont besoin d'être donné l'occasion de devenir compétent dans les mathématiques (arithmétique de base, algèbre, géométrie, ou précalcul) aussi bien que dans la lecture s'ils sont être éligible pour les études supérieures. Améliorer la performance mathématique d'étudiants dans et hors d'école est d'importance majeure. Nous vivons dans un monde très technologique. Les travaux technologiques sont basés sur la connaissance mathématique. Par conséquent, les étudiants ont besoin d'apprendre des mathématiques pour être capable d'accéder à beaucoup de travaux dans la vie ordinaire. Aussi, les gens seront conseillés pour évaluer la pertinence et la validité de calculs fait par les calculateurs et les machines plus sophistiquées (Council, 2001). En outre, Council (2001) affirme que les étudiants ont besoin d'être capable de relier des mathématiques scolaires aux mathématiques de la vie ordinaire.

2.11.5 Mathématiques mentales à travers les niveaux

Van de Walle et Folk (2008) sont persuadés que les professeurs peuvent étendre les connaissances préalables de leurs étudiants de rapports du nombre à travailler avec les plus grands nombres. Par exemple, ils combattent que les étudiants devraient être capables de faire des mathématiques mentales dans tout niveau. L'usage d'activités des mathématiques mentales ne devrait pas aussi être restreint à l'école primaire comme les élèves de lycée ont besoin du calcul mental. Par exemple, Lewkowicz (2003) utilise le calcul mental pour présenter le commencement d'algèbre à ses étudiants. Comme nous avons mentionné précédemment, l'échantillon des activités de Rubenstein (2001) est prise au-delà les années scolaires élémentaires. Ils incluent le sens du nombre, en commençant l'algèbre, et précalculs. C'est un bon exemple d'extension de la connaissance de simple aux concepts mathématiques plus difficiles. Elle affirme qu'en faisant la mathématique mentale comme une haute priorité dans ses classes, ses étudiants deviennent des penseurs plus flexibles et sont plus capable d'utiliser de multiples approches pour résoudre des problèmes.

2.12 Estimation de calcul

2.12.1 Définition

Lorsque le but est d'obtenir une réponse exacte au problème arithmétique d'une part, alors le calcul est exigé, bien que l'importance du fait que le calcul peut être mental soit contrainte par la magnitude des nombres impliquée (Threadgill-Sowder, 1988). Si, d'autre part, le but est d'accomplir une réponse approximative ou effectivement, si les nombres sont de grande magnitude alors l'estimation est appropriée. Mais cette estimation implique le calcul. D'après Threadgill-Sowder (1988), l'estimation est le processus de convertir d'exact aux nombres approchés et en calculant mentalement avec ces nombres pour obtenir une réponse qui est raisonnablement près du résultat d'un calcul exact. En d'autres termes, l'estimation inclut davantage le calcul. Le calcul mental est le processus d'effectuer des opérations arithmétiques pour obtenir soit une réponse exacte (dans laquelle le calcul mental est exigé), soit une réponse approximative (dans laquelle l'estimation de calcul est exigée).

Selon R. E. Reys (1984), il y a au moins quatre caractéristiques différentes de l'estimation de calcul : (1) il est effectué mentalement, généralement sans papier et crayon ; (2) c'est fait rapidement ; (3) il produit des réponses qui ne sont pas exact mais sont adéquates à la prise des décisions nécessaires ; et (4) il reflète souvent des approches individuelles et produit divers estimations en tant que réponses. Les compétences de réflexion et la résolution de problèmes supposent un rôle central partout où les compétences d'estimation de calcul sont en cours d'élaboration et utilisées.

La distinction entre le calcul mental et l'estimation de calcul dérive du degré de précision requis pour arriver aux solutions appropriées. Threadgill-Sowder (1988) définit l'estimation de calcul comme « le processus de conversion d'exact à une valeur approximative d'un nombre et de calculer mentalement avec ces nombres entiers pour obtenir une réponse raisonnablement proche du résultat d'un calcul exact ». Dans les contextes de résolution de problèmes, la réponse obtenue doit être suffisamment proche de la réponse exacte pour permettre de prendre une décision appropriée.

2.12.2 Composantes de l'estimation de calcul

L'estimation de calcul est une tâche complexe (J. T. Sowder, 1989). Ça implique la coordination de deux sous-tâches fondamentales :

– convertir de l'exact à des valeurs approximatives d'un nombre utilisant des jugements de proximité et des compétences de comparaison de nombres ;
– calculer mentalement avec ces nombres (Case et J. T. Sowder, 1990).

J. T. Sowder (1989) rapporte que, même si les étudiants peuvent être qualifiés à la fois à l'approximation et au calcul mental, ils peuvent encore ne pas être en mesure d'arriver à l'estimations raisonnables. L'étude de Case et J. T. Sowder (1990) fournit un support pour cette vue. En termes néo-piagétiens, on a émis l'hypothèse que les enfants ne seraient pas capable de coordonner les deux composantes de l'estimation de calcul jusqu'à ce qu'ils étaient capables de la pensée vectorielle vers l'âge de 12 ans. Pendant cette étape, les enfants exposent la croissance dans leur capacité à coordonner deux ou plus complexe et qualitativement des différents composants d'une tâche » (J. T. Sowder, 1989). Vers 17 ans, les étudiants sont capables d'estimer $188 + 249 + 296 + 6$ en utilisant le même niveau de signification pour chaque approximation dans le calcul (J. T. Sowder, 1989).

Le calcul mental, l'estimation de calcul et la comparaison des nombres se partagent à un fond commun caractérisé par des facteurs essentiels à un sens bien développé de nombre (Morgan, 1999). Ceux-ci comprennent : (a) une compréhension des concepts de la valeur de place liés aux nombres entiers et aux nombres décimaux, (b) une capacité d'opérer avec multiples et puissance de dix, (c) une capacité d'utiliser les propriétés des opérations, et (d) une compréhension des systèmes de symboles utilisés pour représenter les nombres (Threadgill-Sowder, 1988). Les quatre constructions, le calcul mental, l'estimation de calcul, la comparaison des nombres et le sens des nombres, ne se développent pas en ordre hiérarchique. Au contraire, Threadgill-Sowder (1988) suggère que chacun dépend, tout en renforçant, les autres dans un développement en spirale, avec l'estimation de calcul qui se développe légèrement plus tard que le calcul mental et les capacités de comparaison de nombre associées à une augmentation du nombre de sens.

Basé sur leur étude des 1200 élèves des 7 à 12 ans, R. E. Reys, Bestgen *et al.* (1982) ont rapporté qu'une caractéristique commune de ceux qui sont compétents en estimation de calcul, est la capacité à calculer rapidement et efficacement des réponses mentales exactes, une constatation soutenue par A. Heirdsfield (1996), en particulier pour l'addition des enfants de la quatrième année. Tous ont démontré les compétences avec un nombre limité de chiffres ou avec des multiples de dizaines. Les estimateurs les plus compétents affichaient une confiance en soi, utilisaient une variété de stratégies et ont été en mesure de calculer mentalement avec de plus grands nombres, avec plus de chiffres, et avec des types de nombres autres que des nombres entiers (R. E. Reys, Bestgen *et al.*, 1982). D'après une étude sur les performances des élèves de 8ème année en informatique, Rubenstein (1985) a conclu que la capacité de multiplier et de diviser par des puissances de dix a une relation particulièrement forte avec la performance d'estimation. De plus, les élèves qui n'ont pas cette capacité ont une compréhension réduite de la taille des nombres.

Il peut être possible d'être simultanément compétent en calcul mental et très pauvre en estimation de calcul (R. E. Reys, 1984). La possibilité de convertir exactement à un nombre approximatif est celui qui doit être développé avant que la compétence avec l'estimation de calcul ne soit réalisée. Cette capacité dépend de pouvoir faire les comparaisons et de juger de la taille relative des nombres. Selon Threadgill-Sowder (1988), la comparaison des nombres est définie comme « la possibilité de ranger des nombres réels selon leur taille, comme en sélectionnant le plus grand de deux ou plusieurs nombres, ou par la capacité de comparer les différentes grandeurs, telles que sélectionner lequel des deux nombres est le plus proche d'un troisième ».

2.12.3 Processus d'estimation de calcul

Trois processus cognitifs clés sont évidents dans les méthodes utilisées par les estimateurs de calcul compétents : la reformulation, la compensation et la traduction (R. E. Reys, Bestgen *et al.*, 1982 ; R. E. Reys, B. J. Reys, Nohda, Ishida *et al.*, 1991). La reformulation, qui est « lourdement dépend de la capacité à comparer les nombres » (Threadgill-Sowder, 1988), est le plus souvent utilisée pour convertir les nombres exacts en nombres approximatifs. Bien que certains aspects de la compensation et de la traduction dépendent des compétences sur la comparaison des nombres et informent donc la sélection des nombres approximatifs appropriés, ces stratégies sont plus directement impliquées dans le processus de calcul mental.

Lorsque le développement des compétences d'estimation de calcul a été inclus dans le programme, il a été limité principalement à l'approximation en utilisant la convention d'arrondissement, une stratégie de reformulation (R. E. Reys, 1984). Sauble (1955) a suggéré qu'afin de développer la compétence des enfants dans l'estimation, ils doivent apprendre à arrondir les nombres et à reconnaître les situations dans lesquelles l'utilisation de nombres approximatifs est plus significative et utile que les nombres exacts. Indépendamment de la classe et des niveaux de compétence, les élèves du collège ont assimilé l'estimation à un arrondi le plus proche, pour les nombres entiers et décimaux. Les étudiants ont été observés pour arrondir les nombres aux puissances de dix principales avant de calculer mentalement. Cependant, il y a peu d'utilisation de la stratégie de nombres quasi-compatibles, avec peu de tentatives pour affiner les estimations initiales.

La reformulation est définie comme un « processus de modification des données numériques pour produire une forme plus gérable mentalement, tout en laissant intacte la structure du problème » (R. E. Reys, Bestgen *et al.*, 1982). Elle est caractérisée par deux stratégies de base. Ce sont l'utilisation de l'estimation par la gauche ajustée des nombres et la substitution des nombres par les formes plus acceptables. La méthode la plus commune pour l'approximation des nombres est habituellement un arrondi au plus proche de cinq, de dix, de cent, de mille, et ainsi de suite (Trafton, 1978). R. E. Reys, Bestgen *et al.* (1982) signalent que cette capacité est évidente pour tous ceux qui maîtrisent l'estimation de calcul. Arrondir est une variante de l'utilisation de l'estimation par la gauche ajustée des nombres. L'autre approche de l'estimation par la gauche ajustée commune est la troncature, dans laquelle les chiffres les plus à gauche d'un nombre sont utilisés dans un calcul mental, par exemple, $87325 - 64143$ pourraient être convertis en $87000 - 64000$.

La substitution des nombres par des formes plus acceptables se produit habituellement dans l'un des deux façons. Le premier, utilisant des nombres compatibles, implique d'arrondir à des multiples plus convenables de nombres dans un problème, par exemple, en substituant par 5 le 4 dans l'opération $74 \div 5$. L'utilisation de cette compétence est moins fréquente que l'arrondi à des multiples de dix, mais est encore exposée par une majorité de ceux qui sont compétents en estimation de calcul (R. E. Reys, Bestgen *et al.*, 1982). Une deuxième stratégie de substitution commune est l'utilisation de formes équivalentes de nombres pour simplifier le calcul mental. Par exemple, pour trouver une réponse approximative de 30% de 104, 30% pourrait être remplacé par $1/3$. Dans cette situation, il est probable que 104 seraient arrondis à 105 pour simplifier le calcul mental.

La traduction dépend également de facteurs pertinents au processus de calculer mentalement. La structure du problème est modifiée pour simplifier le calcul mental et cela dépend de facteurs tels que la connaissance de l'enfant sur le nombre et de confiance avec diverses méthodes de calcul. R. E. Reys, Bestgen *et al.* (1982) suggèrent que le processus de traduction est plus flexible que celui de reformulation : « L'étudiant semble avoir une vision panoramique du problème et est moins limité par les nombres impliqués. En fait, très souvent, les nombres et les opérations sont modifiées simultanément pour aboutir à des formes plus gérables ».

Trafton (1986) suggère qu'un élément essentiel de l'estimation perspicace est la capacité de sentir les relations entre les réponses approximatives et exactes. Pour juger la pertinence d'une estimation, il peut être nécessaire d'apporter des ajustements de tenir compte de toute variation numérique qui aurait pu survenir au cours du processus de traduction ou de reformulation (R. E. Reys, Bestgen *et al.*, 1982). La compensation repose également sur une capacité à comparer les chiffres, et est affectée par la maîtrise des données numériques, le contexte du problème, et la tolérance de l'individu à l'erreur (R. E. Reys, Bestgen *et al.*, 1982). R. E. Reys, B. J. Reys, Nohda, Ishida *et al.* (1991) signalent que les enfants japonais de cinquième et huitième année sont plus susceptibles d'ajuster leurs estimations si l'arrondi compatible plutôt que l'arrondi simple est déjà utilisé. Cela suggère que « l'arrondissement compatible est plus susceptible de laisser l'utilisateur avec un sens de la direction de la réponse exacte et donc plus susceptible d'être accompagnée d'une compensation ». L'élève a expliqué pour calculer $347 \times 6 \div 43$, « c'est environ égal $347 \times 6 \div 42$, ou $347 \times 1/7$ qui est approximativement égale au septième de 350, soit 50 ; étant donné que 350 est plus grand que 347, donc mon estimation est 48 » (R. E. Reys, B. J. Reys, Nohda, Ishida *et al.*, 1991).

Parmi les trois processus cognitifs clés, Threadgill-Sowder (1988) suggère que la compensation semble être la plus étroitement liée à la compréhension conceptuelle du processus d'estimation de calcul. Toutefois, comme l'ont observé Poulter et Haylock (1988), les ajustements reflètent souvent le sentiment intuitif de nombre et sont ceux pour lesquels une logique peut ne pas être facilement expliqué. La compensation ne doit pas seulement avoir lieu après qu'une estimation a été calculée. Des ajustements peuvent également être effectués au cours des stades intermédiaires du calcul mental.

2.12.4 Comparaison entre le calcul mental et l'estimation de calcul

Le calcul mental et l'estimation de calcul sont similaires à plusieurs égards, et chacun est une compétence essentielle dont l'importance semble certaine d'augmenter dans les années postérieures. Les deux compétences sont utilisées pour vérifier l'exactitude et le caractère raisonnable des résultats produits par des calculatrices portatives et les ordinateurs. Chacun est effectué mentalement ; chacun profite des propriétés de la structure et les relations entre les nombres ; et chacun permet aux individus d'utiliser différents processus de solution.

D'un autre côté, ces deux compétences sont très différentes à certains égards. Par exemple, le calcul mental est une condition vitale préalable à l'estimation de calcul, mais la relation inverse ne se tient pas. En outre, le calcul mental produit une réponse exacte qui est soit vraie, soit fausse, alors que l'estimation de calcul peut produire beaucoup de différentes réponses, qui sont tous raisonnables et acceptables.

B. J. Reys (1986a) suggère que si une réponse approximative peut être obtenu pour chaque problème arithmétique grâce à l'estimation de calcul, le calcul des réponses exactes est limité au sous-ensemble de problème. Certaines méthodes utilisées pour arriver à des estimations plus précises peuvent aider les enfants dans leur développement de stratégies pour calculer des réponses exactes. Néanmoins, les expériences avec stratégies appropriées au cours de l'estimation de calcul peuvent aider les enfants à développer les approches flexibles pour calculer des réponses exactes. Lorsque les nombres et les opérations impliqués sont dans la capacité d'un individu à calculer mentalement, les stratégies appropriées peuvent finalement aboutir à transformer les estimations en réponses exactes. Les stratégies utilisées par les spécialistes du calcul mental vont toutefois au-delà ceux qui ont une relation directe avec ceux utilisés dans l'estimation de calcul. Une caractéristique du calculateur mental de haute compétence est leur capacité à percevoir les propriétés du nombre et les relations qui peuvent être utile pour calculer une réponse exacte (J. A. Hope, 1985 ; Hunter, 1977 ; B. J. Reys, 1986b). Les nombres sont décomposés et recomposés dans la manière qui n'est pas nécessairement basés sur des relations de valeur basée sur le multiple de 10. Par exemple, J. A. Hope (1987) rapporte que Charlene, une calculatrice mentale de haute compétence, calcule 87×23 dans les étapes suivantes :

$$\begin{aligned}
87 \times 23 &= (29 \times 3) \times 23 \\
&= 29 \times (3 \times 23) \\
&= 29 \times 69 \\
&= 69 \times (30 - 1) \\
&= 69 \times 30 - 69 \\
&= 2070 - 69 \\
&= 2001
\end{aligned}$$

Une telle approche nécessite une capacité de mémoire de travail suffisante pour pouvoir coordonner et surveiller de nombreuses activités de calcul interdépendantes sans perdre la trace du calcul (J. A. Hope, 1987).

En résumé, le calcul mental et l'estimation de calcul sont des processus qui sont étroitement liés. Chacun est effectué mentalement, en profitant des propriétés structurelles et les relations entre les nombres. Les deux sont utilisés pour vérifier si une réponse d'une calculatrice ou un calcul à papier-et-crayon est non raisonnable (R. E. Reys, 1984). De même, les gens compétents en calcul mental et en estimation de calcul montrent les caractéristiques cognitives et affectives similaires et utilisent des stratégies qui présentent certaines similitudes. Néanmoins, il existe des différences essentielles entre le calcul mental et l'estimation de calcul. Bien que l'estimation de calcul produise de nombreux différentes solutions, qui sont raisonnables et acceptables, le calcul mental est concerné par la production de réponses correctes ou incorrectes.

2.12.5 Avantages de l'enseignement de l'estimation de calcul

Des bonnes compétences en estimation de calcul ont toujours été nécessaires, et la société de la technologie d'aujourd'hui augmente ce besoin. Les enquêtes montrent que plus de 80% de toutes les utilisations d'adulte des mathématiques implique l'estimation (R. E. Reys, 1984). En plus du besoin des consommateurs d'utiliser évidemment l'estimation, la société est devenue moins tolérant du calcul écrit. La technologie, en particulier les calculatrices et ordinateurs, fait de plus en plus des fortes exigences de l'estimation de calcul pour s'assurer que les résultats calculés par les machines sont en effet raisonnables.

Des recherches sur l'estimation de calcul indiquent clairement que la performance peut augmenter de façon spectaculaire lorsque les techniques d'estimation bien spécifiées sont enseignées (Driscoll, 1981 ; Nelson, 1967).

2.12.6 Importance de l'estimation de calcul

Une considération d'utilisation de l'estimation de calcul et une compétence importante doivent être établies. Les apprenants doivent être affectés à des problèmes qui leur font prendre conscience des différentes situations dans lequel l'estimation de calcul est rencontrée. Beaucoup d'étudiants ne savent pas ce que l'estimation implique. Considérons l'exemple de R. E. Reys (1984) : si l'on demande d'estimer 56×28, certains élèves de cinquième année essayent très laborieusement de calculer la réponse exacte mentalement. Beaucoup d'apprenants apprennent à estimer la bonne réponse, et en tant que résultat, ils comprennent mal l'utilisation de l'estimation. Les autres élèves écrivent les facteurs, calculent le produit en utilisant l'algorithme traditionnel avec papier-et-crayon, et tronquent ou arrondissent ce produit pour obtenir leur estimation. Cette procédure n'est pas, cependant, l'estimation de calcul, et les éducateurs ne devraient pas permettre aux élèves d'utiliser cette approche « calculer puis arrondir ». Au contraire, les étudiants devraient voir une technique utile d'estimation de calcul qui peut être effectué relativement facile et rapide. L'estimation de calcul et le calcul mental sont fréquemment groupé comme sujets du programme scolaire ensemble. Il y a bon raisons pour cette liaison (J. Sowder, 2007).

2.13 Conclusion

Le calcul mental exige une attention constante et ne peut pas se faire d'une manière mécanique, comme c'est souvent le cas dans le calcul écrit. Le calcul mental est donc un moyen important pour développer le sens du nombre et pour acquérir une meilleure compréhension de la valeur de position et des opérations mathématiques. L'élève qui est habile en calcul mental est plus habile à saisir les liens entre les données numériques et à les transformer.
En somme, les capacités de calcul mental sont au cœur de la numératie. Les résultats de la recherche suggèrent qu'il existe des liens entre le calcul mental et le sens du nombre, particulièrement les propriétés des nombres de base, la valeur de position, l'estimation et les opérations mathématiques.

CHAPITRE 3

Stratégies de calcul mental

3.1 Introduction

Le calcul mental est un processus dans lequel le calcul numérique peut être fait rapidement et correctement sans l'aide de moyens externes, par exemple, des manipulateurs, le crayon et papier, etc., et être fait d'une manière réfléchie, en utilisant quelque stratégie (Maclellan, 2001). C'est aussi un calcul rapide en utilisant des stratégies appropriées afin d'obtenir une réponse exacte ou réponse approchée suivant le contexte d'un problème. Ainsi, la finalité du calcul mental est la rapidité et l'exactitude tout en s'appuyant sur la stratégie appropriée cohérente et pertinente dont la capacité de choix dépend de la compétence en mathématiques, en particulier le calcul, sans utiliser des calculatrices. Pour bien progresser, il faut s'entrainer, mettre en place diverses stratégies pour que les choses deviennent naturelles. Tout cela nous explique que « les stratégies de calcul mental » est une composante de base pour mieux réussir en ce genre de calcul. Devant un problème impliquant des calculs, nous sommes obligés de réfléchir aux types de calculs appropriés pour aboutir aux résultats entendus, que ce soit une réponse exacte, que ce soit une réponse approchée. A ce moment-là, le fait de choisir le calcul mental dépend donc de la conviction et la compétence de la personne concernée et du contexte du problème, ceux qui sont considérés comme des autres composantes dudit calcul.

Dans ce chapitre, avant d'étudier des stratégies du calcul mental, nous allons analyser, à la section 3.2, les autres composantes du calcul mental, étude basée sur la revue de quelques recherches sur ces composantes. La section 3.3 présente quelque peu d'étude non exhaustive des stratégies du calcul mental, des stratégies de l'estimation et aussi des stratégies schématisées. Enfin, la section 3.4 est consacrée à la conclusion.

3.2 Composantes du calcul mental

Comme indiqué précédemment, bien que des réponses approximatives puissent être déterminées pour tous les problèmes arithmétiques, la gamme de problèmes pour lesquels des réponses exactes peuvent être trouvé mentalement est limité (B. J. Reys, 1986a). Cette situation n'est pas simplement due à la complexité numérique de nombreuses tâches arithmétiques. D'égale importance est la prise en compte de la compréhension et de la compétence d'un individu avec des composantes essentielles du calcul mental. Peu de recherches sont disponibles basées sur l'analyse complète des composants du calcul mental. Flournoy (1957) suggère que dans des situations nécessitant des réponses exactes, une personne doit être capable de :

- Reconnaître le problème et organiser les faits du problème.
- Garder les nombres à l'esprit quand il pense au problème.
- Effectuer le processus ou les processus arithmétiques nécessaires, sans papier et un crayon, et prendre une décision sur le problème.

Ce premier point n'est pas particulier au calcul mental. Quelle que soit la tâche mathématique, une personne doit être capable de reconnaître quel est le problème à résoudre et être capable d'organiser les faits perçus de sorte qu'une solution peut être déterminée. La deuxième exigence dépend de la capacité de mémoire qui travaille et de la façon dont il est utilisé pendant le traitement. Le degré de travail de mémoire pendant le calcul mental dépend largement de la stratégie particulière utilisée. A partir du processus arithmétique, Flournoy (1957) fait simplement référence à l'opération - addition, soustraction, multiplication ou division - qui doit être appliquée. Pour effectuer ces opérations, une plus grande importance est une considération des stratégies mentales particulières utilisées. Dans toutes les analyses des composantes du calcul mental, non seulement l'éventail des stratégies utilisées devrait être considéré, mais les facteurs qui étayent leur utilisation compétente.

En l'absence d'une analyse détaillée des composantes du calcul mental dans la littérature, le modèle de J. T. Sowder et Wheeler (1989) pour spécifier les composants de l'estimation de calcul peut fournir un cadre de discussion. Il a classifié ces composantes en quatre catégories : Composantes conceptuelles, Concepts associés et Compétences, Composantes de compétences, et Composantes affectives. Les composantes conceptuelles sont définies comme ceux qui se rapportent à la compréhension de ce que comporte le processus de recherche d'une estimation (J. T. Sowder et Wheeler, 1989). Pour cette analyse, les composantes conceptuelles du calcul mental sont réputées être ceux qui se rapportent à la compréhension de la base de processus de calcul mental des réponses exactes. J. T. Sowder et Wheeler (1989) définissent des concepts et des compétences connexes en tant que des capacités connues, ou soupçonnées d'influencer indirectement la compétence d'un individu à trouver les solutions approchées. En ce qui concerne l'estimation de calcul, la capacité de calculer mentalement est classé comme une compétence connexe (J. T. Sowder et Wheeler, 1989).

La recherche sur la catégorisation des stratégies de calculer mentalement des réponses exactes n'a pas encore abouti à une classification aussi bien définie que celle de processus utilisés pour convertir les nombres exacts en nombres approximatifs. J. T. Sowder et Wheeler (1989) définissent ces composants comme ceux qui semblaient plus appropriés aux compétences, même si elles n'apparaissent pas dans le travail des élèves sans les accompagner la preuve de la compréhension conceptuelle nécessaire pour les employer comme compétences. De telles stratégies reflètent une vision constructiviste du calcul mental qui postule que les stratégies mentales sont basées sur la compréhension intuitive des nombres d'un individu et des manipulations requises (R. E. Reys, B. J. Reys, Nohda et Emori, 1995). Il est émis l'hypothèse que les stratégies de calcul mental pertinentes aux contextes particuliers ne peuvent être conçus, compris ou réalisés avec succès sans le soutien de compréhensions conceptuelles appropriées, de concepts et de compétences connexes, et de caractéristiques affectives. Il est donc proposé d'analyser les composantes de calcul mental en utilisant les catégories suivantes : Composantes affectives, Composantes conceptuelles, Concepts et compétences connexes, et Stratégies pour calculer mentalement.

3.2.1 Composantes affectives

Lorsqu'on apprend les mathématiques, ce n'est pas la mémorisation des compétences mathématiques qui est particulièrement important, mais la confiance que l'on sait trouver et utiliser des outils mathématiques chaque fois qu'ils deviennent nécessaires (Council, 1989). Le calcul mental est un de ces outils, un outil avec lequel les étudiants n'affichent généralement pas la compétence et préfèrent ne pas utiliser, même dans les cas où le calcul mental est approprié (Carpenter, Matthews, Lindquist et Silver, 1984 ; B. J. Reys, R. E. Reys et Hope, 1993 ; R. E. Reys, 1985 ; R. E. Reys, B. J. Reys, Nohda et Emori, 1995). Si les enfants doivent devenir compétents en calcul mental, ils doivent développer une confiance dans leur capacité à calculer mentalement. Il a été discuté précédemment que le calcul mental, l'estimation de calcul et le sens du nombre sont étroitement interdépendants. Le développement d'un bon sens du nombre exige la confiance dans le traitement des situations numériques. De plus, J. T. Sowder et Wheeler (1989) suggèrent que cette confiance est une composante affective importante de l'estimation de calcul. Il est donc raisonnable de supposer que le degré de confiance avec lequel les enfants abordent des tâches de calcul mental est influencée par le degré de confiance ressenti dans leur capacité à effectuer des tâches mathématiques en général, en particulier celles liées à la situation numérique. Les enfants acquièrent la confiance et la propriété des procédures mentales qu'ils utilisent s'ils sont autorisés à créer, construire et découvrir les mathématiques pour eux-mêmes, en particulier lorsque les mathématiques sont rencontrées dans les situations significatives (Payne, 1990). Ils considèrent les mathématiques, et les procédures de calcul mental, comme logique et utile, comme en témoignent les conclusions de Carraher, Carraher et Schliemann (1985). Il est donc proposé que les composantes affectives de calcul mental devraient également inclure une reconnaissance que le calcul mental soit utile et que les procédures de calcul mental devraient avoir un sens personnel.

3.2.2 Composantes conceptuelles

Dans toute situation nécessitant un calcul, les enfants ont besoin d'être en mesure de déterminer si le calcul écrit, mental ou instrumenté est la méthode la plus appropriée. Cela dépend de la nature du fonctionnement, le degré de précision requis, la disponibilité des outils de calculs particuliers, et le niveau de confiance ressenti à l'égard des mathématiques intégrées dans la situation. Il est donc supposé qu'une composante conceptuelle fondamentale de calcul mental est la capacité de reconnaître les contextes arithmétiques pour lesquels le calcul mental est approprié. Étant donné que, dans un contexte particulier, les enfants présentent différents niveaux de confiance, en ce qui concerne leur capacité à calculer mentalement, il ne peut y avoir des critères pour définir les contextes appropriés pour le calcul mental.

Howden (1989) suggère que les élèves qui peuvent juger le caractère raisonnable des résultats de calcul et réaliser que nombreuses façons peuvent être utilisées pour arriver à une solution gagnent la confiance dans leur capacité à faire des mathématiques. Dans la description de J. T. Sowder et Wheeler (1989) des composantes de l'estimation de calcul, la considération est donnée aux plusieurs processus. Dans leurs classifications, ces composantes ne sont pas spécifiquement liées à la nécessité de convertir les exactes aux nombres approximatifs ni à la composante de calcul mental de l'estimation de calcul. Cependant, l'une des caractéristiques déterminantes des algorithmes mentaux, comme discuté au préalable, est leur variabilité (Plunkett, 1979). Ceci qualifie le calcul mental à utiliser une variété de stratégies pour calculer les réponses exactes (Carraher, Carraher et Schliemann, 1987 ; J. A. Hope, 1987 ; Hunter, 1978). En conséquence, il semble raisonnable de proposer qu'une composante conceptuelle importante du calcul mental est une acceptation de plus d'une stratégie pour obtenir mentalement une réponse exacte. J. A. Hope (1987) soutient que le succès dans le calcul mental dépend davantage de la capacité de choisir le « bon outil pour le travail » plutôt que la possession du mécanisme inné supérieur de traitement de l'information. Une stratégie de calcul mental dépend non seulement sur le fond d'un individu sur la connaissance conceptuelle et procédurale, mais aussi sur le contexte dans lequel le calcul doit être entrepris.

3.2.3 Concepts et compétences connexes

B. J. Reys (1989) note que Paul Trafton a suggéré au cours d'une conférence sur le sens du nombre qu'il y a peut-être deux niveaux de calcul mental, chacun distingué par la nature des stratégies utilisées pour déterminer les réponses exactes et la nature des nombres impliqués dans l'opération. La première des deux niveaux ne nécessite généralement pas une stratégie inventée à appliquer, mais nécessite une méthode pour déterminer la valeur de lieu de la réponse (B. J. Reys, 1989). De tels problèmes de calcul impliquent souvent d'opérer avec des puissances de dix ou multiples de dix, et sont de la nature des calculs mentaux requis pendant l'estimation de calcul. A ce niveau, les opérations mentales requises sont essentiellement des faits de base étendus (B. J. Reys, 1989), mais peuvent aussi impliquer des nombres autres que des nombres entiers. En ce qui concerne les opérations impliquant des simples fractions communes, $\frac{1}{2} + \frac{1}{4}$ par exemple, B. J. Reys (1989) suggère que, bien que la compréhension conceptuelle soit essentielle pour obtenir la bonne réponse, il est peu probable qu'une stratégie inventée soit nécessaire, au moins pour les personnes qui avoir une bonne compréhension des fractions communes.

Deuxième niveau de calcul mental de Trafton (B. J. Reys, 1989) concerne des problèmes pour lesquels une connaissance approfondie des propriétés des nombres impliqués sont généralement requis, ainsi qu'une procédure auto-développée comprise par l'utilisateur - par exemple pour 102×8 (B. J. Reys, 1989). J. T. Sowder (1992) suggère que la capacité d'effectuer des calculs mentaux en utilisant des stratégies inventées est un comportement qui indique la présence du sens du nombre. Les problèmes qui nécessitent l'invention de stratégies sont les plus susceptibles d'être rencontrés lorsque le but du calcul mental est la détermination des réponses exactes.
Par exemple, une méthode de calcul de 8×102 repose sur l'application de la loi distributive

de la multiplication par rapport à l'addition : $8 \times 102 = 8 \times (100+2) = (8 \times 100) + (8 \times 2) = 800 + 16 = 816$. Cette méthode repose également sur une connaissance de stratégie de Hazekamp (1986), appelée « produits spéciaux » : « produits qui se trouvent facilement en multipliant par une puissance de 10 ou un multiple d'une puissance de 10 ».

Threadgill-Sowder (1988) a abordé une analyse des composantes du calcul mental à partir d'une perspective quelque peu différente, mais liée, à celle de Trafton. Une composante principale du calcul mental est la capacité de traduire un problème en une forme plus maniable mentalement (Hunter, 1977 ; R. E. Reys, 1985). Deux questions clés doivent être posées et répondues dans de nombreux cas :

a)- Comment les chiffres peuvent-ils être exprimé pour obtenir des questions de fait de base ?

b)- Comment procédera-elle la séquence opérationnelle en raison de la façon dont les nombres ont été exprimés ? (Threadgill-Sowder, 1988)

Threadgill-Sowder (1988) suggère que comme il n'y a jamais un seul moyen de répondre à la première question, c'est-à-dire choisir un format pour les nombres à calculer, le calcul mental est un acte très créatif et inventif. Pour ceux qui sont qualifiés avec le calcul mental, il est probable que leur but est d'exprimer les nombres sous une forme qui peut être liée à des éléments dans leur magasin de connaissances en nombres et les relations qui vont au-delà des faits de base. J. A. Hope (1987) a rapporté que Charlene, un expert en calcul mental de treize ans, calcule 16×72 en raisonnant $16 \times (70+2) = (16 \times 70) + (16 \times 2) = 1120 + 32 = 1152$. Il est probable que Charlene a utilisé la connaissance de la place pour exprimer 72 comme $70+2$ afin qu'elle puisse puiser dans son stock de produits comprenant $16 \times 70 = 1120$. Celle-ci suggère que la première question de Threadgill-Sowder (1988) devrait être reformulée pour augmenter sa généralité, à savoir, comment les nombres peuvent être exprimés pour obtenir des questions auxquelles on peut répondre par rappel ?

Le calcul mental qualifié exige que l'utilisateur recherche le sens par l'analyse du problème pour les propriétés et les relations des nombres essentiels (J. A. Hope, 1986). Comme suggéré par Threadgill-Sowder (1988), la séquence opérationnelle dans chaque cas dépend de la façon dont les nombres à opérer sont exprimés. Par exemple, pour $51 - 34$, nous pouvons procéder comme suit :

- $34 + 6 = 40$, $40 + 11 = 51$; Par conséquent, $51 - 34 = 17$ (soit $6 + 11$).
- $34 + 10 = 44$, $44 + 7 = 51$; Par conséquent, $51 - 34 = 17$ (soit $10 + 7$).

- $34+1=35$, $35+15=50$, $50+1=51$; Par conséquent, $51-34=17$ (soit $1+15+1$).
- $50-30=20$, $20-4=16$; Par conséquent, $51-34=17$ (soit $16+1$).
- 51 = trois fois 17, 34 = deux fois 17 ; Par conséquent, $51-34$ = une fois 17.

Lors d'un calcul, les nombres [obtenus] sont exprimés de nouveau de manière à conduire aux questions de base [ou rappeler], et les calculs effectués en tant que résultat présente de nouveaux calculs mentaux faisant appel à un nouveau cycle de questions (Threadgill-Sowder, 1988).

Par exemple, par rapport à la première méthode, $34+6=40$ a été soit rappelé, soit calculé en utilisant la connaissance de base des faits $10-4=6$, et pour passer de 40 à 51, la première question devait être reconsidérée.

Comme avec la première étape, $40+11=51$ peut avoir simplement été rappelé, ou il peut avoir été calculé en utilisant la connaissance de base des faits $4+1=5$, $0+1=1$. Dans chaque cas, il est évident que la façon dont les chiffres et les relations perçues entre eux sont exprimés détermine la façon dont la réponse est calculée. De l'analyse ci-dessus, pour que la première question de Threadgill-Sowder (1988) soit répondue avec succès, les enfants doivent être capables de :

- Rappeler les faits de base.
- Comprendre les concepts de place (72 est $70+2$).
- Composer et décomposer les nombres pour les exprimer dans une variété de façons, c'est-à-dire, de puiser dans leur stock d'équivalents numériques (51 est 3×17 ou $40+11$).
- Fonctionner avec des multiples et des puissances de dix (Utiliser $5-3$ pour résoudre $50-30$, ou reconnaître que 40×800 est $4\times10\times8\times100$) (Threadgill-Sowder, 1988).

Toutefois, compte tenu de la reformulation de la première question, la liste des concepts et les compétences connexes devraient être étendues pour inclure la capacité de rappeler et d'utiliser un large éventail de relations entre les nombres. Cockcroft (1982) fournit un support pour les deux premières composantes. Il suggère que les procédures mentales efficaces sont basées sur une compréhension de la valeur de place en association avec une possibilité de rappeler des faits d'addition et de multiplication. La capacité de composer et décomposer les nombres dépend de relations parties entières bien développées (Ross, 1989) et est étroitement liée à la connaissance de la place. Une compréhension de la valeur de lieu et de la propriété de ses caractéristiques essentielles est d'une importance cruciale d'ouvrir des stratégies mentales plus efficaces et plus simples (McIntosh, 1991). J. T. Sowder (1992) énumère la capacité de composer et de décomposer les nombres comme celui qui démontre une certaine présence du sens du nombre. Au fur et à mesure que leur sens du nombre augmente, les enfants font preuve d'une plus grande souplesse dans la manière qu'ils pensent aux chiffres. Comme le souligne Ross (1989), en fin de compte, leur réflexion permet mentalement de composer tout de leurs composantes, se décomposer les quantités entières en d'autres nombres, et peut-être réarranger ces derniers et recomposer les quantités entières, avoir confiante tout le temps que la quantité de l'ensemble n'a pas changé.

Hiebert (1989) pense que les symboles arithmétiques écrits peuvent fonctionner en deux façons : des enregistrements de quelque chose de déjà connu, et des outils pour penser. Un sens du nombre bien développé exige que les chiffres, le fonctionnement et les signes de relation fonctionnent dans les deux sens. Cela conduit J. T. Sowder (1992) à suggérer qu'un comportement clé indicatif de la présence du sens du nombre et critique pour le calcul mentale (et la numération et l'estimation de calcul) est la capacité de lier les symboles de numérotation, d'opération et de relation de manière significative. L'utilisation de symboles en tant qu'outils nécessite qu'ils soient traités comme des objets de réflexion. Il existe des preuves pour suggérer que les calculatrices mentales compétentes utilisent des symboles dans cette manière, reflétée par leur langage orienté physiquement. Ils se réfèrent souvent à découper ou casser des nombres en décrivant leurs techniques mentales (Hiebert, 1989).

Bien que l'utilisation des nombres comme objets de réflexion contribue au développement du sens du nombre, en prenant avantage des propriétés du système (Hiebert, 1989), dans la vue de Trafton (1989), le sens du nombre est plus lié aux intuitions et aux idées associées aux nombres en tant que quantités, plutôt que les nombres en tant qu'entités formelles abstraites. Les calculateurs mentaux utilisent une approche de manipulation des quantités. Carraher *et al*. (1987) ont rapporté que les enfants, lorsqu'ils calculaient mentalement, transformaient les problèmes présentés afin qu'ils puissent travailler avec des quantités plus gérables. Ceci est le reflet des approches observées décrit pour résoudre $51 - 34$ ci-dessus. Les enfants ne fonctionnaient pas avec des symboles en soi, mais avec des symboles donnés le sens par leurs relations à placer, ainsi que la valeur et la partie entière de connaissance.

En ce qui concerne la deuxième question de Threadgill-Sowder (1988), comment la séquence opérationnelle procède-t-elle en raison de la façon dont les nombres ont été exprimés ? Les enfants devraient pouvoir :

- Regrouper les termes en utilisant les propriétés d'associativité et de commutativité de l'addition et de la multiplication : $54 - 31 = (50 + 4) - (30 + 1) = (50 - 30) + (4 - 1)$;

- Utiliser les propriétés de distributivité de la multiplication et de la division : $16 \times (70 + 2) = (16 \times 70) + (16 \times 2)$;
- Multiplier par des puissances de 10 (comme pour la première question) (Threadgill-Sowder, 1988).

Cependant, comme décrit précédemment, chaque question est considérée cycliquement pendant le processus de calcul mental.

Une compétence supplémentaire liée au calcul mental compétent est la capacité à reconnaître la nécessité et entreprendre des compensations nécessitées par des modifications aux nombres impliqués. La quatrième approche pour résoudre $51 - 34$ énumérés ci-dessus est classée comme arrondie compensatoire. Cette approche nécessite que 1 soit ajouté au résultat partiel 16 pour compenser l'arrondissement initial de 51 à 50 avant de soustraire séquentiellement 30 et 4. Comme discuté précédemment, cette stratégie est conceptuellement similaire aux compensations finales qui peuvent être nécessaires pour dériver plus proche de l'estimations au cours de l'estimation de calcul. La capacité de compenser pendant l'estimation de calcul et le calcul mental est indicatif d'un sens du nombre bien développé (J. T. Sowder, 1992). Behr (1989) suggère qu'il existe deux aspects de ce qu'il appelle la variabilité :

a- une transformation de l'une des opérandes en combinaison avec une transformation compensatoire de la réponse, le cas décrit ci-dessus, et

b- les transformations compensatoires appliquées à chacun des opérandes avant qu'une réponse ne soit calculée.

Bien que l'analyse de Behr (1989) soit spécifiquement liée au sens du nombre et à l'estimation de calcul, J. T. Sowder (1992) suggère que la capacité de compenser les transformations numériques joue un rôle crucial dans le calcul mental.

3.3 Stratégies de calcul mental

La recherche qui a été entrepris se concentre principalement sur les stratégies mentales associées à déterminer les faits de base - opérations d'addition, soustraction, multiplication et division- avec des nombres de zéro à neuf. L'identification, l'analyse et la classification des stratégies de calcul mental au-delà des faits de base ont reçu peu d'attention (McIntosh, 1990a ; Vakali, 1985). Parmi les études qui ont été réalisées, analogues à celles associés à l'identification et à la classification des stratégies de base, la plupart ont mis l'accent sur l'addition et / ou la soustraction avec des nombres entiers (Beishuizen, 1985, 1993 ; T. J. Cooper,

A. M. Heirdsfield et Irons, 1996 ; Ginsburg *et al.*, 1981 ; Hamann et Ashcraft, 1985 ; Hitch, 1978 ; Murray et Olivier, 1989 ; Resnick, 1983 ; Resnick et Omanson, 1987 ; Vakali, 1985). La multiplication (Carraher *et al.*, 1985 ; J. A. Hope, 1985, 1987 ; J. A. Hope et Sherrill, 1987) et la division, en particulier, a reçu peu de considération. Quatre études ont considéré les quatre opérations (Carraher *et al.*, 1987 ; Carroll, 1996 ; McIntosh, 1991 ; B. J. Reys, 1986b). Dans certaines études (T. J. Cooper, Haralampou et Irons, 1992 ; Ginsburg *et al.*, 1981 ; Hamann et Ashcraft, 1985), des opérations avec des faits de base ont été incluses dans les exemples utilisés. Cependant, des distinctions claires entre les stratégies utilisées pour ceux-ci et les stratégies qui peuvent avoir été utilisées pour calculer mentalement avec les grands nombres n'ont pas toujours été clarifié (Ginsburg *et al.*, 1981 ; Hamann et Ashcraft, 1985).

En entreprenant des recherches pour identifier et classer les stratégies mentales, McIntosh (1990a) estime qu'il est très difficile d'échapper au besoin de jugements subjectifs de la part de l'intervieweur ou de l'analyseur des protocoles quant à l'interprétation de la description de l'activité mentale de l'enfant. En outre, de nombreux calculateurs mentaux professionnels gardaient les stratégies qu'elles utilisaient comme des secrets étroitement gardés. D'autres ont trouvé les difficultés à expliquer leurs techniques de calcul.

Une autre variable à prendre en considération lors de l'analyse de la recherche est la taille des nombres contenus dans les situations numériques. La majorité des études axées sur les opérations avec des nombres à un et deux chiffres. Ceux qui ont participé aux nombres à trois chiffres et au-delà sont généralement ceux dans lesquels les étudiants âgés ou les adultes formaient une partie ou la totalité des échantillons (Ginsburg *et al.*, 1981 ; Hitch, 1978, 1977 ; J. A. Hope, 1985 ; J. A. Hope et Sherrill, 1987).

3.3.1 Stratégies du calcul mental utilisées par des apprenants

Cette sous-section discute des résultats de la recherche concernant les types de stratégies de calculs que les enfants utilisent pour résoudre divers problèmes d'addition et de soustraction. Bien que la détermination de la nature des stratégies mentales utilisées par les enfants à Madagascar l'un des objectifs de la présente étude, il était important de revoir ces stratégies parce que l'étude comprenait un atelier de perfectionnement du personnel pour les enseignants du primaire, qui cherche à familiariser les enseignants avec les méthodes mentales pour enfants pour l'addition et soustraction de nombres entiers à deux chiffres. L'exploitation des diverses procédures mises en œuvre par les élèves pour un même calcul permet de mettre l'accent sur les raisonnements mobilisés et sur les propriétés des nombres et des opérations utilisées « en acte » (certains parlent d'ailleurs à ce sujet de calcul raisonné).

3.3.1.1 Les stratégies pour l'addition et la soustraction des nombres à un seul chiffre

La compréhension fondamentale des enfants de l'addition et de la soustraction évolue de leurs expériences de comptage précoce (Barrody et Standifer, 1993). Initialement, les enfants résolvent les problèmes d'addition en utilisant la stratégie appelée « compter tous ». Ceci, par exemple, implique à regrouper les deux nombres et utiliser des doigts ou des matériaux physiques (comme bâtonnet) pour compter tous les éléments en commençant par ceux du premier nombre et en terminant par les éléments du second (Barrody et Standifer, 1993 ; Carpenter et Moser, 1983 ; Hughes, 1986 ; Nunes et Bryant, 1996). Au fur et à mesure que les enfants acquièrent de l'expérience, ils commencent à utiliser une stratégie plus efficace appelée « comptage en avant ». En commençant par le total d'un nombre, généralement le plus grand, ils comptent sur ce nombre pour obtenir la somme des deux nombres (Barrody et Standifer, 1993 ; Nunes et Bryant, 1996). Selon Carpenter et Moser (1983), bien que l'utilisation par les enfants des stratégies ci-dessus persiste sur une longue période de temps, finalement, ils commencent à résoudre les problèmes d'addition en utilisant des combinaisons de chiffres plutôt que compter. Par exemple, pour trouver la valeur de $5 + 8$, les enfants trouveront d'abord la somme plus familière $5 + 5 = 10$, puis ajouter 3. En d'autres termes, ils compteront sur la récupération et l'utilisation de faits de nombres familiers pour effectuer l'addition.

Les enfants utilisent des stratégies similaires pour résoudre les problèmes de soustraction (Barrody, 1984 ; Barrody et Standifer, 1993 ; Carpenter et Moser, 1983). Supposons qu'ils reçoivent le problème suivant : « Vous avez huit bananes, et vous donnez trois des bananes à votre frère. Combien de bananes reste-t-il ? » Pour résoudre le problème, les jeunes enfants comptent sur un certain nombre de stratégies, y compris la séparation, le décompte et le dépouillement (Barrody et Standifer, 1993 ; Barrody, 1984 ; Carpenter et Moser, 1983). Comme Barrody (1984) souligne, la séparation implique à enlever du plus grand le nombre requis d'éléments, puis en comptant le reste pour trouver la réponse. Le compte à rebours est similaire à la séparation, en ce qu'il dépend aussi de la compréhension des enfants de la soustraction comme emportant. Cela implique « en commençant par le nombre initial, à compter à rebours un nombre de fois égal au montant enlevé, et annonçant le dernier nombre compté pour indiquer le montant restant » (Barrody et Standifer, 1993). Comme beaucoup d'enfants

trouvent plus difficile de compter en arrière que de compter en avant, si leur travail de soustraction commence à inclure des nombres de plus en plus grands, ils peuvent commencer à utiliser la stratégie de comptage (Barrody, 1984). Le décompte implique à commencer par le plus petit nombre (par exemple, dans le calcul $7 - 2 = ?$) et « compter jusqu'à ce que le plus grand nombre est atteint - tout en gardant la trace du nombre d'étapes dans le compte en avant » (Barrody et Standifer, 1993). Finalement, les enfants vont commencer à utiliser des combinaisons de chiffres plutôt que de compter dans la résolution des problèmes de soustraction, quelles combinaisons de numéros sont souvent basé sur l'addition plutôt que la soustraction.
Par exemple, pour expliquer pourquoi $15 - 8 = 7$, les enfants pourraient simplement dire qu'ils savaient que $8 + 7 = 15$ (Carpenter et Moser, 1983).

3.3.1.2 Stratégies pour l'addition et la soustraction des nombres à deux chiffres

Les méthodes informelles des enfants pour l'addition et la soustraction de nombres entiers à plusieurs chiffres sont étroitement liées à une extension des méthodes de comptage qu'ils utilisent pour ajouter et soustraire les nombres à un seul chiffre (Fuson *et al.*, 1997).
Il y a une multitude méthode d'addition et de soustraction à deux chiffres : en particulier, un même enfant peut utiliser une méthode différente pour résoudre le même problème à des moments différents et dans des circonstances différentes (Threlfall, 2000). Néanmoins, les chercheurs ont tenté de classer ces méthodes selon certains caractéristiques (Fuson *et al.*, 1997 ; Threlfall, 2002 ; Thompson, 1999 ; Suggate, 1995).

Fuson *et al.* (1997) identifient quatre types de méthodes informelles que les enfants utilisent pour résoudre des problèmes comportant les additions et soustractions des nombres entiers à deux chiffres, à savoir :

a- Commencer avec un nombre et monter ou descendre par des dizaines et des unités ;

b- Décomposer des dizaines et des unités et additionner ou soustraire séparément les dizaines et les unités ;

c- Changer les deux nombres en utilisant leurs décompositions additives ou soustractives ; et

d- Mélanger les stratégies ci-dessus.

Selon Fuson *et al.* (1997), en utilisant la première stratégie pour trouver la valeur de $17 + 48$, on implique de commencer par 17 et de compter en séquences de dizaines et d'unités (c'est-à-

dire $17, 27, 37, 47, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 63, 64, 65$) pour arriver à 65. La soustraction $65 - 32$ se ferait de façon similaire, mais en comptant à partir de 65 (c'est-à-dire $65, 55, 45, 35, 34, 33$) jusqu'à 33.
En utilisant la deuxième méthode, une façon d'obtenir la somme $17 + 48$ serait d'écrire $10 + 40 = 50$ et $7 + 8 = 15$, puis additionner les totaux, soit $50 + 15 = 65$. Changer les deux nombres implique une compensation. *Par exemple,* au lieu d'effectuer directement $17+48$, un enfant pourrait changer les chiffres à ceux qui sont plus pratiques, puis faire des ajustements pour compenser les modifications apportées. C'est-à-dire, $20 + 45 = 65$, en enlevant 3 et en ajoutant 3, il donne encore 65.

3.3.2 Stratégies pour l'addition et la soustraction mentale

Le calcul mental est un processus dans lequel le calcul numérique peut être fait rapidement et correctement sans l'aide de moyens externes, par exemple, des manipulateurs, le crayon et papier, etc, et être fait d'une manière réfléchie, en utilisant quelque stratégie (Maclellan, 2001). D'après la littérature internationale, le calcul mental tient une place importante dans l'enseignement et l'apprentissage de mathématiques. En particulier, il développe des compétences à résoudre des problèmes, fournit des occasions pour faire le calcul approché et contribue à la compréhension du concept de nombre (McIntosh, Nohda, Reys et Reys, 1995 ; Threlfall, 2002). De plus, il encourage des enfants à manipuler des nombres avec la facilité, c'est la fondation pour le développement de compétences calculatrices et il aide la compréhension et développement de méthodes écrites de calcul (Varol et Farran, 2007). Finalement, A. Heirdsfield et T. Cooper (2004) font remarquer que le calcul mental aide des enfants à comprendre les valeurs, les fonctionnements et les structures des nombres, aussi bien que les aider pour découvrir des stratégies pour résoudre des problème en développant des compétences pour la réalisation d'une hypothèse et les généralisations.

On sait que les calculs mentaux impliquent une grande gamme de stratégies, techniques traditionnelles de résolution des problèmes différents. Beaucoup littératures ont montré la variété de stratégies qu'utilisent les élèves lorsqu'ils effectuent des calculs mentaux pour l'addition et la soustraction des nombres à deux chiffres (Maclellan, 2001 ; Lucangeli, Tressoldi, Bendotti, Bonanomi et Siegel, 2003 ; Threlfall, 2002 ; Macintyre et Forrester, 2003 ; A. Heirdsfield et T. Cooper, 2004 ; A. Heirdsfield et Lamb, 2005) dont nous allons citer quelques-unes.

☞ **S_1 - Procédure de Séparation de dizaines et d'unités ou stratégie « 1010 »** :

Cette stratégie consiste à calculer d'abord la somme des dizaines puis celle des unités et enfin la somme totale des sommes partielles obtenues, ou bien la somme des unités d'abord puis la somme des dizaines (A. Heirdsfield et Lamb, 2005).
Par exemple, pour effectuer mentalement $73+21$, penser d'abord $70+20=90$, puis $3+1=4$, et on obtient enfin $90+4=94$.

Cette catégorie de stratégie inclut aussi la méthode de Varol et Farran (2007), appelée procédure « 10s », décrite comme suit : « pour additionner des nombres à deux chiffres, on ajoute l'unités du premier nombre à la somme des dizaines de deux nombres, puis l'unité du deuxième nombre à la somme obtenue précédente ».
Par exemple, pour effectuer mentalement $73+21$, penser d'abord $70+20=90$, puis $90+3=93$, et on obtient enfin $93+1=94$.

Tandis que pour la soustraction sans retenu de deux nombres à deux chiffres, l'unité du diminuteur est soustraite de la différence entre les dizaines des deux nombres, puis on ajoute l'unité du diminuende à la différence obtenue précédente.
Par exemple, pour effectuer mentalement $78-26$, on calcule d'abord $70-20=50$, puis $50-6=44$, et enfin $44+8=52$.
D'ailleurs, pour la soustraction avec retenu de deux nombres à deux chiffres, on ajoute d'abord l'unité du diminuende à la différence entre les dizaines des deux nombres, puis on soustrait l'unité du diminuteur à la somme obtenue précédente.
Par exemple, pour effectuer mentalement $84-67$, penser d'abord $80-60=20$, puis $20+4=24$, et enfin $24-7=17$.

☞ **S_2 - Stratégie de calcul basé sur le premier nombre, ou stratégie « N10 »** :
Pour additionner deux nombres à deux chiffres, on ajoute d'abord l'unité du diminuteur au diminuende, puis on ajoute la dizaine du diminuteur à la somme obtenue ou bien la dizaine d'abord puis l'unité (A. Heirdsfield et Lamb, 2005).
Par exemple, pour calculer mentalement $74+25$, penser d'abord $74+5=79$, puis $79+20=99$. Pour calculer mentalement $74+25$, on calcule d'abord $74+20=94$, puis $94+5=99$. De plus, on peut décomposer le diminuteur à ajouter d'une autre manière facile à manier. Par exemple : $74+25=(74+10+10)+5=79$.

Pour la soustraction de deux nombres à deux chiffres, on l'unité du deuxième terme est d'abord soustraite du diminuende, puis et la dizaine du diminuteur est soustrait de la dif-

férence obtenue. Cette stratégie de soustraction est appelée procédure « u-N10 », ou bien la dizaine d'abord, puis l'unité (A. Heirdsfield et Lamb, 2005).
Par exemple, pour calculer $78-26$, penser d'abord $78-6=72$, puis $72-20=52$. Pour calculer $78-26$, penser d'abord $78-20=58$, puis $58-6=52$. Ces stratégies « N10 » et « u-N10 » sont caractérisées comme des « stratégies d'agrégation » (A. Heirdsfield et Lamb, 2005).

☞ **S_3 L'algorithme mental traditionnel** :
C'est une assimilation mentale de l'algorithme traditionnel du calcul écrit, exécutant mentalement suivre l'algorithme de l'addition verticale ou soustraction.
Par exemple, pour calculer $54+25$, penser $5+4=9$, $5+2=7$ et la somme est donc 79.

☞ **S_4 Recherche des nombres compatibles** :
Les nombres compatibles sont parfois appelés « nombres amicaux » ou « nombres amiables » dans d'autres ressources professionnelles. Cette stratégie d'addition suppose de rechercher des paires de nombres qui s'associent pour donner une somme qui sera facile à manier comme les multiples des dix. Voici des exemples de nombres compatibles courants : 2 et 8 ; 70 et 30 ; 75 et 25 ; 300 et 700.
Exemples : Pour $3+8+7+6+2$, penser : « 3 et 7 font 10, 8 et 2 font 10, donc 10 et 10 et 6 font 26. »
Pour $24+47+76$, penser : « 24 et 76 font 100, donc 100 plus 47 font 147. »

☞ **S_5 Compensation** :
Pour faire l'addition ou la soustraction plus facile, cette stratégie suppose de remplacer un nombre d'une somme par la dizaine ou la centaine voisine (ou le multiple de dix la plus proche), d'effectuer l'addition ou la soustraction en utilisant cette dizaine ou cette centaine, puis d'ajuster la réponse pour compenser le changement d'origine.
Exemple : Pour calculer $42+39$, penser : $42+40-1$, donc $42+40=82$ puis $82-1=81$.

☞ **S_6 - Complément du diminuteur** : Dans cette stratégie de la soustraction, l'élève augmente les unités du diminuteur jusqu'à ce qu'il arrive au diminuende. Le nombre qui représente l'augmentation est la réponse correcte. Cette stratégie est divisée en deux catégories. D'une part, lorsque le diminuteur est peu distant du diminuende, l'élève ajoute les unités un par un (ou tout ensemble) au diminuteur jusqu'à ce qu'il arrive au diminuende. D'autre part, lorsque le diminuteur est d'une plus grande distance du diminuende, alors la réponse est trouvée par phases (créer les dizaines en premier, etc.).

Par exemple, pour calculer $73 - 36$, penser « $36 + 4 = 40$, $40 + 30 = 70$, $70 + 3 = 73$, et $4 + 30 + 3 = 37$ ».

3.3.3 Stratégies de la multiplication et la division mentale

Beaucoup littératures ont montré la multitude de stratégies qu'utilisent les élèves lorsqu'ils effectuent des calculs mentaux pour la multiplication et la division dont nous allons citer quelques-unes. Ces stratégies sont souvent basées sur *la décomposition, l'associativité et la distributivité*, comme les stratégies S_7, S_8, S_9 et S_{10} suivantes.

☞ **$\mathbf{S}_7$ - Décomposition multiplicative de l'un des facteurs et l'associativité**

Exemple :

$12 \times 25 = (3 \times 4) \times 25 = 3 \times (4 \times 25)$

$12 \times 25 = 12 \times (100 \div 4) = (12 \div 4) \times 100$

☞ **$\mathbf{S}_8$ - Décomposition multiplicative des deux facteurs et l'associativité**

Exemple :

$12 \times 25 = (3 \times 4) \times (5 \times 5) = 3 \times (4 \times 5) \times 5 = 3 \times (20 \times 5)$

☞ **$\mathbf{S}_9$ - Décomposition additive de l'un des deux facteurs et la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition**

Exemple :

$12 \times 25 = (10 + 2) \times 25 = 10 \times 25 + 2 \times 25$

$12 \times 25 = 12 \times (20 + 5) = 12 \times 20 + 12 \times 5$

☞ **$\mathbf{S}_{10}$ - Décomposition additive des deux facteurs et la double distributivité de la multiplication par rapport à l'addition**

Exemple : $12 \times 25 = (10 + 2) \times (20 + 5) = 10 \times 20 + 2 \times 20 + 10 \times 5 + 2 \times 5$

☞ **$\mathbf{S}_{11}$ - Compensation**

Cette stratégie de multiplication consiste à remplacer l'un des facteurs par la dizaine, la centaine ou le millier, à effectuer la multiplication, puis à ajuster la réponse pour compenser le changement d'origine. Cette stratégie peut être employée si l'un des facteurs est proche de la dizaine, de la centaine ou du millier.

Exemples

a) Pour 6×39, penser : « 6 groupes de 40 font 240. 6 groupes de 39 seraient 6 de moins ; par conséquent $240 - 6 = 234$ ».

b) Pour 7×198, penser : « 7 fois 200 font 1 400, mais c'est 14 de plus en raison des 2 ajouts dans chacun des 7 groupes ; par conséquent $1400 - 14$ font 1368 ».
c) Pour $6 \times 4,98$, penser : « 7 fois 5 font 30, mais je dois soustraire 6 fois 2 cents, en conséquence $30 - 0,12$ font $29,88$ ».

☞ **S$_{12}$ - Recherche de facteurs compatibles (associativité)**
Cette stratégie de multiplication consiste à rechercher des paires de facteurs dont le produit sera facile à manier ; il s'agit habituellement de multiples de dix, comme 10, 20, 50, 100, 200 et ainsi de suite. On doit prévenir les élèves du risque d'omettre un des facteurs lorsque ceux-ci sont redisposés et combinés.
Exemples :
a) Pour $2 \times 12 \times 5$, penser : « 2 fois 5 font 10, et 10 fois 12 font 120 ».
b) Pour $20 \times 7 \times 5$, penser : « 20 fois 5 font 100, et 100 fois 7 font 700 ».
c) Pour $25 \times 63 \times 4$, penser : « 4 fois 25 font 100, et 100 fois 63 font 6 300 ».
d) Pour $2 \times 78 \times 500$, penser : « 2 fois 500 font 1 000, et 1 000 fois 78 font 78 000 ».
e) Pour $5 \times 450 \times 2$, penser : « 2 fois 5 font 10, et 10 fois 450 font 4 500 ».

☞ **S$_{13}$ - Division et multiplication par deux**
Cette stratégie consiste à diviser l'un de facteurs par deux et à multiplier l'autre par deux afin d'obtenir deux nouveaux facteurs plus faciles à calculer. Pour la division et la multiplication par deux, les élèves pourraient devoir consigner certaines étapes intermédiaires.
Exemples :
a) Pour 42×50, penser : « La moitié de 42 est 21 et le double de 50 est 100 ; 21×100 font 2100 ».
b) Pour 500×88, penser : « Multiplier 500 par 2 pour obtenir 1000 et diviser 88 par deux pour obtenir 44 ; en conséquence, 1000 fois 44 font 44000 ».
c) Pour $12 \times 2,5$, penser : « La moitié de 12 est 6 et le double de $2,5$ est 5 ; 6×5 font 30 ».
d) Pour $4,5 \times 2,2$, penser : « Multiplier $4,5$ par 2 pour obtenir 9 et diviser $2,2$ par deux pour obtenir 1,1 ; en conséquence, 9 fois $1,1$ font $9,9$ ».
e) Pour 140×35, penser : « La moitié de 140 est 70 et le double de 35 est 70 ; en conséquence 70×70 font 4900 ».

☞ **S$_{14}$ - Utilisation des faits de multiplication pour les dizaines, les centaines et les milliers**
Cette stratégie s'applique aux dividendes dans les dizaines, les centaines et les milliers qui

sont divisés par des diviseurs à un chiffre. Les quotients n'auraient qu'un seul chiffre différent de zéro.
Exemples :
a) Pour $60 \div 3$, penser : « $6 \div 3$ font 2 et les dizaines divisées par les unités donnent des dizaines ; donc, la réponse est 2 dizaines ou 20 ».
b) Pour $12000 \div 4$, penser : « $12 \div 4$ font 3, et les milliers divisés par des unités donnent des milliers, donc la réponse est 3 milliers ou 3 000 ».
c) Pour $4800 \div 8$, penser : « $48 \div 8$ font 6 et les centaines divisées par les unités donnent des centaines ; donc, la réponse est 6 centaines ou 600 ».

☞ **S$_{15}$ - Séparation du dividende (distributivité)**
Cette stratégie consiste à séparer le dividende en deux parties plus facilement divisibles par un diviseur donné. Les élèves doivent rechercher une dizaine, une centaine ou un millier qui soit un multiple facile à manier du diviseur et qui soit proche du dividende donné, tout y en étant inférieur. La plupart des élèves devront consigner les étapes intermédiaires de calcul à l'aide de cette stratégie.
Exemples :
a) Pour $372 \div 6$, penser : « $(360 + 12) \div 6$, donc $60 + 2$ font 62 ».
b) Pour $3150 \div 5$, penser : « $(3000 + 150) \div 5$, donc $600 + 30$ font 630 ».

3.3.4 Stratégies d'estimation de calcul

L'estimation de calcul renvoie à l'emploi de stratégies permettant d'obtenir des réponses approximatives en faisant du calcul mental. Plusieurs stratégies clées obtenues à partir d'entretiens approfondis avec de bons estimateurs sont discutés dans l'article de R. E. Reys (1984) et dans des manuels scolaires de mathématiques mentales.

☞ **S$_{16}$ - Estimation par la gauche ajustée**
Cette stratégie commence par une estimation par la gauche suivie d'un ajustement qui tient compte de tout ou partie des autres valeurs de position. Elle permet d'obtenir une estimation plus précise.
Par exemple, pour estimer $4219 + 7516 + 2342$, penser : « $4000 + 7000 + 2000 = 13000$, mais l'apprenant peux ajuster ce résultat en pensant $200 + 500 + 300 = 1000$, ce qui me donne une estimation ajustée de $13000 + 1000 = 14000$ ».

L'avantage de la stratégie d'estimation par la gauche ajustée par rapport à l'approche traditionnelle d'arrondissement est que tous les nombres à opérer sont visibles dans le problème d'origine. Même les jeunes apprenants peuvent arriver rapidement et facilement à une estimation. Ce sentiment de succès est important. La technique est aussi parfaitement appropriée pour les étudiants plus âgés et les adultes à utiliser et peut être appliqué à d'autres nombres, tels que les nombres rationnels et les décimales.

☞ **S_{17} - Arrondissements**

C'est une technique la plus familière. Arrondir est une stratégie particulièrement puissante pour la multiplication de nombres à plusieurs chiffres. C'est important pour les apprenants de voir que dans l'arrondissement, ils changent en fait un problème à un autre plus facile à calculer. Les apprenants devraient aussi se rendre compte qu'ils peuvent utiliser plusieurs procédures différentes d'arrondis pour un seul problème, et ils peuvent décider quelles procédures sont utilisées.

Par exemples, pour calculer 95×41, les procédures 90×40, 100×40 et 100×41 sont trois façons d'arrondir ce problème pour le rendre plus simple à résoudre mentalement. Comme les apprenants acquièrent de l'expérience en estimation et développent plus de sophistiqué avec les nombres, ils peuvent même arrondir à d'autres valeurs compatibles qu'ils trouvent faciles à manipuler.

L'arrondissement nécessite un niveau d'abstraction que l'estimation initiale. C'est un processus en deux étapes : les nombres doivent être d'abord arrondis à des valeurs bien choisies, puis les nombres arrondis sont utilisés pour calculer mentalement l'estimation. L'apprenant devrait comprendre clairement que le but de l'arrondissement est de produire mentalement l'opération avec des arrondis gérables.

☞ **S_{18} - Stratégie de nombre quasi-compatible**

Cette stratégie est similaire à la méthode d'arrondissement précédente, mais elle est un peu plus sophistiquée.

Dans le problème $5297 \div 6$, l'arrondi du dividende à 5300 (la centaine la plus proche) ou 5000 (le millier le plus proche) n'aide pas beaucoup, mais en arrondissant à 5400 (un nombre quasi-compatible, puisqu'il est divisible par 6) aide énormément. La recherche d'un nombre compatible est particulièrement une stratégie efficace lors de l'estimation du quotient dans un problème de division. Les apprenants apprennent à considérer changer un ou deux nombres dans un problème de division, et le dividende arrondi est régulièrement divisible par le diviseur. Avant d'appliquer cette méthode au problème de division, l'apprenant doit connaître les caractéristiques de divisibilité.

Cette stratégie de nombre quasi-compatible peut également être utilisée pour les problèmes d'addition à plusieurs termes comme dans l'exemple suivant : La stratégie consiste à

$$\begin{array}{r} 3,25 \\ +14,32 \\ +5,75 \\ +6,67 \\ ----\end{array} \qquad \begin{array}{l} 10 \\ \\ 20 \end{array}$$

rechercher des combinaisons de nombres qui ajoutent au même nombre ou numéros faciles à calculer. Dans ce cas, des paires de chiffres qui correspondent ensemble pour faire dix ou multiples de dix ont été identifié. Ce choix de nombres rend facile le calcul mental. Cette stratégie encourage les étudiants à changer un problème pour le rendre plus gérable en cherchant des chiffres qui s'emboîtent d'une manière plus faciles à calculer mentalement.

☞ **S_{19} - Stratégie de Moyenne**

La moyenne est utile en outre des problèmes de somme de nombres se regroupant autour d'une valeur commune. Pour obtenir une estimation, les étudiants choisissent d'abord une moyenne de groupe de nombre, puis le multiplient par le nombre de valeurs dans le groupe. Dans le problème suivant, $7,51 + 6,59 + 7,36 + 6,27 + 7,79 + 6,32$, la moyenne autour de ces valeurs est 7 et, en multipliant par 6 (puisqu'il y a six valeurs dans le groupe), l'estimation obtenue est 18. Bien que cette méthode soit une stratégie spécifique d'un problème, il est encore très utile dans beaucoup problèmes. L'intérêt particulier de cette stratégie est qu'il élimine la tabulation mentale d'une longue liste de chiffres frontaux ou arrondis, créant à la place un problème avec moins de chiffres qui sont faciles à calculer.

3.3.5 Stratégies schématisées

Les stratégies schématisées nécessitent un support écrit intermédiaire pour schématiser l'algorithme utilisé et écrire des résultats intermédiaires et le résultat final. Nous proposons, au chapitre 4, les stratégies de « schématisation de la multiplication mentale » de deux facteurs selon la technique schématique basée sur une référence utilise les rectangles et les ellipses reliés par des flèches.

Des stratégies schématisées sont aussi données à l'Annexe.

3.4 Conclusion

Les stratégies de calcul mental sont les composantes de base de calcul mental et il y a une multitude de stratégies de calcul mental. L'exploitation des diverses procédures mises en œuvre par les élèves pour un même calcul permet de mettre l'accent sur les raisonnements mobilisés et sur les propriétés des nombres et des opérations utilisées « en acte » (certains parlent d'ailleurs à ce sujet de « calcul raisonné »). Des stratégies explicites doivent être introduites, pratiquées, étendues, et affinées tout au long des classes à partir de la classe 9ème. Seulement quand une variété de différentes stratégies a été acquise, nous pouvons s'attendre à ce que les étudiants puissent choisir, puis utiliser les méthodes appropriées de manière efficace. De telles améliorations peuvent survenir seulement si les techniques de calcul mental sont soigneusement et systématiquement enseignés tout au long d'un programme de mathématiques.

Deuxième partie

Enseignement-apprentissage du calcul mental

Chapitre 4

Analyse d'enseignement-apprentissage du calcul mental à Madagascar

4.1 Introduction

Le calcul est omniprésent dans l'enseignement-apprentissage de mathématiques : il en est une composante essentielle à tous les niveaux, inséparable des raisonnements qui le guident de ceux qu'il outille. À l'école primaire, les premiers contacts avec le monde du calcul ont un rôle clef à jouer dans ce renforcement, à travers des activités de calcul mental, à travers le développement de moyens de contrôle efficaces du calcul écrit et instrumenté, à travers la rencontre de situations suffisamment complexes pour nécessiter le développement de stratégies de calcul. Justement, le calcul mental est une compétence utile, parce qu'il permet d'avancer avec moins de freins dans le traitement des situations impliquant des nombres et dans la résolution de problèmes (Butlen, 2007).

Outre le calcul mental, l'arithmétique définie comme « science des nombres » est la pierre angulaire de l'enseignement de mathématique. En effet, le fait que l'arithmétique possède un cadre théorique qui permet de mettre en liens les propriétés des nombres, c'est l'art de calculer, ce qui renvoie à la capacité d'effectuer des calculs et elle a pour but de développer des habiletés de calcul, sans être nécessairement attaché à un contexte. Par conséquent, l'arithmétique est un champs d'application de base du calcul mental. Comme il s'agit d'un « art » et la « science des nombres », la construction d'un concept comme celui de nombre s'avère utile. D'ailleurs, les aspects langagiers ne sont pas les seuls qui participent de cette construction, mais ils sont importants dans l'enseignement de mathématique et ce, dans l'enseignement-apprentissage du calcul mental. Cependant, en dehors du langage, pour son élaboration, un concept nécessite d'autres composants comme les différentes situations qui lui donnent du sens. De ce fait, quelle est la place du calcul mental et celle de l'arithmétique dans l'enseignement mathématique à Madagascar, aussi bien du côté institutionnel que du côté enseignant ?

Pour répondre à cette question, nous allons analyser, dans la section 4.2, les programmes scolaires de mathématiques à Madagascar notamment les objectifs spécifiques liés particulièrement au calcul mental dans trois institutions scolaires malgaches, précisément le primaire, le collège et le lycée d'enseignement général. La description de lien entre le langage d'expression et le langage mathématique est aborder dans la section 4.3, puis la place de l'enseignement de l'arithmétique dans lesdites trois institutions scolaires dans la section 4.4. Rappelons qu'un calcul mental peut être effectué à partir d'un support ou non (le calcul à faire peut être lu ou entendu), et produit sur un support écrit ou non (le résultat peut être écrit ou dit). Aussi, dans la section 4.5, nous présenterons le calcul mental dans le primaire et, dans la section 4.6, le calcul mental dans le secondaire en décrivant les astuces des calculs mentaux et en introduisant la schématisation de la multiplication mentale à référence. Et enfin, nous conclurons, dans la section 4.7, notre analyse de l'enseignement-apprentissage du calcul mental en apportant une discussion à celui-ci.

4.2 Tour d'horizon des objectifs dans les programmes mathématiques

Par définition, un programme est un ensemble structuré qui contient :

- d'une part, la politique éducative à suivre, ce qui se traduit essentiellement par, l'énoncé des finalités, des objectifs institutionnels et des bénéficiaires de l'éducation,
- d'autre part, la liste des objectifs, des contenus, des méthodes, des moyens d'évaluation et des ressources (techniques, matériels, gestion du temps et de l'espace,...).

« On a compris qu'un programme ne vaut que par la manière dont il est appliqué ; que s'il est appliqué à contresens ou avec une résignation passive, ou il tournera contre son but ou il restera lettre morte. Il faut que les maîtres chargés d'en faire une réalité le veuillent, s'y intéressent ; c'est à condition de le vivre qu'ils le feront vivre. Ce n'est donc pas assez de leur prescrire avec précision ce qu'ils auront à faire, il faut qu'ils soient en état de juger, d'apprécier ces prescriptions, de voir leur raison d'être, les besoins auxquels elles répondent. Il faut, en un mot, qu'ils soient au courant des questions auxquelles ces prescriptions apportent des solutions provisoires ; c'est dire qu'il est indispensable de les initier aux grands problèmes que soulève l'enseignement dont ils ont la charge, à la manière dont on se propose de les résoudre, afin qu'ils puissent se faire une opinion en connaissance de cause » (Durkheim, 1938). L'étude des programmes ne consiste ni en l'analyse de techniques ni en des processus permettant de les acquérir. Nous nous intéressons à une identification des intentions institutionnelles par rapport à l'enseignement des mathématiques, notamment, le calcul mental dans les programmes scolaires malgache.

Outre le *Préscolaire*, les trois institutions scolaires (*Primaire, Collège et Lycée*) de l'enseignement malgache se répartissent comme suit : en sept années de *Primaire* dénommées chronologiquement 11ème, 10ème, 9ème, 8ème, et 7ème, sanctionné au diplôme CEPE ; puis en quatre années de *Collège* dénommées chronologiquement 6ème, 5ème, 4ème, et 3ème, sanctionné au diplôme BEPC et enfin en trois années de *Lycée* (seconde, première et terminale) menant quant à lui au diplôme Baccalauréat. Quant à l'organisation d'évaluation, il existe différents niveaux d'application et de mise en uvre des programmes. Sous la tutelle du Ministère de l'Education Nationale (MEN), la DREN (Direction Régionale de l'Education Nationale), et CISCO (Circonscriptions Scolaires) assurent entre autres le suivi de l'application des contenus des programmes dans les examens officiels. Pour le Primaire et le Collège, les programmes de mathématiques en vigueur sont des programmes élaborés et comptés à partir de l'année scolaire 2015-2016. Ce nouveau programme n'a aucun changement en contenu, particulièrement en mathématiques, par rapport aux ancien programmes comptés à partir de l'année scolaire 1996-1997 pour les classes de 11ème et 6ème, à partir de l'année scolaire 1997-1998 pour les classes de 10ème et 5ème, à partir de l'année scolaire 1998-1999 pour les classes de 9ème et 4ème, à partir de l'année scolaire 1999-2000 pour les classes de 8ème et 3ème et à partir de l'année scolaire 2000-2001 pour les classes de 7ème, en abandonnant l'approche pédagogique APC pour appliquer le PPO . Tandis que pour le Lycée, les programmes en vigueur restent encore conservés, c'est-à-dire : ceux comptés à partir de l'année scolaire 1996-1997 pour la classe de 2nde, 1997-1998 pour la classe de 1ère et 1998-1999 pour la classe de Terminale, malgré la décision du MEN en vue de modifier ces programmes au Lycée suivant le PSE (Plan Sectoriel de l'Education) à partir de l'année scolaire prochaine 2018-2019.

A cet effet, le focus de notre travail dans ce chapitre se centre sur l'analyse critique de l'enseignement-apprentissage du calcul mental à Madagascar, en s'appuyant sur l'analyse des programmes officiels, en particulier sur les objectifs spécifiques liés au calcul mental.

4.2.1 Les objectifs spécifiques en lien avec le calcul de mental au Primaire

Cette analyse des objectifs de programmes de mathématiques au primaire n'est pas exhaustive : elle ne concerne que des objectifs recouvrant le calcul mental ; en effet celui-ci répond en partie à nos attentes et objectifs en relation avec le calcul mental et son environnement. Pour ce faire, avant d'entrer dans le détail, rappelons d'abord les objectifs généraux des mathématiques et ceux en primaire, tout en restant dans les programmes officiels. Les mathématiques doivent amener l'élève à :

– développer des habiletés intellectuelles et psychomotrices ;
– acquérir les concepts fondamentaux dans les domaines de la numération, de la géométrie et de la mesure ;
– maîtriser les stratégies et les automatismes de calcul ;
– acquérir une bonne méthodologie dans la recherche des solutions à des exercices ou problèmes ;
– s'efforcer de prouver et contrôler les résultats obtenus ;
– développer les qualités de l'expression écrite et orale (clarté du raisonnement, soin apporté à la présentation et à la rédaction) ;
– acquérir une formation scientifique lui permettant de poursuivre des études et/ou de s'intégrer dans la vie active et professionnelle.

À l'école primaire la matière mathématique est dénommé le *Calcul* et les objectifs de l'enseignement de ce *Calcul* au primaire sont de rendre l'élève être capable de (d') :

– maîtriser les nombres et techniques opératoires de base y afférents : il additionne, soustrait, multiplie et divise en utilisant les stratégies acquises ;
– utiliser les connaissances acquises dans le domaine de la géométrie pour reconnaître dans le milieu où il vit les différentes formes essentielles ;
– maîtriser les relations entre les multiples et les sous- multiples des principales mesures de longueur, de capacité, de masse, d'aire et de temps ;
– intégrer les notions de calcul pour les réinvestir à chaque fois que les circonstances les exigent.

A la fin de la classe de 11$^{\text{ème}}$, l'élève doit être capable de (d') :

– représenter correctement à l'aide d'une manipulation concrète des nombres jusqu'à 100 et les caractéristiques de ces nombres ;
– appliquer les techniques et les stratégies d'addition et de soustraction ;
– utiliser les monnaies dans l'échange ;

- mesurer de façon simple une longueur ;
- construire et résoudre des problèmes simples relatifs à l'âge et à l'environnement des élèves

A la fin de la classe de 10ème, l'élève doit être capable de (d') :

- représenter correctement des nombres jusqu'à 10000 et les caractéristiques de ces nombres ;
- appliquer les techniques et les processus de l'addition et de la soustraction ;
- maîtriser les tables de multiplication et les relations entre eux qu'on doit appliquer à l'opération de multiplication et de division ;
- connaître la valeur de l'argent utilisé, convertir « Ariary » en FMG et appliquer ceci dans l'échange et le budget familial ;
- mesurer une longueur en utilisant m, dm et cm ;
- estimer visuellement une longueur, une masse et une capacité ;
- peser à l'aide d'une balance en utilisant les masses marquées 1kg, 2kg et 1/2kg ;

A la fin de la classe de 9ème, l'élève doit être capable de (d') :

- lire, écrire et comparer les nombres naturels jusqu'à cent mille ;
- lire, écrire des nombres décimaux et des fractions simples ;
- établir la relation entre les nombres décimaux et des fractions simples ;
- maîtriser les techniques des quatre opérations et les appliquer pour résoudre des problèmes de son niveau et de son milieu ;
- reproduire, décrire et construire quelques figures géométriques simples ;
- découvrir l'aire du rectangle, du carré et du triangle rectangle par quadrillage en cm^2 ;
- reproduire et confectionner le cube et le parallélépipède tout en calculant les différentes surfaces afférentes ;
- connaître les différentes masures usuelles ainsi que les unités conventionnelles ;
- utiliser la connaissance de la monnaie dans le contexte d'échange et de budget familial ;
- appliquer la connaissance des propriétés des nombres et des stratégies de calcul pour effectuer le calcul mental.

A la fin de la classe de 8ème, l'élève doit être capable de (d') :

- lire, écrire et comparer les nombres naturels jusqu'à un milliard ;
- effectuer les quatre opérations pour résoudre un problème simple ;
- utiliser les nombres fractionnaires, décimaux et sexagésimaux dans la résolution des problèmes usuels ;
- utiliser les différentes mesures usuelles ainsi que les unités conventionnelles pour ré-

soudre des problèmes simples de la vie quotidienne ;
- intégrer les notions d'échanges, de partages, de budget familial dans la résolution de problèmes dans la vie quotidienne ;
- reproduire, décrire et construire des figures géométriques planes et tridimensionnelles simples ;
- découvrir l'aire du losange, parallélogramme, trapèze et disque ;
- calculer le volume et les surfaces des figures tridimensionnelles telles que : cube, parallélépipède rectangle ;
- appliquer la connaissance des propriétés des nombres et des stratégies de calcul pour effectuer le calcul mental.

A la fin de la classe de 7$^{\text{ème}}$, l'élève doit être capable de (d') :
- lire et écrire des nombres entiers d'au plus douze chiffres, des nombres décimaux, fractionnaires, sexagésimaux ;
- résoudre un problème de comparaison et d'encadrement de nombres ;
- maîtriser les techniques d'opérations sur les nombres décimaux, fractionnaires et sexagésimaux ;
- décrire, identifier et reproduire des figures planes et des objets tridimensionnels courants ;
- résoudre des problèmes concrets liés au mesure de longueur, d'aire et de volume ;
- utiliser des propriétés de nombres pour effectuer des calculs mentaux ;
- utiliser les formules élémentaires de base relatives au budget familial, au placement d'argent et aux échanges commerciaux
- résoudre des problèmes de partage.

4.2.2 Les objectifs spécifiques en lien avec le calcul de mental au Collège

L'analyse des objectifs de l'enseignement de Mathématiques du secondaire (Collège et Lycée) et le profil que l'élève malgache devra avoir à la sortie du premier cycle et du second cycle de l'enseignement secondaire ne sont pas exhaustifs ; en effet celui-ci répond en partie à nos attentes et objectifs en relation avec le calcul mental et son environnement.

En classe de 6$^{\text{ème}}$, les capacités attendues en lien avec le calcul mental sont :
- la connaissance et l'utilisation des quelques notions mathématiques de base ;
- l'utilisation des vocabulaires, du langage et des notations usuels ;
- le raisonnement déductif sur des exercices simples par l'utilisation de définitions et de

propriétés ;
- l'autonomie face à une situation de calcul.

En classe de 5$^{\text{ème}}$, le programme de Mathématiques doit surtout viser à consolider les connaissances acquises en classe de 6$^{\text{ème}}$ et qui sont complétées et enrichies par des apports nouveaux. Aussi, la capacité attendue utilisant le calcul mental est la maitrise des acquis de la classe de 6$^{\text{ème}}$, notamment sur les notions mathématiques de base, le vocabulaire, le langage et les notations usuels et les calculs numériques afin que les apprenants puissent investir ces acquis dans des situations variées au travers de problèmes dont la résolution leur donne de sens :
- d'améliorer la performance en raisonnement déductif par l'utilisation de définitions et/ ou de nouvelles propriétés ;
- de maîtriser les techniques de calcul sur les nombres décimaux relatif set sur les fractions.

Pour la classe de 4$^{\text{ème}}$, le programme de Mathématiques vise à compléter et enrichir les connaissances acquises dans les classes antérieures de telle sorte que les capacités attendues en lien avec le calcul mental sont :
- la maitrise des calculs pratiques sur des nombres rationnels et sur des nombres décimaux relatifs de la forme $a.10^n$ ($n \in \mathbb{Z}$), des nombres entiers ou fractionnaires (utilisation du PPCM et du PGCD), ainsi que sur des expressions algébriques (utilisant éventuellement des produits remarquables) ;
- la résolution dans $\mathbb{Q}$ des équations et inéquations du premier degré à une inconnue ainsi que des problèmes courants s'y ramenant ;
- la résolution des problèmes relevant des situations de proportionnalité ou de suite de nombres proportionnels ;
- la mise en œuvre les premières techniques et méthodes pour l'étude de données statistiques.

Et enfin pour la classe de 3$^{\text{ème}}$, le programme de Mathématiques vise à compléter et enrichir les connaissances acquises dans les classes antérieures et à donner à un certain niveau de maîtrise des notions étudiées au premier cycle de l'enseignement secondaire. Ainsi, les capacités attendues en lien avec le calcul mental sont :
- la maitrise des calculs vectoriels et des calculs analytiques dans le plan :
- la maitrise des calculs algébriques d'une manière performante, à savoir :
  - ⋆ les résolutions d'équations, d'inéquations et de systèmes du premier degré ;
  - ⋆ les calculs sur les polynômes (développement, factorisation, valeur numérique) et sur

les fractions rationnelles (ensemble de définition, simplification, valeur numérique) ;

⋆ la mise en œuvre des propriétés élémentaires des nombres réels et celles des inégalités dans $\mathbb{R}$.

Ces objectifs sont conçus afin qu'à la sortie du Collège, l'apprenant doit être capable de (d') :

- mettre en équation des problèmes simples de la vie courante ;
- résoudre problèmes qui font intervenir des équations ou des inéquations du premier degré à une ou deux inconnues réelles ;
- utiliser des propriétés et des règles de priorité des opérations pour effectuer des calculs et pour comparer des nombres réels ;
- présenter des données statistiques sous forme de tableaux et sous forme de graphique, et en calculer la moyenne ;
- construire toutes les figures géométriques de base ;
- utiliser des propriétés de configurations géométriques de base et celles des transformations (translation, homothétie, symétrie orthogonale, symétrie centrale) pour justifier des propriétés de figures simples ;
- utiliser les vecteurs du plan et les opérations sur ces vecteurs pour interpréter et démontrer des propriétés géométriques usuelles ;
- décrire et représenter des objets de formes géométriques usuelles (du plan et de l'espace) préciser leurs propriétés et calculer des grandeurs qui leur sont attachées (longueur, aire, volume) ;
- construire un patron d'un solide usuel afin de réaliser ce solide ;
- faire de calculs analytiques dans le plan pour des problèmes de distance, de parallélisme et d'orthogonalité.

4.2.3 Les objectifs spécifiques en lien avec le calcul de mental au Lycée

Au lycée (de la classe 2^{nde} à la classe Terminale), comme il n'y a plus d'enseignement direct du calcul mental et de l'Arithmétique, à l'exception de TC (classe de Terminale scientifique série C), nous répartissons les objectifs attendus suivant les sous-disciplines telles que l'Algèbre, l'Analyse, la Géométrie, la Probabilité, la Statistique et l'Arithmétique (uniquement pour TC). Ainsi, pour l'enseignement de l'Algèbre, les objectifs attendus de l'élèves sont :

- la resolution des problèmes qui font intervenir des équations et inéquations du premier ou du second degré à une inconnue ou des systèmes d'équations linéaires dans $\mathbb{R}^2$;
- la mise en œuvre des diverses méthodes de résolution de systèmes d'équations linéaires

dans $\mathbb{R}^3$ en vue de leurs applications à des problèmes de la vie courante ;
- la maîtriser des techniques de calculs sur les nombres complexes ainsi que leur utilisation en géométrie plane ;

Pour l'enseignement de l'Analyse, ce sont :
- l'étude et la représentation graphiquement : une fonction polynôme, une fonction homographique, une fonction rationnelle, une fonction simple associée aux fonctions logarithme et/ ou exponentielle népériens ;
- la résolution des divers problèmes d'Analyse en mettant en uvre les techniques et numériques et au calcul d'intégrales.

Tandis que l'enseignement de la Géométrie, les objectifs attendus de l'élèves sont :
- la connaissance et l'utilisation des relations entre points et vecteurs, une origine étant choisie, entre le parallélogramme, la translation, l'égalité et l'addition de vecteurs ; entre l'opposé d'un vecteur et la symétrie centrale, entre le théorème de Thalès, l'homothétie et la multiplication d'un vecteur par un scalaire ;
- la maîtrise de la notion de trigonométrie dans le triangle rectangle et l'usage du cercle trigonométrique ainsi que celui de la table trigonométrique ;
- l'étude et l'utilisation de manière performante des transformations, des calculs vectoriel et analytique, des nombres complexes, des propriétés de configurations et à la résolution de problèmes ;
- l'étude d'une conique (spécialement pour TC).

Et pour l'enseignement de la Probabilité, les objectifs attendus de l'élèves sont :
- le réinvestissement des connaissances acquises en dénombrement dans des calculs de probabilités ;
- la résolution des problèmes concrets utilisant les notons de variables aléatoires et d'indépendance d'événements ;

La mise en œuvre des propriétés élémentaires de nombres entiers pour la résolution des problèmes d'arithmétiques n'est faite qu'à la classe TC qui n'étudie non plus une série statistique à une variable et à deux variables.

Ces objectifs sont conçus de telle sorte qu'à la sortie du Lycée, l'élève doit être capable de (d') :
- maîtriser et appliquer les connaissances antérieurement acquises
- faire appel à l'intuition, à l'esprit d'analyse et de synthèse,
- maîtriser la capacité à mettre en uvre le raisonnement déductif ainsi que les autres types

de raisonnement ;
- faire des raisonnements rigoureux ;
- avoir une attitude scientifique face à un problème

4.3 Les langages d'expression et le langage mathématique

4.3.1 Le langage mathématique

Le langage mathématique est une expression couramment employée par les mathématiciens pour désigner l'ensemble des termes propres aux mathématiques. Apprendre les mathématiques, c'est entre autres apprendre une langue, comme l'arabe ou le russe. Il n'est donc pas surprenant que nombre de difficultés qu'éprouvent les élèves dans leurs cours de mathématiques sont, en fait, de nature langagière. Beaucoup d'entre eux se méprennent sur le sens de certains termes, décodent mal des données graphiques, interprètent mal un énoncé mathématique, ne reconnaissent pas des formes équivalentes, font fréquemment des erreurs de syntaxe dans l'écriture symbolique, etc.

Les mathématiques utilisent des expressions et des termes techniques spécifiques biens définis. Ces derniers n'ont pas souvent de même sens que le sens courant. La caractéristique particulière est le recours à un vocabulaire spécifique qui ne recoupe pas toujours le vocabulaire usuel. En voici des exemples :
- Les termes « somme, différence et produit » sont des termes spécifiques liés aux opérations élémentaires (somme : addition ; différence : soustraction ; produit : multiplication) qui ne correspondent pas aux sens usuels (une somme d'argent ; le jeu des différences ; les produits chimiques) ;
- L'expression « les droites qui se coupent » est aussi un exemple d'une formulation particulière à la géométrie. Le verbe « se couper » a ici un sens qui n'est pas le sens courant ;
- Plus généralement, le vocabulaire spatial présente des nuances qui sont peu approfondies dans la langue usuelle. Par exemple, la distinction à opérer entre « à droite » et « à droite de » en raison du choix d'un repère différent (à droite : le repère est le sujet lui-même ; à droite de : le repère est l'objet auquel on se réfère, lui-même orienté).

Les mathématiciens ont pour habitude d'énoncer des propositions, parfois appelées théorèmes, lemmes ou corollaires suivant le contexte. Ces propositions s'énoncent traditionnellement dans le langage commun, avec l'emploi récurrent de termes techniques préalablement définis.

Outre les termes techniques, les mathématiques emploient un ensemble de symboles pour désigner les objets mathématiques. L'introduction de cet ensemble de symboles a été initiée d'après Peano. Le choix de ces symboles est rarement arbitraire et présente des raisons historiques ou étymologiques. Leurs natures sont très différentes.

Une « lettre » majuscule ou minuscule de l'alphabet latin ou grec peut être utilisée pour désigner un objet simple. Par exemple, x, y et z désignent des variables réelles ou complexes standards. Le z est plus couramment utilisé en analyse complexe. En géométrie a, b et c sont utilisés pour des longueurs de segments, alors que les lettres grecques correspondantes α, β, et γ sont employées pour désigner des mesures d'angles en radian ou en degré. Les majuscules grecques $\sum$ et $\prod$ s'utilisent pour des sommes et des produits dont le nombre de termes est variable, ou trop grand. Ces symboles s'emploient pour la somme et le produit de séries ou de produits infinis, lorsque l'écriture fait sens.

Les « signes de ponctuation » les plus communs prennent un sens particulier au sein d'une formule mathématique :

- Le point peut être utilisé pour désigner une loi de groupe. Toutefois, nombreux mathématiciens préfèrent l'absence de symboles dans un produit. Le point est aussi utilisé pour la dérivée en mécanique ;
- Les parenthèses sont utilisées pour le regroupement des termes d'un produit ou d'une somme. Les crochets $\langle , \rangle$ ou $(,)$ ou $[,]$ ou $\langle | \rangle$ sont utilisés pour les produits scalaires. Les crochets $[,]$ sont employés pour désigner le commutateur de deux éléments en algèbre ou les crochets de Lie dans la théorie des groupes de Lie ;
- Le « prime ($'$) » est utilisé en analyse pour la dérivée (par exemple $f'(x)$ désigne la fonction dérivée de $f(x)$. Il est aussi utilisé plus généralement pour augmenter le nombre de variables disponibles $(x, x',)$. Il peut aussi désigner le groupe dérivé.

L'emploi des « flèches » est particulièrement apprécié en mathématiques :

- Les flèches sont utilisées pour désigner des applications. Parfois, le mot flèche est employé comme synonyme d'application ;
- Les flèches sont aussi employées pour désigner des vecteurs.

Un grand nombre de « symboles géométriques » a été introduit en mathématiques :

- Le cercle $\oplus$ est utilisé en algèbre linéaire pour symboliser une somme directe de sous-espaces vectoriels ;
- Le triangle équilatéral $\triangle$ est utilisé en analyse pour désigner le laplacien. Retourné $\bigtriangledown$, il désigne le vecteur gradient ($\overrightarrow{\bigtriangledown} f$ désigne le gradient de f). Par extension, on l'emploie

pour noter les connexions de Koszul ;
- Le carré est parfois utilisé dans les produits au sens de la théorie des catégories ;
- La croix $\otimes$ est le symbole couramment utilisé pour désigner le produit cartésien de deux ensembles ou le produit vectoriel de deux vecteurs d'un espace euclidien de dimension 3. Accessoirement, on l'emploie parfois dans les produits en remplacement du point ;
- Le symbole intégrale $\int$ est particulier.

Selon De Serres et Groleau (1997), le langage mathématique se présente donc souvent comme une association complexe de deux ou trois langages : soit le langage naturel et le langage symbolique, soit le langage naturel et le langage graphique, soit le langage symbolique et le langage graphique, soit le langage naturel, soit le langage symbolique et le langage graphique. Il définit le langage naturel en mathématiques comme le composé de termes usuels et de termes scientifiques propres à la discipline. Voici des exemples d'énoncés mathématiques formulés en langage naturel :
- L'addition est une opération commutative.
- La multiplication est distributive par rapport à l'addition.
- La dérivée d'une somme de fonctions est égale à la somme des dérivées de ces fonctions.

Tandis que, le langage symbolique en mathématiques est constitué d'un ensemble de symboles ayant un sens bien précis et de règles régissant leur agencement. Parmi les symboles mathématiques, on trouve les chiffres (0, 1, 2, ...), les symboles représentant des mots, des locutions ou des concepts (x, y, f, $\sum$, ∞, $\emptyset$, Δ, $\forall$, $\exists$,...), les symboles d'opération ($+$, $-$, $\times$, $\div$, $\surd$, $\int$, $\cup$, $\cap$,...), les symboles de relation ($=$, $<$, $>$, $\neq$, $\approx$, $\in$,...), les signes de ponctuation. Dans sa recherche, il définit aussi le langage graphique comme l'ensemble des éléments visuels ou pictogrammes utilisés en mathématiques, munis de règles d'agencement. Dans le langage graphique, on trouve, par exemple, des figures géométriques, des représentations cartésiennes, des représentations vectorielles, des graphiques sagittaux

4.3.2 La langue malgache dans l'enseignement du calcul

Le langage commun est contextuel et dépend des époques et du choix de l'auteur. Les mathématiques peuvent être écrites ou transcrites dans toutes les langues officielles. Concernant l'enseignement à Madagascar, au préscolaire et aux classes de $11^{\text{ème}}$ et $10^{\text{ème}}$, à l'exception de la discipline « Français », le langage d'enseignement de toutes les disciplines est entièrement en malgache. Les mathématiques sont écrites, transcrites et enseignées complètement en malgache : les vocabulaires, les termes techniques spécifiques et les expressions sont en malgache. Nous présentons dans le tableau 4.1 ci-après quelques exemples des significations en français des termes techniques malgaches utilisés (spécifiquement) en mathématiques et un extrait des manuels (cf Annexe) de la classe de de 11ème et 10ème :

Le mode d'écriture d'un nombre dépend donc de la langue d'expression utilisée. En français,

TABLEAU 4.1 – Exemples des termes mathématiques

En malgache	**Sens en français**
« *isa* »	nombre
« *isa ankasa* »	nombre pair
« *isa tsy ankasa* »	nombre impaire
« *ny ambiny* »	les unités
« *ny ampolony* »	les dizaines
« *ny anjatony* »	les centaines
« *ny fanampiana* »	l'addition
« *ny fanaläna* »	la soustraction
« *ny fampitomboana* »	la multiplication
« *ny fizarana* »	la division
« *ny fanampiana tsy misy isa mandeha* »	l'addition sans retenue
« *ny rafitrisa* »	l'arithmétique
« *ny maribavan'ny mampitombo 8* »	la table de multiplication de 8
« *ny kajy ankandrina* »	le calcul mental
« *sivy amby efapolo sy roanjato* » (249)	deux cent quarante-neuf (249)

la lecture d'un nombre commence de gauche à droite, c'est-à-dire les unités sont prononcées au dernier. Par exemple, 734 se lit « sept cent trente-quatre », en commençant par les centaines (7), de gauche vers droite, puis les dizaines (3) et enfin les unités (4). Tandis qu'en malgache, la lecture d'un nombre commence par les unités, de droite à gauche, contraire à la méthode française précédente, à l'exception de nombres multiples de dix de forme $k.10^n$ avec k et n des entiers. Prenons ce même nombre 734 : en malgache, 734 se lit « efatra amby telopolo sy fitonjato », c'est-à-dire on commence par les unités (4), puis les dizaines (3) et enfin les centaines (7). Pourtant, 20 et 800 se lisent respectivement « roapolo » (vingt) et « valonjato » (huit cent), même méthode que celle de français. Ainsi, la direction d'écriture d'un nombre dicté dépend de la langue d'expression utilisée.

A la classe de 11ème, il convient avant tout de développer la pratique du calcul posé, notamment suivant la méthode en colonne. La méthode de calcul écrit en colonnes, en particulier les trois opérations (addition, soustraction et multiplication), est une méthode d'opération de droite à gauche. Prenons l'exemple 4.2 de l'addition en colonnes $875 + 146$ suivant :

L'enseignement de calcul en langue malgache familiarise les techniques opératoires pour l'ad-

TABLEAU 4.2 – Exemples de calcul posé d'addition en colonne

$$\begin{array}{cccc} & 8 & 7 & 5 \\ + & 1 & 4 & 6 \\ \hline 1 & 0 & 2 & 1 \end{array}$$	• J'additionne d'abord les unités : $5+6=10$. Je pose 1 et je retient 1 dizaine. • J'additionne ensuite les dizaines : $7+1=8$; $8+4=12$. Je pose 2 et je retiens 1 centaine. • Je continue de la même façon avec les centaines sans oublier les retenues.

dition, la soustraction et la multiplication posée en colonnes étant donné que l'orientation de ces dernières est la même que la lecture en malgache d'un nombre.

Comme mentionné précédemment, à partir de la classe de 9$^{\text{ème}}$, l'enseignement de toutes les disciplines (sauf le Malgache et l'Anglais) s'est fait en français, quelquefois en alternance avec des explications en malgache afin que les élèves comprennent facilement des leçons. La pratique entière de l'enseignement en français dépend d'un enseignant et de qualité de l'établissement. En effet, dans cette classe, les élèves commencent à aborder, pour la première fois, les leçons et les exercices mathématiques en français, entre autres les expressions spécifiques, les termes techniques et les différentes méthodes d'apprentissage de cette matière. Concernant spécifiquement le calcul, plus particulièrement le calcul mental, l'introduction du français modifie davantage la manière de compréhension des élèves de telle sorte qu'il y a une différence entre les deux langues - malgache et français - dans diverses méthodes spécifiques, sans avoir négligé des nouveaux termes et expressions spécifiques, voire des définitions mathématiques. Ainsi, en classe de 9$^{\text{ème}}$ où l'enseignement en français de calcul mental est partiellement obligatoire, la bonne compétence en calcul posé en colonnes acquise, pratiquée en malgache aux classes antérieures, favorise la stratégie de simulation mentale de l'algorithme écrit dans laquelle l'élève « pose dans sa tête » l'opération en colonnes.

4.3.3 Les erreurs langagières en mathématiques

Parmi les erreurs liées au langage, on peut distinguer ceux qui sont propres au langage mathématique et ceux, plus généraux, qui sont liés à la maîtrise du français. Les erreurs liées à la non maîtrise du français engendrent bien souvent des difficultés dans l'apprentissage des mathématiques. Ceci, selon Perrin-Glorian (1994), a des répercussions sur l'apprentissage des élèves, à plusieurs niveaux :

– dans la compréhension des énoncés ;
– dans la formulation des résultats ou de questions ;
– dans l'interprétation de ce qui se fait en classe.

Il n'est donc pas étonnant que les difficultés langagières se trouvent dans l'expression et dans la formulation des résultats ou des questions chez les élèves qui en souffrent. Ceci entraîne chez eux un rendement inférieur à celui qui devrait leur permettre leurs véritables connaissances.

Les erreurs langagières en mathématiques se manifestent dans les différents aspects que prend le langage mathématique. Comme l'ont fait remarquer De Serres et Groleau (1997), le langage mathématique est en fait constitué de trois langages différents : le langage naturel, le langage graphique et le langage symbolique. Or, chacun de ces langages possède sa propre structure et est donc source d'erreurs qui lui sont propres. Les difficultés langagières s'en trouvent alors accrues. Parmi les erreurs commises à la non maîtrise du français, on peut distinguer ceux qui relèvent de la sémantique et ceux qui ont trait à la syntaxe.

Les erreurs sémantiques en mathématiques :
Selon le dictionnaire « Le Nouveau Petit Robert », la sémantique est l'étude du langage considéré du point de vue du sens. La sémantique étudie les relations du signifiant au signifié, les changements de sens, la synonymie, la polysémie, la structure du vocabulaire. L'utilisation du langage naturel en mathématiques comporte donc un grand nombre de difficultés de nature sémantique. En outre, la présence de mots usuels et de termes scientifiques augmente le niveau de complexité, car, comme le fait remarquer Jacobi (1993), les mots de la langue usuelle sont polysémiques et leur sens dépend fortement du contexte, alors que les termes scientifiques sont monosémiques, ils ont un seul sens et renvoient à un unique référentiel, à une seule notion ou à un seul concept.

Comme la langue malgache n'est pas très riche en vocabulaires mathématiques et scientifiques et en termes spécifiques bien définies, les erreurs sémantiques sont les plus fréquentes commises par des apprenants malgaches en traduisant couramment en malgache des termes utilisés sans avoir connu les vraies définitions mathématiques. En voici quelques exemples :

– Dans une comparaison, des élèves ont tendance à la confusion entre des termes « au moins » et « plus de » ainsi qu'entre des termes « au plus » et « moins de ». En effet, en malgache courant, il n'y a pas beaucoup de différences entre ces termes. Par exemples, les expressions « Jean possède au moins deux amis » et « Jean possède plus de deux amis » se traduisent couramment en malgache par un même sens d'expression (en malgache : « Manana namana mihoatra ny roa i Jean »). Pourtant, ces deux expressions sont différentes en langage mathématique : en posant x le nombre d'amis de Jean,

- « Jean possède au moins deux amis » signifie « $x \geq 2$ » ;
- « Jean possède plus de deux amis » signifie « $x > 2$ ».

- Dans la géométrie, en malgache courante, la « droite » n'est pas une « courbe ».

La définition de la sémantique, donnée pour le langage naturel, peut aussi s'appliquer au langage symbolique et au langage graphique. La seule différence, dans ces cas, est qu'elle porte sur le sens des symboles ou des éléments visuels plutôt que sur le sens des mots. Les difficultés de nature sémantique sont donc très nombreuses en mathématiques, car il faut non seulement maîtriser le sens des termes (usuels ou mathématiques) du langage naturel, mais aussi le sens d'un très grand nombre de symboles et de codes visuels.

Les erreurs syntaxiques en mathématiques :
La syntaxe est définie comme l'étude des relations entre les formes élémentaires du discours ; l'étude des règles qui président à l'ordre des mots et à la construction des phrases, dans une langue. Dans des Dictionnaire de linguistique et des sciences du langage, on définit la syntaxe comme la partie de la grammaire décrivant les règles par lesquelles se combinent en phrases les unités significatives. Ces définitions, qui concernent le langage naturel, peuvent être transposées au langage symbolique et au langage graphique. Ainsi, dans le cas de la syntaxe symbolique, on parlera de l'ordre des symboles plutôt que de l'ordre des mots. De même, dans le cas de la syntaxe graphique, on parlera de la construction de figures ou de graphiques plutôt que de la construction de phrases. Si la définition de la syntaxe peut s'appliquer aux trois langages, il n'en va pas de même pour les règles. Ainsi, Le langage mathématique, reposant sur ces trois langages (naturel, symbolique et graphique), comporte donc trois systèmes de règles syntaxiques. Il est donc compréhensible que les élèves peuvent commettre de nombreuses erreurs de nature syntaxique en mathématiques.

Comme a mentionné De Serres et Groleau (1997) dans sa recherche, plusieurs élèves questionnés par eux avaient donné 36 comme exemple d'un diviseur de 12. L'un d'entre eux avait expliqué que « 36 est un diviseur de 12 parce que 12 divise 36 ». Il commettait là une erreur syntaxique, ayant fait une inversion du sujet et du complément dans la proposition circonstancielle de cause. Pour répondre correctement, il aurait dû dire : « 4 est un diviseur de 12 parce que 4 divise 12 ».

Lorsque les élèves parlent d'éléments dans un graphique, beaucoup d'entre eux font l'erreur syntaxique de dire ou d'écrire « le point x » quand x désigne l'abscisse du point. L'expression correcte est « le point d'abscisse x », car un point dans un plan cartésien est constitué de deux composantes graphiques : une abscisse et une ordonnée. En omettant le complément déterminatif (« d'abscisse »), on change le sens du symbole x : il désigne alors le point lui-même, et non son abscisse. L'erreur syntaxique conduit ici à une erreur sémantique. Il faut dire que bien des professeurs de mathématiques font ce genre d'abus de langage. Quand ils discutent entre eux, ils se comprennent à demi-mot. Mais quand ces abus de langage tombent dans l'oreille des élèves, cela peut devenir dangereux.

Les erreurs langagières dans l'utilisation des symboles sont nombreuses et variées. Le fait de ne pas savoir identifier la nature des symboles dans une équation (c'est-à-dire quelles sont les lettres représentant les constantes et les variables) entraîne de nombreuses erreurs syntaxiques. Par exemple, beaucoup d'élèves confondent, parce qu'elles sont visuellement semblables, les trois expressions suivantes : k^n, x^n et k^x, où k et n désignent des constantes et x une variable. Or, la première est une puissance d'une constante, donc une constante ; la deuxième est une puissance d'une variable, et la troisième une exponentielle de base k. Si on ne différencie pas ces expressions, il devient hasardeux de les manipuler, notamment lorsqu'on leur applique les règles de dérivation, qui sont particulières à chacune de ces formes. D'un autre côté, de nombreux élèves ne voient pas les similitudes sur le plan symbolique, par exemple, entre les deux formes d'équation suivantes : $y = mx + b$ et $ax + by + c = 0$, où x et y sont des variables, a, b et c des constantes. La première équation est très familière à tous les élèves dès la fin du secondaire. Il s'agit de la forme la plus fréquemment utilisée par les professeurs et dans les manuels de mathématiques pour décrire de façon générale une droite dans le plan cartésien. Cependant, si on présente aux élèves la deuxième équation, plusieurs ne reconnaîtront pas en elle l'équation générale d'une droite ; ils ne verront pas là une autre façon de décrire symboliquement le même objet graphique.

Le non-respect des règles de priorité dans les opérations, l'omission ou le mauvais usage des parenthèses dans l'écriture d'expressions mathématiques sont d'autres exemples d'erreurs de syntaxe symbolique. Des élèves vont écrire $5x - 3 \cdot h$, alors qu'ils devraient écrire $(2x - 3) \cdot h$. D'autres, en substituant par exemple les valeurs 4 et -5 aux variables x et y dans une expression comme xy, écriront $4 - 5$ au lieu de $4 \cdot (-5)$. Bien que l'oubli des parenthèses relève parfois d'une simple négligence, il est dans bien d'autres cas le reflet d'un manque de maîtrise de la syntaxe symbolique.

La traduction en langage symbolique d'un énoncé mathématique formulé en langage naturel peut aussi occasionner des erreurs syntaxiques. Considérons l'énoncé suivant : *Il y a deux fois plus de garçons que de filles dans la salle*. En posant l'équation reliant le nombre de garçons (représenté par le symbole G) au nombre de filles (représenté par F), certains élèves écriront : $2G = F$, ce qui est la forme inversée de la bonne formulation : $G = 2F$. Ce type d'erreur a été étudié par de nombreux chercheurs (De Serres et Groleau, 1997 ; Rosnick et Clement, 1980 ; Wollman, 1983). Il est intéressant de remarquer que l'erreur est due à une traduction mot à mot de l'énoncé, en calquant l'écriture symbolique sur la syntaxe française :

`2 fois plus de garçons que de filles.`

$2 \times \quad G \quad = \quad F.$

Or, l'énoncé ne saurait être traduit ainsi, puisque l'écriture symbolique suit sa syntaxe propre. Mais cette erreur d'inversion peut avoir d'autres causes. Il est possible, comme l'ont observé (Rosnick et Clement, 1980), que dans l'esprit de certains élèves les lettres G et F ne désignent pas le nombre de garçons et le nombre filles respectivement, mais les mots « garçons » et « filles ». Les lettres ne représenteraient pas pour eux des variables ou des nombres, mais « des initiales ou des signes prenant la place de mots » (De Serres et Groleau, 1997).

Dans les graphiques, on peut également observer des erreurs langagières, notamment dans l'agencement des éléments graphiques ou dans la représentation graphique d'informations. Une erreur fréquemment rencontrée est la confusion entre *point et ordonnée d'un point*. Dans le cas du graphique d'une fonction f, des élèves vont associer à $f(x)$ un *point* de la courbe de f, alors que l'expression $f(x)$ représente l'*ordonnée* du point d'abscisse x sur la courbe. En faisant cette erreur sémantique, les élèves ne pourront analyser correctement des expressions plus complexes comme $f(5) - f(2)$. Au lieu de lire dans ce cas une différence d'ordonnées, ils vont lire une différence de points et ne sauront visualiser correctement sur le graphique cette expression.

4.3.4 Les mathématiques orales

Les activités orales doivent pleinement jouer leur rôle en mathématiques. Elles sont prédominantes jusqu'à la classe de 11ème et 10ème où l'écrit n'a qu'une place limitée ; elles doivent aussi être présentes d'une manière déterminante à partir de cette classe, notamment parce qu'elles exigent des élèves un fonctionnement mental différent de celui de l'écrit ou parce qu'elles sollicitent plus ce fonctionnement mental. Citons les exemples les plus marquants :

– Pour le calcul mental, il exige des élèves un rapport aux nombres et aux opérations différent de celui qui est induit par l'écrit. Par exemple, par une désignation orale des nombres, on « entend » les nombres, ce qui conduit à une perception différente : « quatre-vingt-douze » invite plutôt à l'écriture : $80 + 12$ (et même à $(4 \times 20) + 12$) et 92 se comprend plutôt : $90+2$. Cela se traduit par une manière particulière de faire les opérations oralement, différente des méthodes écrites (il ne faut pas oublier que, pendant très longtemps, on a su faire des « additions naturelles » oralement sans nécessairement connaître la technique écrite de l'addition).
– À la géométrie mentale, l'activité orale joue un rôle assez analogue à celui rempli par le calcul mental. Il s'agit de faire appel aux représentations géométriques des élèves, d'une manière directe, sans les occulter ou les freiner par des activités de tracé aux instruments. C'est une occasion de vérifier, en situation, la compréhension réelle par les élèves du vocabulaire géométrique (par exemple, la distinction entre parallèle et perpendiculaire, entre milieu et centre, etc.).
– Les problèmes oraux, les problèmes ne doivent pas être assimilés à des énoncés écrits et on veillera à varier la façon dont ils sont proposés aux élèves :
  – la question peut être posée oralement à partir d'une situation matériellement présentée aux élèves, ce qui offre l'avantage de permettre ensuite une vérification expérimentale de la réponse élaborée ;
  – la situation support peut être décrite oralement, accompagnée de quelques éléments importants écrits au tableau.

L'importance de l'oral

Les activités orales permettent à l'élève de mettre en œuvre des procédures qu'il ne saurait pas forcément formaliser à l'écrit. Par exemple, lors de la recherche de problèmes du type « un soir, le thermomètre indique 3°C. Le matin suivant, il indique - 6°C. De combien de degrés la température est-elle descendue ? », de nombreux élèves utilisent l'image mentale de la droite graduée, et additionnent des distances à zéro. Leur réponse orale est juste, même si, pour certains, leur procédure ne correspond pas encore à l'écriture « attendue » : $3 - (-6)$. L'expression de ces procédures personnelles peut être un préalable à l'utilisation de l'écriture symbolique et constituer plus tard une aide à sa compréhension.

Particulièrement au calcul mental, ce genre de calcul s'appuie très souvent sur une désignation orale des nombres ; l'oral et l'écrit ne mettent pas toujours en valeur la même information. Le calcul mental est une activité qui n'utilise pas nécessairement uniquement l'oral : il est parfois utile d'autoriser l'écriture de résultats intermédiaires (par exemple lors d'un calcul un peu complexe) ou d'écrire l'énoncé d'un calcul. Certaines formulations orales peuvent constituer une aide à la compréhension. Si le calcul se fait tout le temps par écrit, on risque de privilégier certains aspects du nombre (numération écrite en chiffres) au détriment d'autres (numération orale en mots nombres) ; mais le passage systématique par l'écrit risque aussi d'occulter certaines procédures de calcul fort utiles en calcul mental et s'appuyant sur la désignation orale des nombres. Ici, le fait que les élèves soient confrontés à l'apprentissage en français de deux systèmes de numération fonctionnant avec des règles assez différentes (plus un bon nombre d'exceptions pour la numération orale) doit entraîner une place importante de l'oral dans l'apprentissage de ces numérations. Cependant le fait de donner des consignes orales ou écrites peut modifier l'éventail des procédures élèves. Ainsi,

- le résultat de l'opération : $173 - 46$ a de bonnes chances d'être obtenu par l'algorithme de soustraction si l'énoncé est écrit. Si l'énoncé est donné oralement, les élèves utilisent des procédures plus personnelles comme, par exemple : $4 + 23 + 100$ (somme des compléments, de 46 à 50, de 50 à 73, de 73 à 173).
- Calcul de 4×24 en s'appuyant sur la numération orale : quatre-vingt, c'est quatre fois vingt, plus seize de quatre fois quatre, cela fait quatre-vingt-seize.
- La verbalisation de ces procédures aide à la prise de conscience de la spécificité du calcul oral et à l'appropriation de ces techniques. Certains calculs mathématiques comme $3x$ plus $7x$, ou 2 neuvièmes plus 5 neuvièmes, sont plus facilement réussis si on les propose oralement au lieu de les écrire. On réduit le nombre de réponses du genre $10x$ ou 7 dix-huitièmes par exemple. Après ce type d'erreurs à l'écrit, la reprise de calculs oraux peut constituer une remédiation efficace.

Dans la gestion de la classe, une place plus importante de l'oral (présentation des énoncés, verbalisation des conjectures, des procédures, des arguments) a l'avantage d'une part de faire gagner du temps (on peut proposer beaucoup d'exercices en un minimum de temps, et vérifier que tous les élèves ont cherché) et d'autre part de permettre à certains élèves de s'affranchir des difficultés du passage à l'écrit.

La variable orale ou écrite en mathématique peut avoir une incidence sur les apprentissages :

- La formulation du calcul, qui peut favoriser certaines procédures.
- L'exécution du calcul par les élèves : ils ne vont pas mobiliser les mêmes savoirs dans le

calcul écrit et dans le calcul oral.

– La formulation du résultat qui peut être un moment de travail sur le passage entre numération orale et numération écrite (et réciproquement).

Dans le cas d'utilisation de la langue malgache ou de la langue française, la verbalisation d'un nombre ou d'une opération en ligne conduit à la méthode d'écriture. Par exemple, si l'on verbalise en malgache l'opération $54+26$, on commence par 4 (unités de 54), puis 5 (dizaines de 54), ensuite « + » et enfin 26 en commençant par 6 (unités de 26), puis 2 (dizaines de 26).

Les problèmes liés à l'activité orale à Madagascar

Le problème majeur à l'activité orale dans l'école malgache est le nombre pléthorique des élèves par classe : le nombre moyen d'élèves par classe en primaire est 60 élèves. Au certain lycée, particulièrement en classe de Terminale (TA et TD) au lycée « Victor MIADANA, Mandritsara », ce nombre atteigne parfois 120 élèves.

Au niveau des enseignants notamment en primaire, comme ils ont faible en français qui est obligatoire à partir de la classe de 9$^{\text{ème}}$, ils évitent souvent les mathématiques orales pendant leur enseignement. En effet, les enseignants n'ont pas de compétence en mathématique aussi bien en primaire qu'en collège, étant donné qu'à Madagascar, le niveau exigé pour les enseignants du primaire est le diplôme de BEPC et celui du Collège est le BAC.

4.4 L'enseignement de l'arithmétique

L'arithmétique est la pierre angulaire de l'enseignement de mathématiques à l'école primaire. Le maintien du raisonnement arithmétique chez les élèves du secondaire, et ce malgré un programme qui met l'accent sur l'algèbre, le potentiel des raisonnements arithmétiques naturellement mobilisés et la place qu'occupait historiquement l'arithmétique au secondaire ont fait en sorte que nous orientons notre analyse sur la place de l'arithmétique dans l'enseignement des mathématiques au secondaire. Nous reviendrons sur le programme mathématique au secondaire à Madagascar, pour situer la place qu'y occupe actuellement l'arithmétique. Cependant, avant de regarder la place de l'arithmétique dans le programme scolaire récent et en cours et de constater les problèmes y afférant, nous situerons globalement ce que nous entendons par arithmétique.

4.4.1 Différentes définitions

En reprenant différents lexiques, dictionnaires mathématiques et philosophiques, nous remarquons que les définitions du mot « arithmétique » recouvrent des différentes réalités sur lesquelles nous reviendrons. Avant d'en dégager les ressemblances et différences, voici les différentes définitions répertoriées dans des lexiques mathématiques :

- ✦ L'arithmétique est la « partie de la mathématique qui étudie les propriétés et les relations élémentaires sur les ensembles des entiers et des nombres rationnels » (Vincent, 1994). Ce lexique est pour l'usage des élèves.
- ✦ « L'arithmétique est la science qui étudie les propriétés et les relations de base sur les nombres. » (Côté, Gagnon, Perreault et Roegiers, 2002)
- ✦ Dans le lexique de Champlain, Mathieu, Patenaude et Tessier (1996), l'arithmétique est définie comme étant la « Science qui étudie les propriétés élémentaires des nombres rationnels. » On y réfère à l'arithmétique élémentaire, et à l'arithmétique modulaire (application de l'arithmétique élémentaire à des ensembles finis de nombres entiers) :
  - L'arithmétique élémentaire est une partie de la mathématique qui étudie les propriétés et les relations de base sur les ensembles de nombres naturels ($\mathbb{N}$), entiers ($\mathbb{Z}$) et rationnels ($\mathbb{Q}$). Notons que l'arithmétique élémentaire est un cas particulier de l'arithmétique des anneaux que l'on appelle théorie des nombres. À l'origine, elle était considéré comme la science de la gestion des avoirs, c'est-à-dire le quantitatif ou la technique des nombres dénommés.
  - L'arithmétique modulaire est une application de l'arithmétique élémentaire à des systèmes finis de nombres entiers. Dans le système modulo n $(\mod n)$, on utilise uniquement les nombres $0, 1, 2, 3, .., (n-1)$ et les opérations utilisées en arithmétique modulaire sont les mêmes que celles de l'arithmétique élémentaire, sauf que le nombre utilisé ne peut être plus grand que $(n-1)$; si cela est le cas, le nombre est divisé par n et on utilise à la place le reste de cette division.
- ✦ Un autre lexique, écrit par De Champlain, Mathieu et Tessier (1999), mentionne que l'arithmétique est la « partie des mathématiques qui regroupe l'étude des nombres rationnels et des procédés de calcul en vue de leurs applications pratiques ».

A cette étape, nous remarquons un point commun dans ces définitions provenant des lexiques : l'arithmétique recouvre l'étude des propriétés et des relations de base sur les nombres entiers et rationnels. Dans Champlain *et al.* (1996), une référence à une autre arithmétique, l'arithmétique modulaire, y est faite. Un ajout à la définition est fait dans celle de De Champlain *et al.* (1999) où un des sens donnés à l'arithmétique est aussi l'étude des procédés de calculs. Divers sens sont donc associés à l'arithmétique. Nous remarquons aussi que dans certaines définitions (Champlain *et al.*, 1996 ; Vincent, 1994), l'arithmétique est définie comme étant un des domaines mathématiques tandis qu'avec Côté *et al.* (2002), il s'agit d'une science. De Champlain *et al.* (1999) la décrivent tantôt comme une science, tantôt comme une partie des mathématiques.

Dans le dictionnaire philosophique « Vocabulaire technique et critique » de la philosophie de Lalande (1960), l'arithmétique est définie comme :

– Sens primitif et étymologique : science des nombres entiers, de leurs propriétés et de leurs relations (divisibilités, etc.). La partie supérieure de cette science s'appelle *Théorie des nombres*.
– Science pratique du calcul, c'est-à-dire des opérations à effectuer sur les nombres entiers et les fractions. Elle s'appelait dans l'antiquité *Logistique*, au moyen âge *Abaque* ou *Algorithme*.

L'expression *Arithmétique universelle* conviendrait bien pour désigner la science des nombres généralisés, c'est-à-dire des nombres fractionnaires, qualifiés, irrationnels et complexes, et non l'Algèbre.

Baraquin *et al.* (1995) définit l'arithmétique comme la « Science des nombres, » qui étudie les propriétés spécifiques des nombres entiers, rationnels, algébriques ou transcendants. Elle désigne également la théorie du calcul, c'est-à-dire des opérations portant sur les nombres entiers et les fractions.

Les dictionnaires philosophiques confirment ce que nous avions remarqué dans les lexiques. L'arithmétique est considérée comme une science étudiant les propriétés et les relations entre les nombres. Toutefois, ces dictionnaires font apparaître qu'il y a effectivement deux sens distincts donnés à l'arithmétique, l'un comme étant l'étude des nombres, de leurs propriétés et relations, l'autre comme étant la pratique du calcul. Dans la définition de Baraquin *et al.* (1995), les nombres étudiés sont étendus aux nombres algébriques et transcendants. Dans la définition de Lalande, on fait référence à l'arithmétique comme étant une branche de la Théorie des nombres. Une certaine étendue de ce que recouvre l'arithmétique apparaît ainsi dans ce qui précède, non restreinte à la conception qu'on en a souvent dans la vie courante. Des définitions tirées de deux dictionnaires mathématiques permettent de voir une extension de ce qu'est l'arithmétique. Les définitions sont plus longues et comprennent un aspect historique qui ne se retrouve ni dans les lexiques mathématiques, ni dans les dictionnaires philosophiques.

La première définition est tirée de Bouvier, George et LeLionnais (2001) :

- D'abord limitée, en vue de leurs applications pratiques, à des procédés de calcul combinant des entiers naturels par des opérations élémentaires (addition, soustraction et multiplication ; puis division ; et beaucoup plus tard, élévations au carré et au cube), l'arithmétique s'est ensuite donnée pour but l'étude des relations des nombres rationnels entre eux avec des opérations. Un tel développement devient possible par l'adoption d'un bon système de numération de position, plus particulièrement celui, à base décimale, avec le zéro, de l'occident. Il vit son efficacité accrue par l'introduction du calcul littéral qui devait ouvrir la voie aux méthodes algébriques.
- L'arithmétique élémentaire ainsi définie est un cas particulier d'une arithmétique des anneaux principaux. L'addition et la multiplication constituant les opérations de base de ces anneaux, on peut distinguer deux branches de l'arithmétique qui étudient la manière dont les entiers naturels peuvent être composés par addition ou par multiplication avec d'autres entiers naturels.

  La théorie des nombres entiers débouche alors dans la théorie des nombres algébriques, transcendants, des nombres p-adiques, etc., auxquelles on peut associer, moyennant des glissements de sens, des arithmétiques correspondantes. En définitive, il y a intérêt à garder ouverte la définition du mot « arithmétique » de manière à lui permettre de s'adapter à de nouvelles classes de nombres.
- L'arithmétique (et, dans un sens pratiquement équivalent, la théorie des nombres) a le privilège d'avoir passionné les mathématiciens les plus éminents en même temps qu'elle n'a cessé d'attirer les amateurs. Cette séduction tient, pour beaucoup, dans ce dernier cas, au fait que des problèmes très difficiles, parfois non résolus, ont souvent des énoncés simples qui peuvent être compris à partir d'une formation mathématique presque inexistante. Gauss tenait l'arithmétique pour « la reine des mathématiques » et on a pu dire que la théorie des nombres était « la plus pure des mathématiques pures ». Au-delà des mathématiques pures et des sciences expérimentales, l'arithmétique intervient aujourd'hui en comptabilité et en science économique.

La dernière définition choisie provient de Baruk (1992). Dans ce dictionnaire, l'arithmétique est ainsi définie comme : « science des nombres. ». Le mot « arithmétique », bien que renvoyant dans tous les cas à « la science des nombres », a eu, du fait de son histoire, plusieurs sens différents. Récemment encore, dans une signification que lui attribuait l'usage courant, on caractérisait surtout l'arithmétique en l'opposant à l'algèbre principalement :

- sur les méthodes : les problèmes sont résolus par l'arithmétique, c'est-à-dire par raisonnement, l'algèbre permettrait, en utilisant des lettres et en mettant le problème en équation, d'en résoudre une infinité qui sont du même modèle ;
- sur les centres d'intérêt : ceux de l'arithmétique étaient supposés être ceux de la vie quotidienne, alors que ceux de l'algèbre pouvaient soit consister en la simple mise en équation des problèmes précédents, rendant évidente la facilité de cet outil extraordinaire, soit être de pure fantaisie, comme de trouver un âge, un nombre de personne, etc. ;
- sur les objets : l'arithmétique ne s'occupant, d'une manière générale, que de problèmes en nombre-de, les calculs effectués sur des quantités matérielles ne peuvent interpréter des nombres négatifs et donc ne peuvent les accepter ; or, en l'absence de nombres négatifs, on ne parle pas de nombres positifs. Par opposition aux nombres relatifs dont traite l'algèbre, l'arithmétique était donc supposée ne s'intéresser qu'aux nombres sans signe. On a ainsi, par exemple, qualifié de décimaux arithmétiques les nombres décimaux ordinaires, pour les distinguer des décimaux relatifs, qui s'appellent les décimaux, tout court.

Il définit aussi l'arithmétique comme étude des relations et propriétés des nombres entiers et rationnels, c'est-à-dire des ensembles $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Q}$. L'arithmétique élémentaire se poursuit plus tard, à l'université, par ce qu'on appelle la théorie des nombres, qui n'est autre que l'arithmétique supérieure.

Aussi loin que l'on remonte dans le temps, on trouve ces deux sortes d'arithmétique :

a. L'une pratique, utilitaire et se confondant avec l'art de calculer, de faire des comptes : gérer les biens des individus et des sociétés, prévoir leur subsistance, permettre les échanges, évaluer le travail, etc., d'où l'établissement de système de poids et mesures, de tarification des marchandises, de codification des échanges ; les premières monnaies pouvaient aussi bien être constituées de têtes de bétail (Grecs, Romains, Hébreux) que de rations d'orges (Sumer, Babylone). C'est l'arithmétique du commerce, de la gestion des avoirs, qui, dans ce dictionnaire, est appelée le quantitatif. Pour distinguer cette

« science des nombres » - qui pourrait ici s'appeler une *technique des nombres-de* - de celle qui suit, et qui est vraiment une science des nombres, les Grecs les désignaient de deux mots différents : logistique pour la première et arithmétique pour la seconde, distinction que l'on attribue à Platon (IV$^{\text{ème}}$ siècle av. J.C.) ; les Babyloniens disposaient pour l'une et l'autre de deux systèmes de numération différents, à base 10 pour la première et 60 pour la seconde.

b. L'autre savante, spéculative, autrefois imprégnée d'esprit religieux, plus tard et aujourd'hui purement abstraite. Certains de ses problèmes sont nés de la musique et de l'astronomie, mais la plupart d'entre eux du pur plaisir de rechercher des relations entre les nombres. Cette science des nombres est donc ce qu'on appelle aujourd'hui la *théorie des nombres*.
   Cette arithmétique se caractérise par le fait que les problèmes, dans la majorité des cas, ne ont d'aucune utilité pratique et que leurs énoncés apparemment très simples cachent en fait des difficultés considérables. Tel celui-ci, dû au mathématicien Christian Golbach (1690-1764), qui l'énonça en 1742, et qui reste aujourd'hui encore une conjecture. *Tout nombre entier pair est somme de deux nombres premiers*. Par exemple, $12 = 5 + 7$, $16 = 7 + 11$, $20 = 17 + 3$, $30 = 17 + 13$, etc.
   Cette affirmation, deux siècles et demi après avoir été énoncée, n'a pas encore été démontrée et reste un problème qui occupe les mathématiciens contemporains. On trouvera d'autres énoncés de problèmes d'arithmétique à nombre naturels et nombres premiers.

Ce qu'amènent ces deux définitions de dictionnaires mathématiques (Bouvier *et al.*, 2001 ; Baruk, 1992) est un aspect évolutif de ce que recouvre l'arithmétique. Historiquement, elle n'a pas toujours eu le même sens. Bouvier *et al.* (2001) suggère d'ailleurs de garder la définition ouverte afin qu'elle reste en constante évolution. Effectivement, deux sens donnés à l'arithmétique y apparaissent, le sens « art du calcul » à l'origine de l'arithmétique, renvoyant à une arithmétique plutôt pratique. Ce n'est que par la suite qu'elle a pris le sens actuel. Dans la définition de Baruk (1992), l'enseignement des mathématiques a fait en sorte d'opposer l'arithmétique à l'algèbre. Dans les deux définitions, l'arithmétique est vue comme étant un domaine de la théorie des nombres. La définition mathématique de Baruk (1992) n'amène rien de plus aux définitions des lexiques mathématiques. En lisant ces différents ouvrages, des invariants, des nuances et des ajouts, selon la provenance de la définition, ressortent.

4.4.2 Les invariants, les nuances et les différences entre les définitions

Selon le type d'ouvrage dans lequel est définie l'arithmétique, il semble qu'elle ne comporte pas toujours les mêmes éléments. Les invariants, nuances et ajouts y sont donnés en fonction des types de références. Il ressort un invariant provenant de chacune de ces définitions, autant celles des lexiques, de celles des dictionnaires philosophiques que de celles des dictionnaires mathématiques. Dans tous les cas en effet, l'arithmétique y est définie comme une science, ou la partie des mathématiques qui étudie les propriétés et les relations sur les entiers et sur les nombres rationnels.

Dans les dictionnaires philosophiques et mathématiques, l'arithmétique est considérée comme un cas particulier de la théorie des nombres et même comme étant son équivalent. Par contre, il n'est pas explicité quelles notions font partie de la théorie des nombres. Dans la définition de Baraquin *et al.* (1995), l'arithmétique s'agrandit à l'étude des nombres algébriques et transcendants. L'arithmétique a alors un sens plus large que l'étude des nombres rationnels. C'est le cas aussi dans la définition de Bouvier *et al.* (2001) qui y inclut, en plus des nombres algébriques et transcendants, les nombres p-adiques.

Une autre définition apparaît dans le lexique de De Champlain *et al.* (1999) où l'arithmétique comprend aussi les procédés de calcul. On retrouve aussi cette même définition dans les dictionnaires philosophiques pour le deuxième sens possible du mot « arithmétique ». Dans la définition de Champlain *et al.* (1996), on donne cette définition aussi, mais en amenant l'aspect historique. L'arithmétique à l'origine était la science du calcul avec les opérations portant sur les nombres rationnels. En ce qui a trait à la définition historique de Baruk (1992), on mentionne qu'il a existé deux types d'arithmétiques : la savante, se rapportant à l'étude des nombres rationnels, et la pratique et utilitaire, se rapportant à l'art de calculer, de faire des comptes Baruk (1992) ajoute au domaine de l'arithmétique une définition familière. Elle donne un sens pratique à l'arithmétique et la met en opposition avec l'algèbre. Une problématique apparaît en comparant l'origine étymologique du mot arithmétique donnée dans Baruk (1992) et dans Baraquin *et al.* (1995). Le mot « arithmétique » provient du grec atithmetikê. Baruk (1992) dit qu'il signifie « science des nombres », et Baraquin, « art de compter ». La signification est différente selon les définitions regardées. La science des nombres peut être considérée comme étant l'étude des nombres rationnels. Dans ce cas, il s'agit du sens donné à l'arithmétique dans toutes les définitions ci-dessus, tandis que l'art de calculer est l'autre sens donné à l'arithmétique. Les deux origines étymologiques fournies ne donnent pas le même sens au mot arithmétique.

À la suite de ces définitions, nous remarquons que le mot « arithmétique » n'a pas toujours eu la même signification. Comme le mentionne Baruk (1992), cela crée ainsi une difficulté à cerner ce domaine des mathématiques. L'étendue de son domaine n'est pas claire non plus. Même si certains (dictionnaires mathématiques et philosophiques) mentionnent qu'il s'agit de la théorie des nombres, il n'est pas mentionné quel est le contenu en arithmétique couvert dans ce cas. Ce premier survol permet de construire une première définition de l'arithmétique.

En somme, un besoin émerge de définir plus spécifiquement ce domaine, afin de pouvoir distinguer quelles notions font partie de l'arithmétique et lesquelles n'en font pas partie. Nous ferons une analyse plus en profondeur de ce qu'est l'arithmétique dans le cadre théorique. Pour l'instant, nous en donnerons une première définition nous permettant de faire un survol des programmes d'études, récent et en cours d'application, afin de faire ressortir si l'arithmétique y est présente ou non du secondaire. À cette étape du travail, l'arithmétique est définie comme étant la partie des mathématiques qui étudie les relations et les propriétés de base des nombres entiers et des nombres rationnels. De plus, nous incluons les procédés de calcul sur les entiers, les fractions, les décimaux (addition, soustraction, multiplication, division, exponentiation ainsi que la priorité des opérations). Les différentes façons d'écrire un nombre rationnel (fraction, décimale, forme exponentielle et pourcentage) font aussi partie de notre définition du domaine « arithmétique ». Ainsi, l'arithmétique est un bon domaine d'application du « calcul mental. » En fait, nous avons déjà décrit au chapitre 3 ce qu'on appelle « arithmétique mentale ».

4.4.3 La place de l'arithmétique dans le programme de mathématiques en vigueur à Madagascar

A l'école primaire, les programmes en vigueur de mathématiques (appelées « Calcul ») sont subdivisés en deux parties dont une grande partie est l'« arithmétique » et le calcul mental en fait partie. Ainsi, l'arithmétique élémentaire occupe une place importante dans l'enseignement de mathématiques au primaire, mais celle-ci diminue à partir du secondaire si bien que nous allons analyser plus profondément.

Au Collège, le programme de mathématiques est subdivisé en deux grands thèmes : *Activités numériques* et *Activités géométriques* et l'arithmétique se situent dans la partie *Activités numériques* du programme du Ministère de l'Éducation Nationale (Ministère de l'Éducation

Nationale [MEN], 2015). Les élèves développeront le sens du nombre en étudiant différentes manières d'écrire un nombre (fractionnaire ou décimale), en travaillant sur le quotient comme une écriture fractionnaire, en travaillant sur les opérations avec ces nombres, en trouvant les diviseurs communs de deux entiers et en écrivant une fraction en son expression la plus réduite. Le calcul numérique (arithmétique) est travaillé avec le calcul littéral (algèbre). Il prend une place moins importante en classe de troisième, où le travail sur les nombres s'étend aux radicaux. Par contre, le raisonnement proportionnel est travaillé à tous les niveaux du collège dans la section portant sur les fonctions. En plus du raisonnement proportionnel, un travail est fait sur les pourcentages.

En classe de 6$^{\text{ème}}$, étant donné que les objectifs spécifiques et le programme mathématique sont des suites de ceux du primaire, la place prise par l'arithmétique classée dans l'activité numérique est moins importante que celle d'activité géométrique. Elle ne correspond qu'à 39,22% du temps alloué aux mathématiques durant une année scolaire. Plus de 60% des concepts mathématiques abordés sont d'ordre géométrique. Pourtant, l'arithmétique, en plus de servir de tremplin pour l'algèbre comme nous le verrons ci-dessous, occupe la majeure partie des connaissances mathématiques que les élèves acquièrent en classe de 6$^{\text{ème}}$.

En classe de 5$^{\text{ème}}$, le temps alloué est le même qu'en classe de 6$^{\text{ème}}$. Dans cette classe, parmi les objectifs spécifiques sont « Améliorer la performance en raisonnement déductif par l'utilisation de définitions et/ ou de nouvelles propriétés » et « Maîtriser les techniques de calcul sur les nombres décimaux relatifs et sur les fractions » en introduisant pour la première fois « une résolution d'une équation algèbrique » simple. Dans ce cadre, les connaissances arithmétiques construites servent de préalables aux connaissances algébriques. Il y a deux volets à l'intérieur de cet objectif :
Dans le premier volet, nous approfondissons d'abord le sens du signe d'égalité. Dans cette optique, certaines facettes des objectifs amènent l'élève non seulement à appliquer les règles d'écriture relatives aux règles de priorités des opérations, mais à se rendre compte que le signe d'égalité ne signifie pas « fais quelque chose », mais plutôt que « l'expression de droite a la même valeur que l'expression de gauche », et réciproquement. On peut créer des égalités en exploitant concrètement les propriétés de commutativité, d'associativité et de distributivité qui sont très utilisées en algèbre. De cette façon, l'élève développera des habiletés arithmétiques qui lui seront nécessaires lors du passage à l'algèbre. En lisant le premier volet, malgré le fait que l'algèbre ne soit pas présente concrètement en classe de 5$^{\text{ème}}$, les enseignants

doivent commencer à développer le sens de l'égalité comme relation d'équivalence.
Quant au second volet, il sera surtout exploité dans des situations numériques. Toutes les propriétés et les règles qui peuvent se généraliser facilement devraient être des prétextes pour amener l'élève à utiliser le langage algébrique. Par exempte, après avoir découvert la règle qui transforme un nombre en un autre, l'élève apprendra à l'exprimer en passant progressivement d'un langage descriptif à un langage mathématique, en particulier un langage symbolique. Le deuxième volet de l'objectif général I sert à faire ressortir la différence entre l'arithmétique et l'algèbre. Ainsi, les élèves apprendront graduellement à utiliser un symbolisme donnant un sens à l'algèbre. Les deux volets montrent que l'arithmétique n'est pas vue comme un domaine mathématique indépendant, mais comme un préalable à un autre domaine, l'algèbre.
Par la suite, les élèves apprennent à effectuer des opérations en utilisant les nombres naturels, entiers et rationnels. La notion de PGCD et de PPCM est introduite. Cependant, il est demandé aux enseignants de se préoccuper du sens du nombre. Ceci doit se faire à l'intérieur des objectifs spécifiques. L'objectif de « Résoudre des problèmes nécessitant plusieurs opérations portant sur des nombres naturels et des nombres rationnels » est moins conseillé. Pourtant, ceci demande que l'élève développe l'habileté à résoudre des problèmes tout en développant parallèlement le sens du nombre et des opérations.

En classe de 4ème, l'*Activité géométrique* prend encore la première place en occupant 56% du temps alloué aux mathématiques dans le programme scolaire pour cette classe. 44% du temps est alloué à l'*Activité numérique* qui est composée de l'*Algèbre*, l'*Arithmétique* et la *Statistique*. D'ailleurs, l'*Arithmétique* occupe seulement 23% du temps alloué aux mathématiques et 16% pour l'*Algèbre*. « Effecteur des calculs sur des expressions algébriques » est un objectif spécifique dans l'introduction de l'algèbre. L'algèbre passe au second plan en ayant moins de temps consacré l'algèbre qu'à l'arithmétique. L'arithmétique recouvre ici tout ce qui a trait au nombre rationnel, décimal, à l'approximation et au raisonnement proportionnel. Dans ce cadre, les élèves ne devront pas seulement apprendre à appliquer des algorithmes, mais ils devront comprendre comment distinguer une situation proportionnelle d'une situation non proportionnelle. Le raisonnement proportionnel doit être abordé d'une façon concrète en résolution de problèmes : « Le développement du raisonnement proportionnel doit se faire à partir d'activités concrètes ». Cette finalité se retrouve évidemment dans l'objectif « Résoudre des problèmes relevant des situations de proportionnalité ou de suite de nombres proportionnels ». L'arithmétique occupe donc clairement moins de temps dans le programme scolaire comparativement aux classes de 6ème et 5ème.

En classe de 3ème, l'*Activité géométrique* prend encore la première place en occupant 56% du temps alloué aux mathématiques dans le programme scolaire pour cette classe. 44% du temps est alloué à l'*Activité numérique* qui est composée cette fois-ci de l'*Algèbre*, l'*analyse* et la *Statistique* : il y a peu de nouveau contenu arithmétique qui recouvre tout ce qui concerne le *nombre réel*. Les nouvelles connaissances arithmétiques sont intégrées dans l'objectif spécifique relié à l'algèbre. Dans ce cadre, l'élève apprendra à écrire des expressions équivalentes à des expressions contenant des exposants. Le travail avec les expressions numériques amènera les élèves à faire des liens avec le travail qui se fera ensuite avec les expressions algébriques. Les élèves devront travailler autant avec les unes que les autres. Le travail sur la partie numérique s'agit des seules nouvelles connaissances en arithmétique en troisième. Ce travail se fait avec celui sur l'algèbre. L'arithmétique est utilisée dans le but de faire un meilleur passage vers l'algèbre, même à l'introduction à l'analyse.
Puisque l'algèbre et l'analyse correspond à 36% du programme, la place de l'arithmétique se fait éclipser par l'algèbre. Il ne faut pas croire qu'il n'y a plus d'arithmétique de fait en troisième secondaire, car le contenu arithmétique est intégré aux objectifs terminaux des thèmes de l'algèbre et l'analyse, de la géométrie et de la statistique. Cependant, le programme n'explique pas comment ce contenu est intégré en algèbre, en analyse, en géométrie et en statistique, nulle part ailleurs il ne montre où se situe l'arithmétique. Le seul nouveau contenu arithmétique en classe de troisième est donc lié au travail sur les exposants, intégré aux objectifs en algèbre.

En classe de 2nde, tant au régulier qu'en enrichi, l'arithmétique est absente du programme scolaire. Il n'y a aucune nouvelle notion arithmétique de traitée. L'arithmétique est réinvestie à l'intérieur des contenus algébriques, géométriques, statistiques et du contenu de l'analyse. Il s'agit des calculs à effectuer, du sens du nombre et de la proportionnalité développée au premier cycle du secondaire. Le programme mentionne seulement que les élèves ont acquis ces concepts en arithmétiques au préalable. Il n'est pas nécessaire de les retravailler.

En classe de 1ère, de terminale TA (série littéraire) et de TD (série scientifique D), le même phénomène est observé. Il n'y a pas de nouveau contenu arithmétique tant au régulier qu'en enrichi. L'arithmétique est éclipsée par l'algèbre, l'analyse, la géométrie, les statistiques et les probabilités. Si l'arithmétique est présente, elle l'est encore, tout comme pour les années précédentes, à titre de connaissances antérieures acquises par les élèves. En première (de série littéraire et scientifique), le seul contenu arithmétique porte sur les suites arithmétiques et géométriques.

Seule la classe de terminale TC (série scientifique C) aborde de nouveau l'arithmétique au Lycée. Une section arithmétique est ajoutée au programme mathématique. Dans cette série scientifique, la divisibilité dans $\mathbb{Z}$ est travaillée ainsi que la congruence. Le programme y ajoute, en plus la division euclidienne, l'algorithme d'Euclide pour trouver le PGCD, la notion de nombres premiers entre eux. Les nombres premiers sont travaillés plus en profondeur et les théorèmes de Gauss et de Bézout sont enseignés. L'arithmétique abordée au niveau terminal TC relève de la théorie des nombres.

Nous venons de voir que l'arithmétique disparaît graduellement de la fin du programme du secondaire. Ayant une place importante au Primaire, elle perd cette place à partir du Collège et complètement en classe de 2$^{\text{nde}}$ et 1$^{\text{ère}}$ du Lycée, où il n'y a plus de nouveau contenu arithmétique, à l'exception de la classe TC. Au collège, elle se situe dans la section calcul numérique tandis qu'au lycée, une section particulière lui est attribuée. Malgré le fait qu'elle perde de l'importance, étant donné que d'autres notions sont ajoutées au fur et à mesure, en algèbre et en analyse, on y enseigne de nouveaux contenus tous les ans. Cette orientation met en évidence l'intérêt qu'il peut y avoir à poursuivre l'enseignement de l'arithmétique au secondaire, une arithmétique qui dépasse, et de beaucoup, l'arithmétique de base souvent associée au calcul, en particulier, au calcul mental.

4.5 Le calcul mental dans l'enseignement

Les programmes de mathématiques dans l'enseignement malgache sont subdivisés en trois parties sur lesquelles les contenus sont les notions sur lesquelles s'exercent les compétences souhaitées. Ils constituent la forme la plus fréquente de définition des programmes mais sont souvent exprimés de manière ambiguë. Les contenus peuvent être des faits, des définitions, des concepts ou des relations entre faits et concepts. Ils peuvent être aussi des situations dans lesquelles l'élève sera placé et des catégories de problèmes qu'il devra pouvoir résoudre. Ainsi, nous allons voir comment se tiendra le contenu « calcul mental » dans les programmes de mathématiques dans le primaire et dans le secondaire et dans quelques manuels.

4.5.1 Le calcul mental dans les programmes et les manuels de l'école primaire

Les mathématiques sont riches de leurs sous-disciplines, au nombre desquelles nous dénombrons : l'arithmétique, la géométrie et les systèmes métriques. Les programmes mathématiques enseignées à l'école primaire à Madagascar s'articulent autour de ces trois sous-disciplines. Ils présentent des objectifs généraux. Citons ceux qui ont un rapport direct avec ce travail :

– appliquer la connaissance de nombres ;
– appliquer les stratégies de calcul pour effectuer le calcul mental.

Ces deux objectifs défissent et représentent les étapes et les techniques progressives à l'élaboration et la pratique du calcul mental. Il faut toujours mettre en rapport les deux objectifs et dans cet ordre pour affirmer la débouchée sur la pratique du calcul mental.

La rubrique calcul mental apparaît pratiquement dans tous les programmes scolaires du primaire de toute classe. Le calcul mental, présent dans toutes les classes du primaire, tient une place importante et est approfondi au calcul, à l'arithmétique, à des techniques de calcul mental, le pourcentage, les règles de trois et les systèmes métriques (mesures). On insistera beaucoup sur les calculs mentaux basés aux tables d'addition, de multiplication et à l'aide des expressions : additionner, multiplier, soustraire et diviser, et avec les petits problèmes. Les programmes du primaire donnent priorité à l'apprentissage du calcul mental en arithmétique par rapport à la géométrie qui a des contenus présentés en des simples exercices pour faire reconnaître, désigner les figures régulières les plus élémentaires, calculer les mesures de longueurs et les différentes sortes d'angles. En géométrie, on parlera beaucoup de l'observation, de la description et de la construction ; la géométrie induit alors une démarche visant à mettre l'élève en situation de conceptualisation, puis d'acquisition de savoir-faire. Tout cela fait partie du calcul mental. Apparemment, le calcul mental est plongé et adapté dans des divers contenus. Donc, le calcul mental semble important pour faire acquérir aux élèves une attitude critique et une curiosité permettant de questionner ces savoirs et de les mettre sans cesse à jour. Ce que savent les élèves compte finalement moins que ce qu'ils savent faire de leurs connaissances, aussi parle-t-on des compétences.

Les manuels de *Calcul* (Mathématique du primaire) utilisés en classe de 9$^{\text{ème}}$, de 8$^{\text{ème}}$ et de 7$^{\text{ème}}$ mentionnent que les activités de calcul mental doivent être quotidiennement et de courte durée. Un jour sur deux, l'enseignant introduit une nouvelle technique (stratégie) du calcul mental et le lendemain, il procède à une consolidation des techniques étudiées précédemment (Une équipe d'auteurs malgache, 2002c, 2002b, 2002a). Pour chaque chapitre de ces manuels, sous la dernière rubrique « *Calcul mental* » sont placées des activités de calcul mental. Finalement, le calcul mental est contenu dans toutes les diverses rubriques de mathématiques.

De plus, le calcul mental doit avoir des limites. Il ne se fera pas sur des nombres très grands. Le procédé que nous ne saurions trop préconiser est le *Procédé La Martinière* (PLM), qui consiste à faire emploi de l'ardoise, pour constater que tous les élèves ont calculé. Tous les élèves ayant les bras croisés, le maître pose la question, et la fait répéter aux élèves. Un instant est donné pour calculer. Le maître donne le signal d'écrire les résultats sur l'ardoise. D'un coup rapide, il constate ces résultats. On pourra objecter que ce procédé favorise la fraude. Cela est admis. Mais il est facile de l'éviter en variant les problèmes, c'est-à-dire en donnant aux élèves pairs une question dont les nombres diffèrent de celle des élèves impairs. Tout cela dépend des bases du calcul mental et des techniques d'opérations.

4.5.1.1 Bases du calcul mental

Le calcul mental repose sur deux bases fondamentales :
- la notion du nombre ;
- la pratique des tables d'addition et de multiplication.

Pour que l'enfant ait vraiment la notion du nombre, il faut qu'il distingue, nettement et rapidement, les éléments qui constituent un nombre quelconque.
Ainsi, $92 = 9$ *dizaines* et 2 *unités*.
Les bases du calcul mental étant données, il convient d'établir quelques règles, qu'il est bon de suivre pour que ces exercices soient fructueux ; la décomposition des nombres sur lesquels il faut opérer est la première règle à observer. Il faudra ensuite faire connaître les nombres ronds ou chiffres exacts de dizaines comme 50, 80, 100. Cela fait, il est facile d'opérer un déplacement des unités, qui simplifiera le nombre de calculs. Pour la rapidité du calcul, il est indispensable aussi de toujours commencer les opérations par les hautes unités.

Les tables d'addition et de multiplication sont indispensables. Sans elles, le calcul mental ne saurait exister ; en tous cas, il est bien certain que, privé de leur concours, l'enfant ne calculera jamais rapidement. Il faut avoir soin enfin, de faire apprendre par cur, la moitié des nombres de 1 à 100, et le double des nombres de 1 à 50. Si, à cela, on ajoute l'étude des nombres de deux en deux, puis de trois en trois, de quatre en quatre, de cinq en cinq, ...

4.5.1.2 Didactique de calcul mental sur l'addition

L'addition est l'opération qui permet de calculer la somme de deux ou plusieurs nombres. L'un des enjeux est de faire acquérir aux élèves une bonne connaissance du répertoire additif et une capacité effective de réaliser mentalement ou par écrit, sans utiliser systématiquement une technique opératoire, des calculs simples. Dans toutes les cycles, de nombreux élèves ont des difficultés parce qu'ils ne peuvent pas restituer rapidement et avec sûreté des résultats élémentaires de la table d'addition. On dit couramment qu'ils « ne savent pas leur table ». Il convient tout d'abord de s'interroger sur le sens de « savoir sa table ». Ce n'est pas nécessairement la savoir « par cœur », cela peut être aussi la possibilité de retrouver très simplement, par exercice mental, le résultat attendu. En d'autres termes, et des travaux récents l'ont montré, un élève de cet âge a deux attitudes par rapport au répertoire :

– soit il sait le résultat. C'est le cas pour certains résultats qu'il considère « simples », particulièrement les doubles ;
– soit il reconstruit le résultat, c'est-à-dire qu'il utilise ses connaissances arithmétiques pour le retrouver. Par exemple, citons le cas d'un élève qui calcule de cette manière $2 + 7$: il décide de remplacer, tout d'abord, $2 + 7$ par $7 + 2$ (utilisation implicite de la commutativité de l'addition) puis il calcule $7 + 2$ par *sur comptage*, c'est-à-dire en énonçant : « huit, neuf ».

La stratégie proposée pour l'acquisition du répertoire additif est donc la suivante :

– favoriser chez les élèves la mémorisation des résultats les plus accessibles. Ils doivent connaître dès que possible les doubles des nombres de 1 à 9, ainsi que les « amis de 10 » (sommes de deux nombres égale à 10). Il est illusoire de penser aller au-delà pour certains élèves. Souvent, une mémorisation forcée est instable et ne donne rien d'efficace. L'élève mémorisera d'autant mieux qu'il se sent sûr de lui-même et qu'il est capable de retrouver le résultat. D'où le deuxième aspect de la stratégie.
– Développer chez les élèves des procédures de « reconstruction » rapide des résultats leur permettant de résoudre dans la plupart des cas les calculs additifs qu'ils rencontrent. C'est là où le calcul réfléchi, c'est-à-dire le calcul qui s'adapte aux nombres et utilise leurs propriétés arithmétiques, trouve toute sa place.

Citons deux exemples de calculer $7 + 8$:

– un *presque double* :
  on voit le double $7 + 7 = 14$
  on calcule ensuite $14 + 1 = 15$.

– ou bien le *passage par la dizaine* : $7 + 8 = 7 + 3 + 5$, on calcule $7 + 3 = 10$, puis $10 + 5 = 15$.

Ces procédures de calcul réfléchi ne sont pas spontanées chez les élèves. Souvent, elles doivent être construites avec eux et approfondies. En particulier, il serait fâcheux que les élèves n'aient à leur disposition que la méthode du sur comptage pour obtenir les résultats.

Dès la classe de 11ème, les élèves apprennent à résoudre des problèmes additifs simples. Ils résolvent d'abord ce type de problème *par comptage*. Peu à peu, les élèves vont évoluer vers une technique plus efficace : ils *surcomptent*, c'est-à-dire qu'ils mémorisent l'une des quantités et font défiler les nombres de la file à partir d'elle au fur et à mesure qu'ils déplient les doigts. Cette démarche suppose des compétences nouvelles, notamment la capacité à démarrer la récitation de la file numérique à partir de n'importe quel nombre. L'élève qui surcompte doit donc être capable de donner le successeur immédiat d'un nombre quelconque dans la file sans avoir à réciter toute la file depuis 1. L'enseignement des stratégies de calcul mental est introduit à partir de la classe de 9ème.

En conclusion, voici les méthodes de calcul réfléchi qu'on peut raisonnablement développer chez les élèves pour les aider à mieux maîtriser le répertoire additif :

☛ le sur comptage pour calculer $n + 1$, $n + 2$, $n + 3$, ...

☛ les presque doubles ;

☛ le passage par la dizaine dans les autres cas.

Il est noté qu'il va de soi qu'il ne faudrait pas empêcher un élève de procéder autrement s'il s'est construit personnellement une méthode efficace. On comprend que le calcul réfléchi soit l'objet de nos préoccupations pédagogiques quotidiennes. Ce calcul n'est possible que si l'élève a une bonne représentation des nombres, de bonnes images mentales.

✍ **Quelques stratégies et techniques de calcul mental sur l'addition**

☞ ***Décomposition additive***

Pour additionner des nombres, on décompose termes et on additionne les parties. Par exemple $68 + 42 = 60 + 8 + 40 + 2 = 60 + 40 + 8 + 2 = 100 + 10 = 110$.

☞ ***Disposition ou fonctionnement du calcul mental (schéma dans la tête)***

Pour additionner dans ta tête, on commence par la *gauche*.

Par exemple : $423 + 315$ se fait comme $400 + 300 = 700$; $20 + 10 = 30$; $3 + 5 = 8$ et

$700+30+8=738$. Le schéma (cf. figure 4.1) ci-après représente son fonctionnement dans la tête :

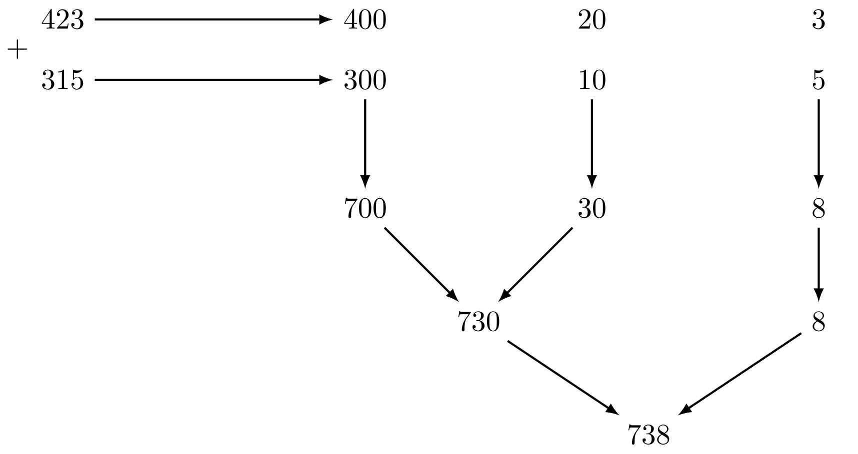


FIGURE 4.1 – Fonctionnement dans la tête de calcul $423+315$

☞ ***Recherche des nombres compatibles***

Les nombres compatibles sont des paires de nombres dont la somme est facile à utiliser dans la tête. Les paires de nombres sont compatibles : 86 et 14 dont la somme est 100 ; 260 et 340 dont la somme est 600.

Thèmes : ***Additionner des nombres ; Additionner 10 ; 100 ; 1000 ; 0,1 ; 0,01 ; 0,001 ; 0,0001 ; ... à un nombre***

☞ **Règles à retenir**

• Pour calculer la somme de deux ou plusieurs nombres, on peut décomposer ces nombres en sommes ou en différences.

• Quand on a plusieurs nombres à additionner, on peut changer l’ordre de ces nombres et les regrouper comme l’on veut.

• Additionner 10 à un nombre, c’est ajouter une dizaine à ce nombre.

• Additionner 100 à un nombre, c’est ajouter une centaine à ce nombre.

• Additionner 1000 à un nombre, c’est ajouter un mille à ce nombre.

• Additionner 0,1 à un nombre, c’est ajouter un dixième à ce nombre.

• Additionner 0,01 à un nombre, c’est ajouter un centième à ce nombre.

• Additionner 0,001 à un nombre, c’est ajouter un millième à ce nombre.

Thèmes : *Additionner 9 ; 19 ; 29 ; ... à un nombre.*

☞ **Règles à retenir**

• Additionner 9 à un nombre, c 'est ajouter 0 à ce nombre et enlever 1 du résultat obtenu.

• Additionner 19 à un nombre, c'est ajouter 20 à ce nombre et enlever 1 du résultat obtenu.

• Additionner 29 à un nombre, c'est ajouter 30 à ce nombre et enlever 1 du résultat obtenu.

• Additionner 109 à un nombre, c'est ajouter 110 à ce nombre et enlever 1 du résultat obtenu.

• Additionner 119 à un nombre, c'est ajouter 120 à ce nombre et enlever 1 du résultat.

Nous avons déjà énuméré quelques stratégies au chapitre 3.

Remarque

La maîtrise technique opératoire de l'addition est une compétence nécessaire à la fin des cycles du primaire. Deux idées essentielles doivent guider sa présentation :

1. La technique utilisée par l'élève doit avoir un sens pour lui. C'est pourquoi elle doit être l'aboutissement formalisé des manipulations qui permettent de lui donner une véritable signification.
2. Une technique opératoire ne doit pas être le seul moyen pour l'élève d'effectuer des simples opérations. Il serait regrettable qu'il se réfugie derrière la technique quoiqu'il arrive, sans avoir d'autres possibilités de calcul.

Par exemple, il ne devrait pas poser d'addition pour calculer $39 + 10$. C'est la raison pour laquelle il faut présenter, en parallèle, le calcul en ligne faisant appel à la décomposition des nombres.

4.5.1.3 Didactique de calcul mental sur la soustraction

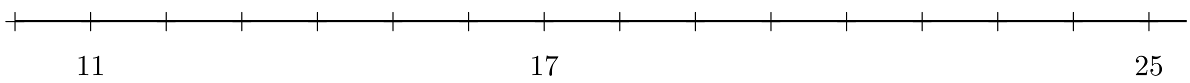
Sens de la soustraction

Le sens « enlever » de la soustraction est rapidement compris des élèves, et permet d'introduire facilement de signe « – ». On le trouve, par exemple, dans un problème du type : Marie a 18 images. Elle donne 3 images à sa sœur. Combien lui reste-t-il ? En effet, pour obtenir le résultat, l'élève peut dessiner des images et en barrer 3 ou bien, s'il effectue un réel calcul, décompter (17, 16, 15). II y est d'autant plus invité qu'on trouve dans l'énoncé la présence du mot inducteur « donne ».

Du point de vue calcul, ce sens est particulièrement adopté lorsqu'on enlève peu (par exemple

$18 - 3$: on enlève 3 en décomptant unité par unité) ou bien lorsqu'on enlève des multiples de 10, de 100 ; etc., c'est-à-dire lorsqu'on enlève un nombre entier de dizaines, de centaines, etc. Mais il faut avoir conscience qu'il ne recouvre pas toutes les situations soustractives et c'est ce que les élèves ont du mal à admettre.

Le sens « pour aller à » est bien adopté à la compréhension des problèmes arithmétiques nécessitant de chercher ce qu'on a ajouté ou de chercher une partie connaissant le tout et l'autre partie. Du point de vue du calcul, ce sens facilite la recherche du résultat d'une soustraction dans le cas où on enlève beaucoup (par exemple, pour calculer $41 - 38$, il est plus simple de procéder par sur comptage : 39, 40, 41 ; $41 - 38 = 3$).



Il en résulte la possibilité de réaliser des calculs en faisant des « bonds » sur la droite numérique :

de 11 à 17 $\longrightarrow$ 6
de 17 à 25 $\longrightarrow$ 8 $\quad 6 + 8 = 14$
de 11 à 25 $\longrightarrow$ 14

En particulier, le passage par la dizaine supérieure est ainsi mieux explicité. Une manière de traduire le complément est « l'addition à trou ». L'utilisation d'une telle écriture est délicate pour certains enfants, dans la mesure où elle rompt avec la représentation traditionnelle d'une opération (on opère sur deux nombres et on obtient un résultat) et avec la disposition opératoire : le résultat se trouve à droite (pour l'opération en ligne) ou en dessous (pour l'opération posée). Aussi, on peut faire précéder l'addition à trou d'une autre disposition plus conforme à la représentation habituelle.

La soustraction $b - a$ signifie aussi « l'écart » entre deux nombres a et b (on suppose a est inférieur à b) est le nombre qu'il faut ajouter à a pour obtenir b ainsi que le nombre qu'il faut enlever à B pour obtenir a. Du point de vue calcul, on observe que les deux sens « pour aller à » et « écart » sont assez proches, dans la mesure où le calcul de l'écart entre a et b ($a < b$) conduit généralement à aller de a à b. Cependant, le déplacement sur la droite numérique dans le sens « négatif » (de b vers a) est envisageable. Une propriété importante, mais d'une compréhension délicate, est que l'écart entre deux nombres ne varie pas si on ajoute ou on enlève la même quantité à ces deux nombres. Ainsi, l'écart entre 52 et 87 est égal à l'écart entre 50 et 85, ce qui est plus simple à calculer. En conclusion, il ne faudra pas réduire le sens écart au sens « pour aller à ». La caractéristique particulière de ce sens écart, par rapport aux précédents, est sa commutativité : l'écart entre a et b est aussi l'écart entre b et a.

✍ **Quelques stratégies et techniques de calcul mental sur la soustraction**

Nous proposons aux élèves des différentes procédures de déterminer mentalement les écarts entre les nombres. Nous attendons aux élèves de bien maîtriser les techniques de la soustraction ; ce qui nous amène avoir successivement les différents types de problèmes de calcul d'une différence ou d'une soustraction mentale des nombres.

Thème : ***Types de soustraction de nombres décimaux.***

☞ **Règles à retenir**

1° - Le plus petit nombre est un entier.

✣ On enlève l'entier de la partie entière du plus grand nombre et on ajoute le résultat obtenu à sa partie décimale.

2° - Le plus petit nombre est un décimal.

✣ Lorsque le plus grand nombre est un entier, il faut arrondir le décimal pour en faire un nombre exact d'unités puis enlever ce nombre du plus grand et ajouter le résultat obtenu au complémentaire.

✣ Lorsque la partie décimale du plus grand est supérieure à celle du plus petit nombre, on enlève successivement la partie entière puis la partie décimale du plus petit nombre à celle du plus grand et on ajoute les résultats obtenus.

✣ Lorsque la partie décimale du plus petit nombre est supérieure à celle du plus grand, on procède de la même façon que 1°.

✣ Pour soustraire deux nombres entiers, on peut les décomposer en sommes ces nombres et on fait la différence.

Thèmes : ***Soustraire 1 ; 10 ; 100 ; 1000 ; ... ; 0,1 ; 0,01 ; 0,001 ; 0,0001 ; ...à un nombre.***

☞ **Règles à retenir**

✣ Soustraire 10 à un nombre, c'est enlever une dizaine à ce nombre.

✣ Soustraire 100 à un nombre, c'est enlever une centaine à ce nombre.

✣ Soustraire 1000 à un nombre, c'est enlever un mille à ce nombre.

✣ Soustraire 0,1 à un nombre, c'est enlever un dixième à ce nombre.

✣ Soustraire 0,01 à un nombre, c'est enlever un centième à ce nombre.

✣ Soustraire 0,00 1 à un nombre, c'est enlever un millième à ce nombre.

Thèmes : ***Soustraire 9 ; 19 ; 29 ; 39 ; ... ; 99 ; ... à un nombre.***

☞ **Règles à retenir**

✣ Soustraire 9 à un nombre, c'est enlever 10 à ce nombre et ajouter 1 au résultat obtenu.

✣ Soustraire 19 à un nombre, c'est enlever 20 à ce nombre et ajouter 1 au résultat obtenu.

✣ Soustraire 99 à un nombre, c'est enlever 100 à ce nombre et ajouter 1 au résultat obtenu.

✣ Soustraire 109 à un nombre, c'est enlever 110 à ce nombre et ajouter 1 au résultat.

4.5.1.4 Didactique de calcul mental sur la multiplication

Sens de la multiplication

La multiplication est une opération qui, à partir de deux nombres, fournit un autre nombre appelé produit. Prenons l'exemple du produit de 3 et de 5 :

– il peut s'agir du résultat de l'action du nombre sur le nombre 5, afin d'obtenir l'addition de 3 fois le nombre 5 : $5+5+5$ (on peut préférer l'action du nombre 5 sur le nombre 3, par la répétition de 5 fois le nombre 3). Dans ce cas, on met en œuvre ce qu'on appelle une multiplication sur une loi externe : l'opérateur $\times 3$ agit sur le nombre 5 pour obtenir 15. Dans ce contexte, on perçoit que les nombres 3 et 5 ne jouent pas le même rôle : si l'action du nombre 3 sur le nombre 5 produit le même résultat que l'action du nombre 5 sur le nombre 3, il n'empêche que ces deux actions sont différentes.

– il s'agit de l'action conjuguée des deux nombres 3 et 5, considérés d'une manière équivalente, afin d'obtenir le produit . Dans ce cas, on considère une multiplication reposant sur loi interne, qui est privilégiée dans les diverses étapes de la scolarité. D'emblée, cette multiplication est pourvue de diverses propriétés dont la plus importante est la commutativité : l'ordre des nombres n'importe pas le produit. C'est dans ce contexte que l'élève percevra que pour calculer 20×3, on a le choix entre le calcul de 20 fois 3 et celui de 3

fois 20 et que le deuxième choix est la plus simple pour effectuer le calcul.
Comme l'on le voit facilement, ces deux conceptions de la multiplication sont complémentaires pour appréhender cette opération.

La construction du sens de la multiplication et du produit de deux nombres doit s'appuyer sur la représentation première de l'opération, c'est-à-dire sur l'idée que, quand on multiplie, on répète plusieurs fois le même nombre et qu'on obtient ainsi un nombre plus grand. Dans ce cadre, puisqu'il s'agit d'une multiplication externe, nous utilisons à dessin le mot « fois », sans recourir immédiatement au codage avec le signe $\times$, afin de ne pas introduire inutilement des confusions de sens et des contraintes de codage qui ont été évoquées précédemment.
Ainsi, 5 fois 3 est l'écriture qui exprime l'action d'additionner 5 fois le nombre 3 (on agit sur le nombre 3 en le répétant 5 fois) : 5 fois $3 = 3 + 3 + 3 + 3 + 3$. De la même manière, 3 fois 5 exprime l'action d'additionner 3 fois le nombre 4 (on agit sur le nombre 4 en répétant 3 fois) : 3 fois $5 = 5 + 5 + 5$. Comme cela a été déjà dit, ces deux actions sont distinctes mais produisent, bien sûr, le même résultat. Il convient de distinguer ici l'action du résultat obtenu. Il faut proposer aux élèves de produire différentes écritures additives répétées en relation avec le mot fois, afin d'installer ce sens premier de la multiplication. Dans ce sens, la multiplication est une *addition itérée*.

La seconde étape de la démarche consiste à introduire le signe $\times$ en faisant apparaître que « a fois b » et « b fois a » sont deux facettes d'un même nombre qu'on notera indifféremment $a \times b$ ou $b \times a$ et qu'on appellera « a multiplié par b » ou « b multiplié par a ».
Prenons l'exemple : « 4 fois 5 » donne le même résultat que « 5 fois 4 » 20. Cela correspond à un nombre qu'on appelle le produit de 4 et de 5, qu'on note 4×5 ou 5×4 et qu'on énonce « 4 multiplié par 5 » ou « 5 multiplié par 4 ».

✍ **Quelques stratégies et techniques de calcul mental sur la multiplication**

Thèmes : ***Multiplier des nombres décimaux par 10 ; 100 ; 1000 ; ... .***
☞ **Règles à retenir**

⋆ Pour multiplier un nombre décimal par 10, on déplace la virgule de 1 rang vers la droite.
⋆ Pour multiplier un nombre décimal par 100, on déplace la virgule de 2 rang vers la droite.
⋆ Pour multiplier un nombre décimal par 1000, on déplace la virgule de 3 rang vers la droite.
Remarque : même si l'on ne voit pas la virgule, on peut la faire apparaître en la plaçant après le chiffre des unités.

Thèmes : ***Multiplier des nombres décimaux par 2 ; 4 ; 8 ; ... ; 20 ; 200 ; ... .***

☞ **Règles à retenir**

⋆ Pour multiplier un nombre décimal par 2, on peut décomposer le nombre en sommes ou en différences, multiplier chaque partie du nombre par 2 et ajouter les résultats obtenus, (loi de la distributivité de l'addition par rapport à la multiplication).
⋆ Pour multiplier un nombre décimal par 4, on peut multiplier le nombre par 2 puis le résultat par 2 ; Nombre $\times$ 4 = (nombre $\times$ 2) $\times$ 2.
⋆ Pour multiplier un nombre décimal par 8, on procède comme suit :
Nombre $\times$ 8 = ((nombre $\times$ 2)$\times$ 2) $\times$ 2.
⋆ Pour multiplier un nombre décimal par 20, on procède comme suit :
Nombre $\times$ 20 = nombre $\times$ 2$\times$10.
⋆ Pour multiplier un nombre décimal par 200, on procède comme suit :
Nombre $\times$ 200 = nombre $\times$ 2 $\times$ 100.

Thèmes : ***Multiplier un nombre décimal par 11 ; 12 ; ... 101 ; 102 ;... 201 ; 202 ; ...***

☞ **Règles à retenir**

⋆ Pour multiplier un nombre décimal par 11, on le multiplie par 10 et on ajoute une fois ce nombre au produit trouvé : Nombre $\times$ 11 = (Nombre $\times$ 10) + Nombre.
⋆ Pour multiplier un nombre décimal par 12 , on le multiplie par 10 et on ajoute deux fois ce nombre au produit trouvé : Nombre $\times$ 12 = (Nombre $\times$ 10) + (Nombre $\times$ 2).
⋆ Pour multiplier un nombre décimal par 101 , on le multiplie par 100 et on ajoute une fois ce nombre au produit trouvé : Nombre $\times$ 101 = (Nombre $\times$ 100) + Nombre.
⋆ Pour multiplier un nombre décimal par 102 , on le multiplie par 100 et on ajoute deux fois ce nombre au produit trouvé : Nombre $\times$ 102 = (Nombre $\times$ 100) + (Nombre $\times$ 2).
⋆ Pour multiplier un nombre décimal par 201, 202,..., 301, 302. ... on procédera de la même manière que précédent.

Thèmes : ***Multiplier des nombres décimaux par 9 ; 98 ; 99 ;... .***

☞ **Règles à retenir**

⋆ Pour multiplier un nombre décimal par 9, on multiplie ce nombre par 10 et on enlève une fois ce nombre au produit trouvé : Nombre $\times$ 9 = (Nombre $\times$ 10) - Nombre.
⋆ Pour multiplier un nombre décimal par 19, on multiplie ce nombre par 20 et on enlève une fois ce nombre au produit trouvé : Nombre $\times$ 19 = (Nombre $\times$ 20) - Nombre.
⋆ Pour multiplier un nombre décimal par 98, on multiplie ce nombre par 100 et on enlève deux fois ce nombre au produit trouvé : Nombre $\times$ 98 = (Nombre $\times$ 100) - (Nombre $\times$ 2).
⋆ Pour multiplier un nombre décimal par 99, on multiplie ce nombre par 100 et on enlève une fois ce nombre au produit trouvé : Nombre $\times$ 99 = (Nombre $\times$ 100) - Nombre.

Thèmes : ***MultipIier des nombres décimaux par 5 ; 15 ; 25 ; 125 ; 50.***

☞ **Règles à retenir**

⋆ Pour multiplier un nombre décimal par 5, on multiplie ce nombre par 10 et on divise le produit trouvé par 2 : Nombre × 5 = (Nombre × 10)÷ 2.
⋆ Pour multiplier un nombre décimal par 15, on multiplie ce nombre par 10 et on ajoute à sa moitié : Nombre × 15 = (Nombre × 10) + (Nombre × 10) ÷ 2.
⋆ Pour multiplier un nombre décimal par 25, on multiplie ce nombre par 100 et on divise le produit obtenu par 4 : Nombre × 25 = (Nombre × 100) ÷ 4.
⋆ Pour multiplier un nombre décimal par 125, on multiplie ce nombre par 1000 et on divise le produit obtenu par 8 : Nombre × 125 = (Nombre × 1000) ÷ 8.
⋆ Pour multiplier un nombre décimal par 50, on procède comme suit :
Nombre × 50 = (Nombre × 100) ÷ 2.

Thèmes : *Multiplier des nombres décimaux par 0,25 ; 0,50 ; 0,125 ; 1,25 ; 1,50.*

☞ **Règles à retenir**

⋆ Pour multiplier un nombre décimal par 0,25, on divise ce nombre par 4 :
Nombre × 0,25 = Nombre ÷ 4 (on prend le quart).
⋆ Pour multiplier un nombre décimal par 0,50, on divise ce nombre par 2 :
Nombre × 0,5 = Nombre ÷ 2 (on prend la moitié).
⋆ Pour multiplier un nombre décimal par 0,125, on divise ce nombre par 8 :
Nombre × 0,125 = Nombre ÷ 8 (on prend le huitième).
⋆ Pour multiplier un nombre décimal par 1,25, on ajoute ce nombre à son quart :
Nombre × 1,25 = Nombre + (Nombre ÷ 4).
⋆ Pour multiplier un nombre décimal par 1,50, on ajoute ce nombre à sa moitié :
Nombre × 1,50 = Nombre + Nombre ÷ 2.

Remarque importante : Pour tout calcul du produit de deux nombres, l'emploi de la décomposition en sommes ou différences facilite et rend le calcul de manière performance.

4.5.1.5 Didactique de calcul mental sur la division

Sens de la division

« Diviser un nombre a par un nombre non nul b » est très vague ; elle fait apparaître plusieurs types de quotients (entiers, décimaux non entiers et autres) et plusieurs divisions dont nous allons préciser les définitions.

La division est une opération qui a pour but de partager un nombre donné en autant de parties égales qu'il y a d'unités dans un autre nombre donné. Le nombre à partager s'appelle le *dividende* ; celui qui indique le nombre des parties à obtenir s'appelle le *diviseur* ; et le résultat de l'opération, c'est-à-dire l'une des parties demandées, porte le nom de *quotient*.
Si, par exemple, on demande de partager 40 en 5 parties égales, auquel cas chacune des parties demandées sera 8, le nombre 40 sera le dividende, 5 le diviseur et 8 le quotient. On peut remarquer que si l'on répète l'une des parties trouvées, autant de fois qu'il y a de parties, on doit obtenir le nombre à partager ; ainsi, dans l'exemple ci-dessus, 5 fois 8 font bien 40. C'est ce qu'on exprime généralement en disant que *le dividende est le produit du quotient par le diviseur*. Mais la même opération peut être présentée sous un autre point de vue. Puisque 40 contient 5 parties égales chacune à 8, et que 5 fais 8 est la même chose que 8 fois 5, on peut dire que l'opération a pour but de chercher combien de fois 5 est contenu dans 40, ou, en général combien de fois le diviseur est contenu dans le dividende ; le résultat 8, exprimant ce nombre de fois, s'appelle *quotient*.
Sous ce point de vue, le *dividende est regardé comme le produit du diviseur par le quotient*. Enfin, comme dans ces deux manières d'envisager la division, le dividende est un produit dont les deux facteurs sont le diviseur et le quotient ; on peut dire que la division a pour but, *étant donné un produit de deux facteurs*, appelé dividende, et *l'un de ses facteurs*, appelé diviseur, de trouver l'autre facteur, appelé quotient.

Dans l'activité de résolution de problèmes, certains élèves sont capables de modéliser la situation par anticipation, par réflexe, d'autres ont en revanche besoin de commencer à faire quelque chose pour être capable de réussir. Dans le cas des petits nombres, ils arrivent ainsi assez vite à résoudre des situations par des procédés économiques, mettant en jeu peu d'algorithmes.

✍ **Quelques stratégies et techniques de calcul mental sur la division**

Thèmes : ***Diviser un entier, Diviser des nombres décimaux par 10 ; 100 ; 1000 ; ... 0,1 ; 0,01 ; 0,001 ; 0,0001 ; ...***

☞ **Règles à retenir**

✶ Pour diviser un entier par un nombre, on peut décomposer le nombre en sommes comme on veut, on divise chaque partie par ce nombre et on ajoute les résultats obtenus.
✶ Pour diviser un entier par un nombre décimal par 10, on déplace la virgule d'un rang vers la gauche.
✶ Pour diviser un entier par un nombre décimal par 100, on déplace la virgule de deux rang vers la gauche.
✶ Pour diviser un entier par un nombre décimal par 1000, on déplace la virgule de trois rang vers la gauche.
✶ Pour diviser un entier par un nombre décimal par 0,1, on déplace la virgule d'un rang vers la droite.
✶ Pour diviser un entier par un nombre décimal par 0,01, on déplace la virgule de deux rang vers la droite.
✶ Pour diviser un entier par un nombre décimal par 0,001, on déplace la virgule de trois rang vers la droite.

Thèmes : ***Diviser des nombres décimaux par 2 ; 4 ; 8 ; ...20 ; 200 ;...3 ; 30 ; 300 ...***

☞ **Règles à retenir**

✶ Pour diviser un nombre par 2, on peut décomposer le nombre en sommes, diviser par 2 chaque partie du nombre et ajouter les résultats obtenus.
✶ Pour diviser un nombre par 4, on peut le diviser par 2, puis le résultat obtenu par 2 : $\text{Nombre} \div 4 = (\text{Nombre} \div 2) \div 2$.
✶ Pour diviser un nombre par 8, on peut le diviser par 2, puis le résultat obtenu par 2, et enfin le résultat obtenu par 2 : $\text{Nombre} \div 8 = ((\text{Nombre} \div 2) \div 2) \div 2$.
✶ Pour diviser un nombre par 20, on peut le diviser par 2, puis le résultat obtenu par 10 : $\text{Nombre} \div 20 = (\text{Nombre} \div 2) \div 10$.
✶ Pour diviser un nombre par 200, on peut le diviser par 2, puis le résultat obtenu par 100 : $\text{Nombre} \div 200 = (\text{Nombre} \div 2) \div 100$.
✶ Pour diviser un nombre décimal par 3, 30, 300, ..., on procède de la même manière.

Thèmes : ***Diviser des nombres décimaux par 5 ; 25 ; 50 ; 75 ; 125 ; 50 ; 500 ; ...***

☞ **Règles à retenir**

✶ Pour diviser un nombre décimal par 5, on peut multiplier le nombre par 2 et on divise le résultat obtenu par 10 : Nombre $\div$ 5 = (Nombre $\times$ 2) $\div$ 10.
✶ Pour diviser un nombre décimal par 25, on peut multiplier le nombre par 4 et on divise le résultat obtenu par 100 : Nombre $\div$ 25 = (Nombre $\times$ 4) $\div$ 100.
✶ Pour diviser un nombre décimal par 50, on peut diviser le nombre par 5 et on divise le résultat obtenu par 10 : Nombre $\div$ 50 = (Nombre $\div$ 5) $\div$ 10.
✶ Pour diviser un nombre décimal par 75, on peut multiplier le nombre par 4 et on divise le résultat obtenu par 3 et par 100 : Nombre $\div$ 75 = ((Nombre $\times$ 4) $\div$ 3) $\div$ 100.
✶ Pour diviser un nombre décimal par 125, on peut multiplier le nombre par 8 et on divise le résultat obtenu par 1000 : Nombre $\div$ 125 = (Nombre $\times$ 8) $\div$ 1000 .

Thèmes : ***Diviser des nombres décimaux par 0,125 ; 0,25 ; 0,50 ; 0,75 ; 1,25 ; 1,50 ; ...***

☞ **Règles à retenir**

✶ Pour diviser un nombre décimal par 1,5, on peut multiplier le nombre par 2 et on divise le résultat obtenu par 3 : Nombre $\div$ 1,5 = (Nombre $\times$ 2) $\div$ 3.
✶ Pour diviser un nombre décimal par 1,25, on peut multiplier le nombre par 8 et on divise le résultat obtenu par 10 : Nombre $\div$ 1,25 = (Nombre $\times$ 8) $\div$ 10.
✶ Pour diviser un nombre décimal par 0,75, on peut multiplier le nombre par 4 et on divise le résultat obtenu par 3 : Nombre $\div$ 0,75 = (Nombre $\times$ 4) $\div$ 3.
✶ Pour diviser un nombre décimal par 0,5, on peut multiplier par 2 : Nombre $\div$ 0,5 = Nombre $\times$ 2.
✶ Pour diviser un nombre décimal par 0,25, on peut multiplier par 4 : Nombre $\div$ 0,25 = Nombre $\times$ 4.
✶ Pour diviser un nombre décimal par 0,125, on peut multiplier par 8 : Nombre $\div$ 0,125 = Nombre $\times$ 8.

Thèmes : ***Fractions ; Pourcentages ...***

☞ **Règles à retenir**

✦ Pour additionner (ou soustraire) deux fractions de même dénominateur, il suffit d'additionner (ou de soustraire) les numérateur et le dénominateur restant inchangé : $\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b}$; $\frac{a}{b} - \frac{c}{b} = \frac{a-c}{b}$

✦ Pour additionner (ou soustraire) deux fractions de dénominateurs différents, il faut les rendre au même dénominateur : $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \times d + b \times c}{b \times d}$; $\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{a \times d - b \times c}{b \times d}$; $\frac{a}{b} + c = \frac{a+bc}{b}$

✦ Pour multiplier une fraction par une fraction, il faut multiplier le numérateur par le numérateur et le dénominateur par le dénominateur : $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$; $a \times \frac{b}{c} = \frac{ab}{c}$

✦ Pour simplifier une fraction, on divise son numérateur et son dénominateur par un même nombre non nul c : $\frac{a}{b} = \frac{a \div c}{b \div c}$

4.6 Le calcul mental dans l'école secondaire

4.6.1 Place du calcul mental dans le programme scolaire du secondaire

Les programmes du Collège (secondaire premier cycle) mettent bien l'accent sur la géométrie. Ils s'articulent autour des deux grands thèmes :

- Activités numériques constituées de calcul numérique, organisation de calcul - calcul littéral et de l'organisation des données ;
- Activités géométriques constituées de la configuration de l'espace, des configurations planes, des transformations du plan et de la géométrie analytique.

Tandis que ceux du Lycée (second cycle) s'articulent autour d'Analyse, d'Algèbre, d'Arithmétique, de Probabilités et Statistiques, et de la Géométrie.

Dans les programmes de mathématiques du secondaire (Collège et Lycée) ne figure pas la rubrique « calcul mental ». Les programmes du primaire basés sur les calculs mentaux sont élargis, prolongés et approfondis dans le secondaire. Les élèves qui ont déjà à eux la maîtrise du calcul mental accèdent ou s'adaptent dans les classes du secondaire. L'enseignement de mathématiques dans le secondaire est basé sur l'utilisation des règles et des propriétés ; il n'a pas moins d'exercices dans le secondaire qui demandent la pratique du calcul mental. Les élèves utilisent l'héritage des connaissances acquises dans les classes antérieures. Les techniques du calcul mental sont acquises progressivement, continuellement et rigoureusement adaptées dans diverses situations étudiées dans le secondaire. Ces techniques sont maîtrisées et conservées. Il y a beaucoup de manuels qui présentent de multiples occasions de pratiquer le calcul mental et rapide ; par exemple : donner une estimation d'une somme ou d'un produit, simplifier une fraction, trouver la somme ou la différence ou le produit de deux nombres, trouver le produit de puissances de nombre entier naturel...Tout cela fait partie du calcul mental. Les programmes de la rubrique « calcul mental » continuent et évoluent dans le secondaire.

D'après les paragraphes précédents, il appartient donc aux professeurs d'expliquer et de produire que la pratique du calcul mental soit nécessaire à un tel exercice ; il y a lieu de redonner une place plus importante au calcul mental dans tous les niveaux, il contribue à accroître la connaissance indispensable sur un thème étudié. Même s'il n'existe pas de méthodologie ni une place dans les programmes officiels, ni un temps dédié à la pratique du calcul mental ; celle-ci reste encore ouverte, si importante pour la formation des jeunes d'aujourd'hui en mathématique. La rubrique « calcul mental » améliore les continuités et assure une cohérence entre les thèmes et dans chacun des niveaux ; elle développe, concrétise les capacités des élèves dans le calcul ; elle n'est pas laissée de côté. Ainsi, le calcul mental est bien placé et n'est pas absent dans le secondaire ; il est caché dans les règles et dans les propriétés.

4.6.2 Nouvelles formes du calcul mental dans le secondaire : la Mathématique mentale et la schématisation

4.6.2.1 Introduction et motivation

Les mathématiques sont une discipline fondamentale en ce sens qu'elles fournissent des outils indispensables à toute démarche scientifique. Cette démarche doit être un instrument pour plus de lucidité, donc pour plus de liberté. Les approches de l'enseignement du nombre se sont développées au cours des deux dernières décennies, vers l'accent actuel sur le « raisonnement mathématique plutôt que sur la rapidité et la précision et sur la compréhension conceptuelle plutôt que sur les procédures » (Yackel, Underwood et Elias, 2007). Les mathématiques sont maintenant perçues comme une activité de compréhension, qui est une approche très différente de ce que de nombreux enseignants de mathématiques actuels ont vécu en tant qu'étudiants eux-mêmes (Tsao, 2004).

Le nombre, l'opération et le calcul ont une longue et importante histoire dans le programme de mathématiques de l'école. En outre, ce domaine des mathématiques, peut-être plus que tout autre, est largement reconnu et valorisé au-delà du cadre scolaire. Pour développer les compétences de calcul en classe, une pratique courante pour de nombreux enseignants implique une modélisation explicite des étapes prescrites pour les étudiants, avant de donner aux étudiants des occasions répétées. Cependant, il est discutable que les élèves acquièrent réellement une réelle compréhension de ce qu'ils font ou apprennent simplement à survivre en mémorisant des procédures. La compréhension réelle peut devenir une réflexion après coup si les élèves produisent la réponse désirée inefficace pour aider les élèves à apprendre à faire face aux exigences quantitatives de la société moderne. Globalement, les éducateurs du monde entier reconnaissent qu'il est nécessaire d'adapter l'éducation numérique de longue date, afin de faire correspondre ces nouveaux développements et besoins numériques dans le monde d'aujourd'hui. Les programmes scolaires révisés ont déplacé leur attention vers le développement d'une compréhension plus profonde du nombre, en mettant l'accent sur la création de sens plutôt que sur la mémorisation des procédures par cœur. Afin de répondre à ces besoins, un élément souvent mis en œuvre dans la classe de mathématiques pour développer et améliorer le sens du nombre est le « calcul mental ».
Pour progresser, il faut s'entrainer, mettre en place diverses stratégies pour que les choses deviennent naturelles. On distingue deux aspects du calcul mental : le calcul automatisé et le calcul réfléchi qui seront décrits ultérieurement. Les termes, d'une époque à une autre, ont quelque peu varié. En première approximation, on peut être tenté d'opposer le calcul mental au calcul écrit ou instrumenté. Mais pratiquer un calcul mental ne signifie pas que tout se passe sans écrire. L'expression « calcul mental » n'implique pas qu'aucun support écrit ne puisse intervenir dans la consigne, dans la formulation du résultat, voire des résultats intermédiaires (Butlen et Pezard, 2000). Ce qu'on désigne sous le terme de calcul écrit (l'opération posée) requiert la connaissance des tables et la gestion des retenues, donc du calcul mental déjà mais encore trop léger.

D'une part, quant à la multiplication mentale de deux facteurs, il en existe plusieurs procédures. Prenons deux exemples de procédures de calcul de 35×14 :

- *Procédure 1* (décomposition additive d'un des facteurs et distributivité de la multiplication par rapport à l'addition) : $(35 \times 10) + (35 \times 4) = 350 + 140 = 490$.
- *Procédure 2* (décomposition multiplicative, l'associativité) : $35 \times 14 = 35 \times (2 \times 7) = (35 \times 2) \times 7 = 70 \times 7 = 490$.

Par contre, dans le cas où les deux facteurs sont des entiers premiers, par exemple 37×13, en appliquant la *Procédure 1* (décomposition additive d'un des facteurs et distributivité de la multiplication par rapport à l'addition), on a : $(37 \times 10) + (37 \times 2) + (37 \times 1) = 370 + 74 + 37 = 300 + 70 + 70 + 30 + 4 + 7 = 481$. Tandis que, la *procédure 2* (décomposition multiplicative, l'associativité) s'avère impossible. Alors, il faut recourir à d'autres méthodes.

Voilà pourquoi, convaincu de la facilité d'additionner par rapport à multiplier mentalement, nous allons utiliser une procédure basée sur la schématisation et le choix d'un facteur auxiliaire de référence tout en facilitant le calcul de produit ; ainsi, le choix de référence doit se faire parmi les multiples de 10. En effet, pour effectuer le calcul de $x.10^n$, il suffit de rajouter n zéros à droite de x. Notre étude se rapporte à l'apprentissage du calcul mental, notamment la multiplication mentale de deux facteurs, selon la technique schématique en utilisant des rectangles et des ellipses reliées par des flèches. Par ailleurs, ce choix d'apprentissage sur schéma se justifie par le fait qu'une figure est psychologiquement plus rapidement et durablement perceptible par l'effet visuel qu'une suite des phrases en mots bien agencés. C'est une nouvelle procédure de calcul réfléchi dont les procédures intermédiaires sont représentées à l'aide des schémas et la décomposition du produit initial en plusieurs additions simples. La schématisation peut être une aide méthodologique importante pour aider les élèves à surmonter leurs difficultés de retenir mentalement des procédures intermédiaires (Lowe, 1996). Or la schématisation n'est pas une activité évidente et naturelle pour eux. S'est alors posée la question suivante : quelles sont les aides à la schématisation de l'algorithme de multiplication mentale à référence de deux facteurs entiers proposés aux élèves ?

D'autre part, les mathématiques mentales, définies généralement comme les mathématiques dans la tête, sont de plus en plus répandues dans les classes de mathématiques et les programmes d'études prescrits dans le monde entier (Callingham, 2005 ; T. J. Cooper, A. M. Heirdsfield et Irons, 1996 ; Hartnett, 2007). Le calcul mental exige plus que la mémorisation d'un certain nombre de procédures apprises, mais plutôt une connaissance plus approfondie du fonctionnement des nombres (Hartnett, 2007 ; Maclellan, 2001). Dans son travail, Maclellan (2001) décrit que les stratégies de mathématiques mentales sont comme « variables, flexibles, créatives et idiosyncratiques », et demandent à l'enfant d'être actif. Mais comment exactement l'exploration et le développement de la « maîtrise du calcul mental » devraient se dérouler dans la salle de classe lors de l'enseignement de mathématiques (dans l'activité numérique et géométrique pour le Collège, et l'Analyse, l'Algèbre, l'Arithmétique, la Probabilités, Statistiques, et la Géométrie pour le Lycée). Alors que les exercices de mathématiques mentales semblent être encapsulés régulièrement dans la classe de mathématiques, est-ce que ces types d'activités donnent aux élèves l'occasion de comprendre, de développer et de développer ces compétences de manière à améliorer leur perception générale du nombre et autres connaissances mathématiques ?

Les objectifs mis en jeux de ce travail : Thompson (2010a) affirme qu'il y a quatre raisons de développer le calcul mental :

1. la méthode de calcul la plus populaire chez les adultes est mentale ;
2. le travail mental facilite une meilleure compréhension du système numérique ;
3. les compétences de résolution de problèmes se développent avec l'exposition aux calculs mentaux ; et
4. les calculs.

La recherche approfondie de Thompson (Thompson, 1994, 1999, 2010a, 2010b) suggère le large éventail d'avantages de développer des compétences en mathématiques mentales dans la salle de classe. Bien que ce soit le cas, il semble que de nombreux éducateurs hésitent encore à embrasser et explorer pleinement les compétences en mathématiques mentales dans la salle de classe de la manière prévue. Une raison possible à cela est la prédominance de longue date des algorithmes dans l'éducation du sens du nombre.

4.6.2.2 Les astuces et techniques des calculs mentaux au collège

Thèmes : ***Multiplication des décimaux par 0,1 ; 0,01 , ; 0,001 ; 0,001 ordre de grandeur d'un produit et rangement.***

⋆ **Règles à retenir**

⋆ Pour multiplier un décimal par 0,1, on déplace la virgule d'un rang vers la gauche.

⋆ Pour multiplier un décimal par 0,01, on déplace la virgule de deux rang vers la gauche.

⋆ Pour multiplier un décimal par 0,001, on déplace la virgule de trois rang vers la gauche.

Thèmes : ***Simplification - Développement - Factorisation et Equation ...***

☞ **Règles à retenir**

⋆ Pour simplifier une fraction, on peut diviser le numérateur et le dénominateur de la fraction par un même nombre non nul (par leur PGCD).
⋆ $a(b+c) = ab + ac$.
⋆ $ax = b \Longleftrightarrow x = \dfrac{b}{a}$, avec $a \neq 0$.
⋆ $ax + b = 0 \Longleftrightarrow x = -\dfrac{b}{a}$, avec $a \neq 0$.

Thèmes : ***Calcul d'aires, puissances, factorisation, développement, relation de Chasles ...***

☞ **Règles à retenir**

⋆ L'aire d'un rectangle de longueur L et de largeur l est : $L \times l$.
⋆ L'aire d'un carré de côté c est : $c \times c$.
⋆ L'aire d'un triangle de base b et de hauteur h est : $\dfrac{(b \times h)}{2}$.
⋆ L'aire d'un cercle de rayon r est : πr^2.
⋆ L'aire d'un trapèze de grande base B et de petite base b et de hauteur h est : $\dfrac{(R+h)}{2} \times h$.
⋆ $(a^m)^p = a^{m \times p}$; $(a^m) \times (a^p) = a^{m+p}$; $(ab)^m = a^m \times b^m$.
⋆ Pour factoriser une expression, on peut utiliser les identités remarquables : $ab+ac = a(b+c)$; $a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$; $a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2$ et $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$.
⋆ Pour développer une expression, on peut utiliser ces identités remarquables ci-dessous : $a(b+c) = ab + ac$; $(a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd$; $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$; $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ et $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$.
⋆ $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ (Relation de Chasles).

Thèmes : ***Applications des identités remarquables, équations.***

☞ **Règles à retenir**

✯ *Carré d'un nombre terminé par 1* : on peut décomposer ce nombre en deux sommes dont la 2ème partie est 1, c'est-à-dire $n^2 = (d+1)^2 = d^2 + 2d + 1$.
✯ *Carré d'un nombre terminé par 9* : on peut ajouter 1 à ce nombre , on retranche formellement 1 et on applique l'identité « carré d'une différence » : $n^2 = [(n+1)-1]^2$.
✯ *Carré d'un nombre terminé par 9* : soit d le nombre de dizaine de a et on écrit $a = 10d + 5$ et $a^2 = (10d+5)^2 = 100d(d+1) + 25$.
✯ L'équation $x + b = a$ admet pour solution $x = a - b$.
✯ L'équation $ax + b = 0$, avec $a \neq 0$, admet pour solution $x = -\frac{b}{a}$.
✯ L'équation $(ax+b)(cx+d) = 0$, avec $a \neq 0$ et $c \neq 0$, admet pour solution $x = -\frac{b}{a}$ ou $x = -\frac{d}{c}$.

Thèmes : *Fractions, PPCM, PGCD, Homothéties, ...*

☞ **Règles à retenir**

⋆ Pour simplifier une fraction, on peut utiliser :
- la recherche des diviseurs communs de numérateur et du dénominateur et on divise chaque terme par ce diviseur.
- les simplifications successives moyennant les critères de divisibilité.
- la décomposition du numérateur et du dénominateur en facteurs premiers (procéder le PGCD du numérateur et du dénominateur)

⋆ Pour réduire des fractions au même dénominateur, on peut utiliser :
- le produit des dénominateurs.
- la recherches des premiers multiples communs non nuls des dénominateurs.
- la décomposition des dénominateurs en produit de facteurs premiers ; il est plus aisé d'obtenir le plus petit dénominateur commun c'est le PPCM.

⋆ Un nombre est divisible par 2 s'il est terminé par 0, 2, 4, 6 ou 8 (ou s'il est pair).
⋆ Un nombre est divisible par 3 si la somme de ses chiffres est un multiple de 3 (divisible par 3).
⋆ Un nombre est divisible par 5 s'il est terminé par 0 ou 5.
⋆ Un nombre est divisible par 9 si la somme de ses chiffres est un multiple de 9 (divisible par 9).
⋆ Un nombre est divisible par 11 si la somme des chiffres de rang impair à partir de la droite diminuée de la somme des chiffres de rang pair est divisible par 11.

4.6.2.3 Les calculs mentaux au lycée

Thèmes : ***Identités remarquables, équations, fonctions usuelles et leurs associées, ...***
☞ **Règles à retenir**

✪ $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$; $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$; $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$.
✪ Forme canonique de $f(x) = ax^2 + bx + c$ est $f(x) = a[(a + \frac{b}{a})^2 - (\frac{b^2 - 4ac}{4a^2})]$.
✪ La courbe $(\mathcal{C})$ d'équation $f(x) = u(x-a)$ est une courbe associée à la courbe de la fonction u dans un repère ($O; \vec{i}, \vec{j}$) dans la translation de vecteur de coordonnées $(a; 0)$ dans un repère $(O'(a; 0); \vec{i}, \vec{j})$.
✪ La courbe $(\mathcal{C})$ d'équation $f(x) = u(x) + b$ est une courbe associée à la courbe de la fonction u dans un repère ($O; \vec{i}, \vec{j}$) dans la translation de vecteur de coordonnées $(0; b)$ dans un repère $(O'(0; b); \vec{i}, \vec{j})$.
✪ La courbe $(\mathcal{C})$ d'équation $f(x) = u(x-a) + b$ est une courbe associée à la courbe de la fonction u dans un repère ($O; \vec{i}, \vec{j}$) dans la translation de vecteur de coordonnées $(a; b)$ dans un repère $(O'(a; b); \vec{i}, \vec{j})$.
✪ L'équation $ax + b = 0$, (avec a non nul), admet $x = -\frac{b}{a}$ comme solution.
✪ $A \times B = 0 \Longleftrightarrow A = 0$ ou $B = 0$; $E = F \Longleftrightarrow E - F = 0$.

Thèmes : *Vecteurs du plan, homothéties, théorèmes de Thalès, équations et systèmes d'équations linéaires, trigonométries, ...*

☞ **Règles à retenir**

✪ ABCD est un parallélogramme $\Longleftrightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ ou $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD}$ ou $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ ou $\overrightarrow{DA} = \overrightarrow{CB}$.

✪ Relation de Chasles : $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$.

✪ Deux vecteurs sont colinéaires si l'un est le produit de l'autre par un nombre : $\overrightarrow{CD} = k\overrightarrow{AB}$.

✪ L'homothétie de centre I, de rapport k et qui transforme M en M' est traduite par l'égalité vectorielle : $\overrightarrow{IM'} = k\overrightarrow{IM}$.

✪ *Théorèmes de Thalès* :

– Si les triangles ABC et AMN ont leurs troisièmes côtés parallèles alors ils ont leurs cotes proportionnels $\dfrac{AM}{AB} = \dfrac{AN}{AC} = \dfrac{MN}{BC}$.

– Si $\dfrac{AM}{AB} = \dfrac{AN}{AC}$ alors les droites (MN) et (BC) sont parallèles.

✪ *Théorème de Pythagore* : ABC est un triangle rectangle en $A \Longleftrightarrow AB^2 + AC^2 = BC^2$.

✪ Un point A appartient à une droite si ses coordonnées vérifient l'équation de cette droite.

✪ Le couple $(x_o; y_o)$ est une solution d'un système s'il vérifie les équations du système.

✪ Les droites d'équations $y = ax + b$ et $y = a'x + b$ sont parallèles $\Longleftrightarrow a = a'$.

✪ Les droites d'équations $y = ax + b$ et $y = a'x + b$ sont perpendiculaires $\Longleftrightarrow aa' = -1$.

✪ Si $a + b \neq 0$, alors le barycentre du système des points $\{(A, a), (B, b)\}$ est donné par une relation vectorielle : $\overrightarrow{IG} = \dfrac{1}{a+b}(a\overrightarrow{IA} + b\overrightarrow{IB})$.

Thèmes : *Suites, Limites, dérivabilité, approximation, ...*

☞ **Règles à retenir**

✪ Si (U_n) est une suite arithmétique de raison r, alors on a :
- $U_n = U_p + (n-p)r$, $\forall n \geq p \geq 1$, $U_n = U_o + nr$.
- la somme $S = U_o + U_1 + ... + U_{n-1} + U_n = \dfrac{(n+1)(U_0 + U_n)}{2}$.
- la somme $T = U_p + U_{p+1} + ... + U_{n-1} + U_n = \dfrac{(n+1-p)(U_p + U_n)}{2}$.

✪ Si (U_n) est une suite géométrique de raison q, alors on a :
- $U_n = U_p \times q^{(n-p)}$, $\forall n \geq p \geq 1$, $U_n = U_o \times q^n$.
- la somme $S = U_o + U_1 + ... + U_{n-1} + U_n = \dfrac{U_0(1-q^{n+1})}{1-q}$.
- la somme $T = U_p + U_{p+1} + ... + U_{n-1} + U_n = \dfrac{U_p(1-q^{n+1-p})}{1-q}$.

✪ Si f est dérivable en a, alors le coefficient directeur de f au point a est $f'(a)$.

✪ Si f est dérivable en a, alors l'équation de la tangente au point a est donnée par : $y = f'(a)(x-a) + f(a)$.

✪ Si f est dérivable en a, alors une valeur approchée de $f(a+h)$ pour h petit est $f(a+h) \cong f'(a) + hf(a)$.

✪ Si g est dérivable sur I, alors pour tout x tel que $(ax+b) \in I$, l'application f ,qui à x associe $f(x) = g(ax+b)$ est dérivable et $f(x) = ag'(ax+b)$.

Thèmes : ***Equations comportant les logarithmes et exponentielles népériennes , Equations différentielles, ...***

☞ **Règles à retenir**

Equations comportant les logarithmes et exponentielles népériennes :

✪ Donner l'ensemble D de résolution de l'équation

✪ Ramener à l'équation de type $\ln[f(x)] = \ln[g(x)]$ ou $\exp[f(x)] = \exp[g(x)]$

✪ Résoudre dans D l'équation $f(x) = g(x)$

✪ Ne retenir que les solutions qui appartiennent à D.

✪ $\ln x = m \Longleftrightarrow x = e^m$

✪ $e^x = m \Longleftrightarrow x = \ln m$, avec $m > 0$

Equations différentielles :

✪ Les solutions de l'équation différentielles $y' + ay = 0$ sont les fonctions f définies par $f(x) = ke^m$ où k est un nombre réel.

✪ Les solutions de l'équation différentielles $y'' + w_2 y = 0$ sont les fonctions f définies par $f(x) = A\cos wx + B\sin wx$, où A et B sont des nombres réels.

Thèmes : ***Somme des carrés et des cubes, reste d'une division, ...***

☞ **Règles à retenir**

✪ La somme $1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$.

✪ La somme $2^2 + 4^2 + 6^2 + ... + (2n)^2 = \frac{3}{3}n(n+1)(2n+1)$.

✪ La somme $1^2 + 3^2 + 52 + ... + (2n-1)^2 = \frac{1}{3}n(2n-1)(2n+1)$.

✪ La somme $1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3 = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2$.

✪ La somme $2^3 + 4^3 + 6^3 + ... + (2n)^3 = 2n^2(n+1)^2$.

✪ La somme $1^3 + 3^3 + 5^3 + ... + (2n-1)^3 = n^2(2n^2-1)$.

✪ Pour calculer le reste d'une division, on pourra s'aider d'une décomposition additive favorable.

✪ Le reste d'une division d'un naturel par 2 (respectivement 5) est le reste de la division par 2 (respectivement 5) de son chiffre de droite.

✪ Le reste d'une division d'un naturel par 3 (respectivement 9) est le reste de la division par 3 (respectivement 9) de la somme de ses chiffres.

✪ Le reste d'une division d'un naturel par 4 (respectivement 25) est le reste de la division par 4 (respectivement 25) du naturel formé des deux chiffres de droite.

✪ Le reste d'une division d'un naturel par 11 est le reste de la division par 11 de la somme des chiffres de rang impair à partir de droite diminuée de la somme des chiffres de rang pair.

Thème : ***Calcul des primitives d'une fonction continue***

☞ **Règles à retenir**

TABLEAU 4.3 – Primitives usuelles

Fonction (dérivée) f	**Fonction primitive** F
$f(x) = x^n$, avec $n \in \mathbb{Q} - \{-1\}$	$F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1} + k$, où $k \in \mathbb{R}$
$f(x) = [u(x)]'[u(x)]^n$, avec $n \in \mathbb{Q} - \{-1\}$	$F(x) = \frac{[u(x)]^{n+1}}{n+1} + k$, où $k \in \mathbb{R}$
$f(x) = \frac{1}{x}$, pour tout $x \neq 0$	$F(x) = \ln \lvert x \rvert + k$, où $k \in \mathbb{R}$
$f(x) = \frac{u(x)}{u'(x)}$, avec $u(x) \neq 0$	$F(x) = \ln \lvert u(x) \rvert + k$, où $k \in \mathbb{R}$
$f(x) = u'(x)e^{u(x)}$	$F(x) = e^{u(x)} + k$, où $k \in \mathbb{R}$
$f(x) = \cos ax$, avec $a \neq 0$	$F(x) = \frac{1}{a} \sin ax + k$, où $k \in \mathbb{R}$
$f(x) = \sin bx$, avec $b \neq 0$	$F(x) = -\frac{1}{b} \cos bx + k$, où $k \in \mathbb{R}$

Remarques : Dans tout calcul de primitive d'une fonction, il faut faire apparaître $\frac{u'}{u}$ ou décomposer la fonction en sommes des fonctions dont on connaît des primitives.

4.6.3 Notre approche sur la multiplication mentale : enseignement-apprentissage par schématisation

Motivations :

Notre approche pédagogique et didactique de schématisation est motivée par le fait que le schéma est plus percutant à la psychologie humaine comparativement aux phrases et mots.
Par exemple, pour maîtriser la circulation dans la ville d'Antsiranana, nous devons avoir un plan de route (cf. la figure 4.2) dans la tête, puisque la psychologie humaine retient facilement le dessin. Comme un plan est un dessin, un graphe ou un schéma, nous avons besoin d'une schématisation dans la tête. Aussi, nous connaissons sérieusement cette ville car nous avons souvent parcourus toutes les routes. Par ailleurs, nous savons tous que après une longue période de séparation due aux multiples circonstances (des années, parfois des dizaines d'années), on se souvient toujours un ancien ami ou condisciple par son visage alors que son nom est facilement oublié : « ah ! Je reconnais le visage, ..., mais je ne retrouve plus le nom ! ... ». Or un visage est une figure, c'est un dessin ! Ce qui montre que les mots comme la parole s'envolent / se volatilisent plus rapidement de la mémoire humaine, alors que la figure / le dessin / le schéma demeure plus durablement dans la mémoire ! D'où le schéma reste ainsi facilement bien imprimé dans la tête.

FIGURE 4.2 – Plan partiel d'Antsiranana

Pour le 2ème exemple, historiquement, la théorie des graphes débute peut-être avec les travaux d'Euler et trouve son origine dans l'étude de certains problèmes, tels que celui des ponts de Königsberg (cf. la figure 4.3, les habitants de Königsberg se demandaient s'il était possible, en partant d'un quartier quelconque de la ville, de traverser tous les ponts sans passer deux fois par le même et de revenir à leur point de départ), la marche du cavalier sur l'échiquier ou le problème de coloriage de cartes. La théorie des graphes s'est alors développée dans diverses disciplines telles que la chimie, la biologie, les sciences sociales, et pourquoi pas en calcul mental ? Depuis le début du XXème siècle, elle constitue une branche à part entière des mathématiques, grâce aux travaux de König, Menger, Cayley puis de Berge et d'Erdös. Les graphes constituent donc une méthode de pensée qui permet de modéliser une grande variété de problèmes.

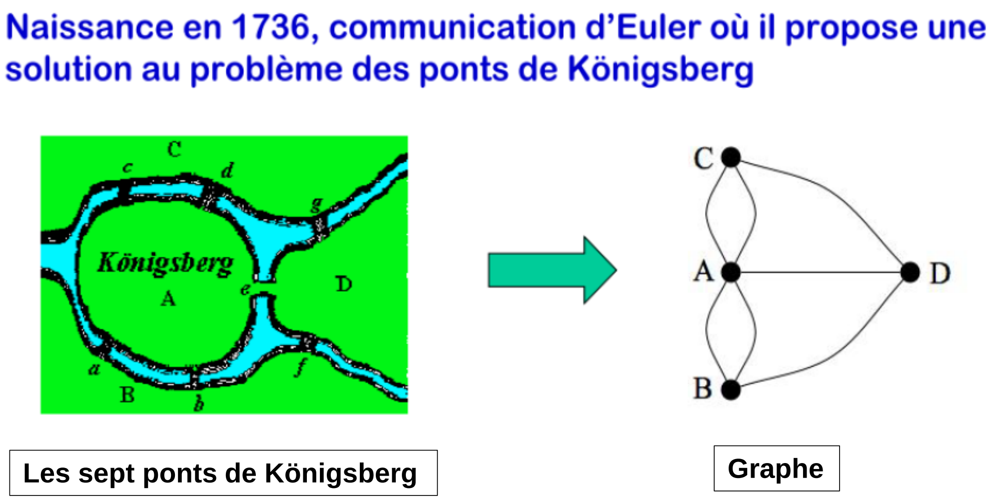


FIGURE 4.3 – Problème des ponts de Königsberg

Le choix de notre approche proposée est aussi bien justifié par la fameuse « Loi 2008-011 du 20 juin 2008, portant orientation générale du système d'éducation, d'enseignement et de formation à Madagascar » (cf. Un extrait de ladite loi d'orientation en Annexe), dont le titre V, dans ses articles 67, 68 et 69, stipule que :

> « - La recherche pédagogique constitue un puissant facteur d'amélioration de la qualité de l'apprentissage, du rendement de l'école et de sa mise à niveau en vue de répondre aux normes internationales dans le domaine de l'éducation.
> - La recherche en éducation couvre le domaine de la pédagogie, les méthodes d'enseignement, les programmes, les moyens didactiques, les pratiques des enseignants, la vie scolaire, l'évaluation, ainsi que les études comparées dans l'éducation et l'enseignement.
> - La recherche en éducation est organisée au sein d'institutions spécialisées et en collaboration avec les centres de recherche et les institutions universitaire . »

Dans le souci d'enclencher la mémoire procédurale et celle associative toutes deux génératrices de la mémoire à long terme, notre approche va consister à utiliser un schéma d'un fractionnement logique de la démarche aboutissant à la valeur du produit des deux facteurs entiers, avec implication effective de l'apprenant en réalisant le principe de « faire pour comprendre » (Pòlya, 1973). L'oral jouant généralement un rôle déterminant dans l'automatisation de la procédure, il convient d'enseigner une technique de multiplication mentale en sollicitant tout apprenant à verbaliser ladite procédure. Notre procédure de multiplication mentale de deux facteurs A et B selon la technique schématique basée sur une référence utilise les rectangles et les ellipses reliés par des flèches. Trois choix sont ainsi possibles selon la distance entre ces deux facteurs :

a)- Si $A<B$ et A est proche B, il convient de choisir la procédure basée sur une référence.

b)- Si $A << B$ et A et B sont très distants, il convient de choisir la procédure basée sur double référence.

c)- Si $A=B$, la multiplication mentale de deux facteurs A et B est un carré A^2 et il convient de choisir la procédure basée sur une référence avec $A=B$.

4.6.3.1 Multiplication mentale par une référence simple

La multiplication mentale de deux facteurs selon la technique schématique basée sur une référence est donc obtenue à partir de l'algorithme déduit des identités algébriques suivantes que l'on peut, ou que l'on doit plutôt demander aux élèves de développer $(A-R)(B-R)$ et d'en déduire AB :

Pour tout $R \in \mathbb{R}$, $AB = R[A + (B - R)] + (A - R)(B - R)$

soit : $AB = R[B + (A - R)] + (A - R)(B - R)$.

En posant $a = A - R$ et $b = B - R$, il vient :

$AB = R(A + b) + ab$ ou $AB = R(B + a) + ab$.

L'idée consiste à se ramener aux opérations manipulant des nombres plus petits, les mathématiques constituant la science qui cherche les choses simples comme l'illustrent à titre indicatif le recours à des fonctions dites de références de la seconde et de la terminale pour l'étude d'une fonction réelle (ladite fonction associée), l'intégration par parties, la décomposition en éléments simples d'une fraction rationnelle, l'intégration par changement de variable dans un calcul d'intégrale et simplification d'une fraction, etc. : ainsi, le choix de la référence R doit être guidé par ce souhait d'avoir $|A - R| < A$ et $|B - R| < B$ afin de se retrouver dans la situation de la table de multiplication habituelle et mémorisée, leur produit étant facile à mémoriser dans une phase intermédiaire de ladite procédure. Ainsi, l'élève pourra percevoir l'utilité, voire la nécessité, de choisir la référence R non loin des deux facteurs, ou bien de l'un des facteurs. Cet algorithme peut donc se schématiser de la manière représentée par la figure 4.4 et la figure 4.5. Inspiré par l'importance d'une représentation imagée qui doit précéder toute action d'abstraction et aussi par l'utilité voire l'efficacité d'un tel dessin ou graphe pour résoudre certains problèmes discrets ou combinatoires difficiles, ce qui a donné naissance à la fameuse théorie des graphes, cette stratégie basée sur une schématisation de la procédure s'avère bien justifiée sur le plan psychopédagogique.

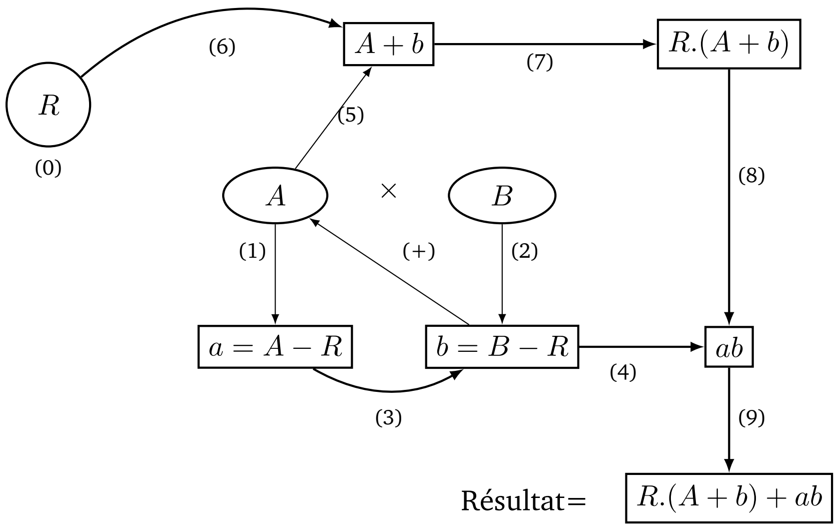


FIGURE 4.4 – Multiplication mentale par une référence simple

La première étape (étape 0) est de choisir judicieusement la référence R parmi les multiples des puissances de dix la plus proche de l'un de deux facteurs A et B. Les étapes suivantes sont indiquées par les numéros entre parenthèses près des flèches de ces schémas (4.4 ou 4.5). Ce sont des étapes faciles à calculer et à mémoriser : par exemple, l'étape 4 fait appel à la mémoire de table de multiplication et donne un petit nombre facile à mémoriser. La figure 4.6 représente l'exemple de calcul de 37×29.
Signalons que la mémorisation-connaissance de la table de multiplication de 1 à 5 suffit, car celle de 6 à 9, en cas d'oubli, peut se retrouver aisément par cette schématisation en prenant 10 comme référence : $6 \leq R \leq 9 \Leftrightarrow -4 \leq R-10 \leq -1 \Leftrightarrow 1 \leq |R-10| \leq 4$.

Par ailleurs, en cas de $R > sup(A,B)$, afin d'éviter des nombres négatifs, comme il est facile de vérifier que, pour tout $R \in \mathbb{R}$, $AB = R[A-(R-B)]+(R-A)(R-B)$, on peut aussi proposer, de partir de l'identité, en posant $a' = R-A$ et $b' = R-B$: $AB = R(A-b)+a'b'$, que l'on peut schématiser comme dans la figure 4.7. Au niveau primaire par exemple, ceci s'avère obligatoire, mais pas en secondaire.

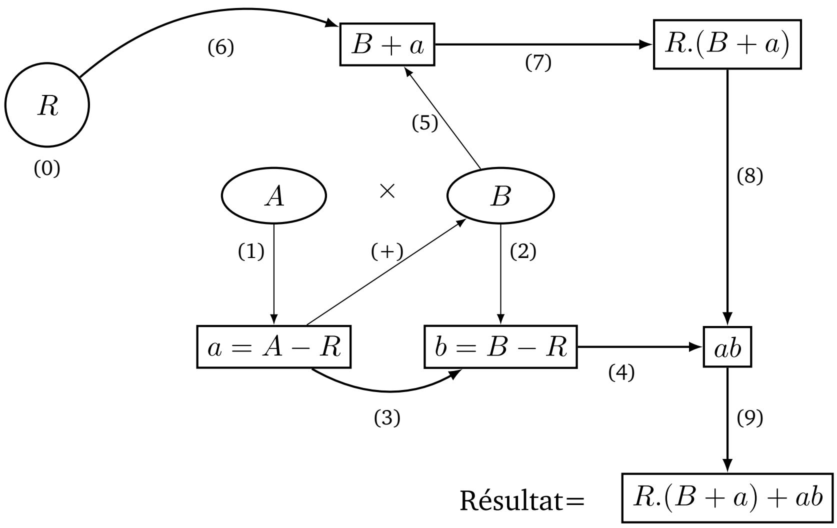


FIGURE 4.5 – Autre procédure de multiplication mentale par une référence simple

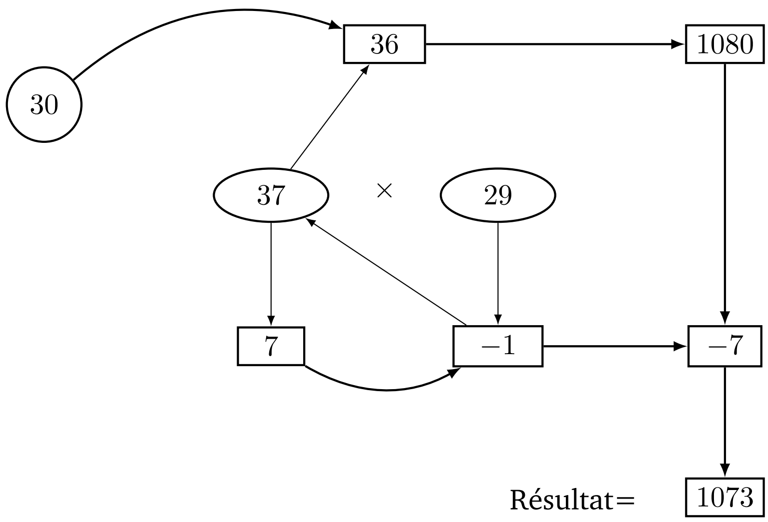


FIGURE 4.6 – Multiplication 37×29 par une référence

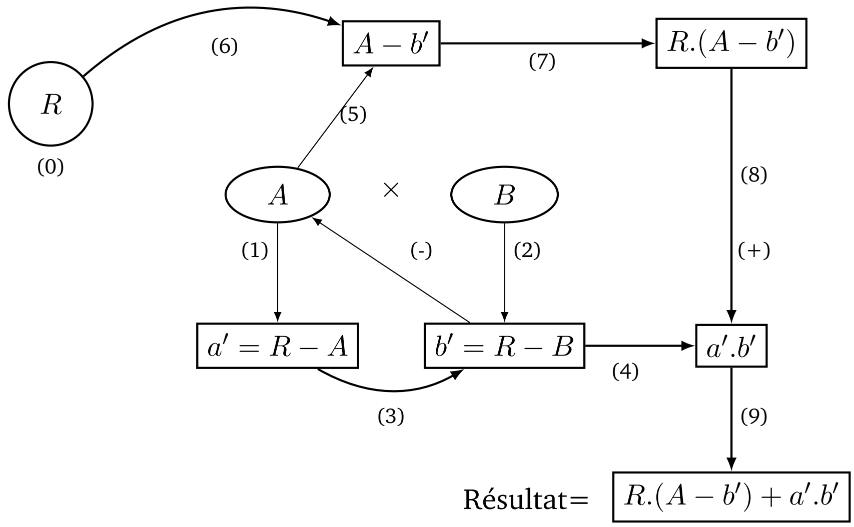


FIGURE 4.7 – Autre multiplication mentale par une référence simple dans le cas où $R > sup(A, B)$

Remarque : Notons que si les deux facteurs A et B sont très distants l'un de l'autre, c'est-à-dire si $A << B$, alors ce schéma ne s'avère plus commode. Avec un produit de deux facteurs très distants l'un de l'autre, on va nécessairement avoir un reste de grande valeur donc diffile à retenir. Alors, un des restes va être nécessairement un gros chiffre qui ne sera pas simple à multiplier par un facteur, et de plus le produit de ce gros reste par un facteur va donner un gros nombre nécessairement difficile à mémoriser. Par exemple, pour calculer 17×97, on serait embarrassé pour le choix optimal de la référence. Ce choix doit se faire parmi 10 ou 20 par rapport à 17 et parmi 90 ou 100 par rapport à 97. Voyons cet exemple, représenté par la figure 4.8, en choisissant 100 comme référence. Pour éviter ces difficultés engendrées par le grand écart entre les deux facteurs et entre l'un des facteurs et la référence parmi les quatre optimaux (10 ;20 ;90 ;100), nous proposons la technique schématique de la multiplication mentale par double référence décrite ci-dessous.

4.6.4 Multiplication mentale par double référence

La multiplication mentale par double référence est obtenue en exploitant l'égalité algébrique suivante que l'on peut confier aux élèves afin de les impliquer dans leur propre apprentissage, partant du développement de $(A - R)(B - \lambda R)$ et d'en déduire AB . Donc, pour

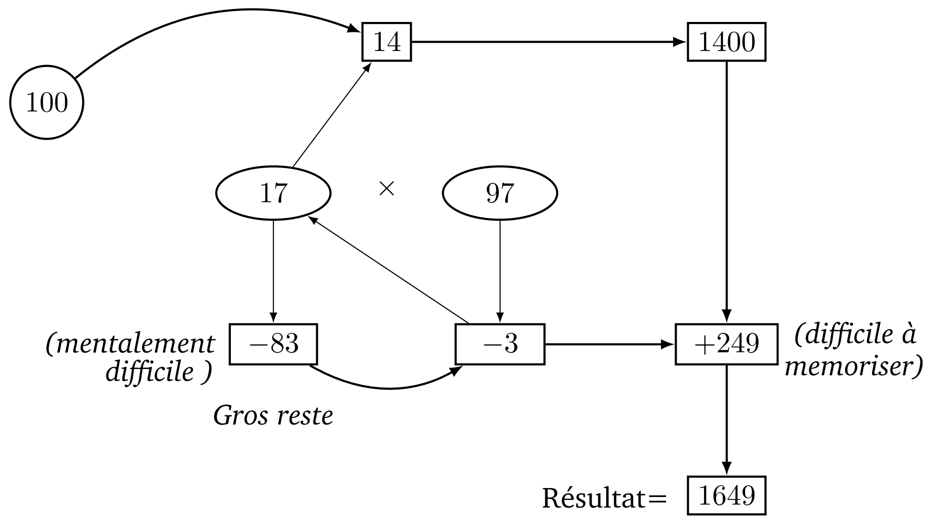


FIGURE 4.8 – Multiplication mentale 17×97 par une référence

tout $R \in \mathbb{R}$, et pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, si $A << B$, $AB = R[\lambda A + (B - \lambda R)] + (A - R)(B - \lambda R)$ ou $AB = R[\lambda(A - R) + B] + (A - R)(B - \lambda R)$.
On choisira R multiple de 10 et λ tels que R soit proche de A et λR proche de B. En posant $a = A - R$ et $b = B - \lambda R$, il vient :
si $A << B$, $AB = R(\lambda A + b) + a.b$ ou $AB = R(\lambda a + B) + a.b$.
Ces algorithmes peuvent se schématiser de la manière représentée par la figure 4.9 et la figure 4.10. Reprenons par exemple le produit 17×97. Prenons $R = 10$ et $\lambda = 10$ et nous avons le schéma suivant representé par la figure Figure 4.11 .
Remarque très importante :
Les deux algorithmes schématisés représentés par la figure 4.9 et la figure 4.10 précédentes donnent un même résultat. Le procédé représenté par la figure 4.9 s'avère difficile puisque la $7^{\text{ème}}$ étape λA fait grossir le facteur A (car $\lambda A > A$), ce qui rend difficile l'opération à mémoriser. Tandis que l'algorithme schématisé représenté par la figure 4.10 est plus facile puisque λa à la $7^{\text{ème}}$ étape est un petit nombre (car $a < A$). Ainsi, il est loisible de rejeter l'algorithme schématisé représenté par la figure 4.9 et adopter plutôt celui représenté par la figure 4.10 qui fonctionne avec des nombres plus simples.

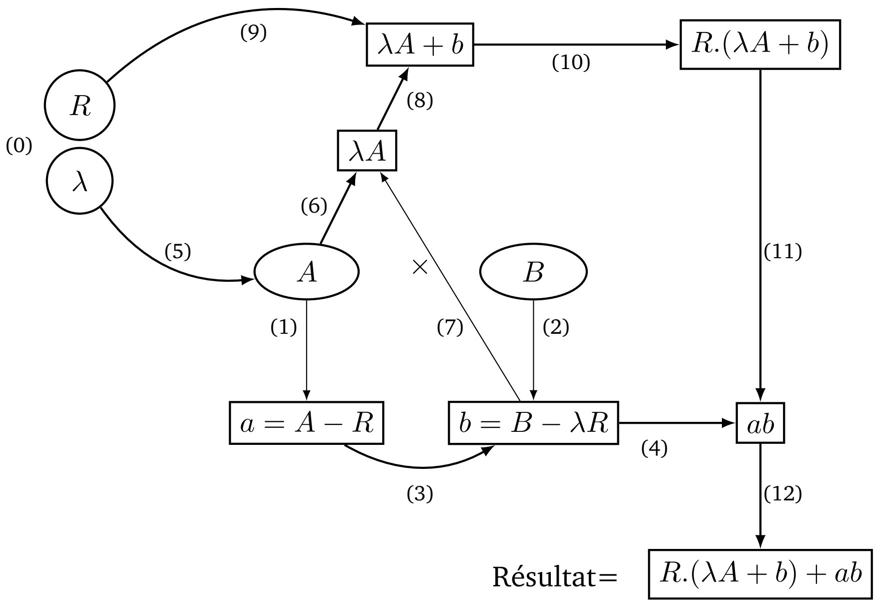


FIGURE 4.9 – Algorithme de multiplication mentale par double référence

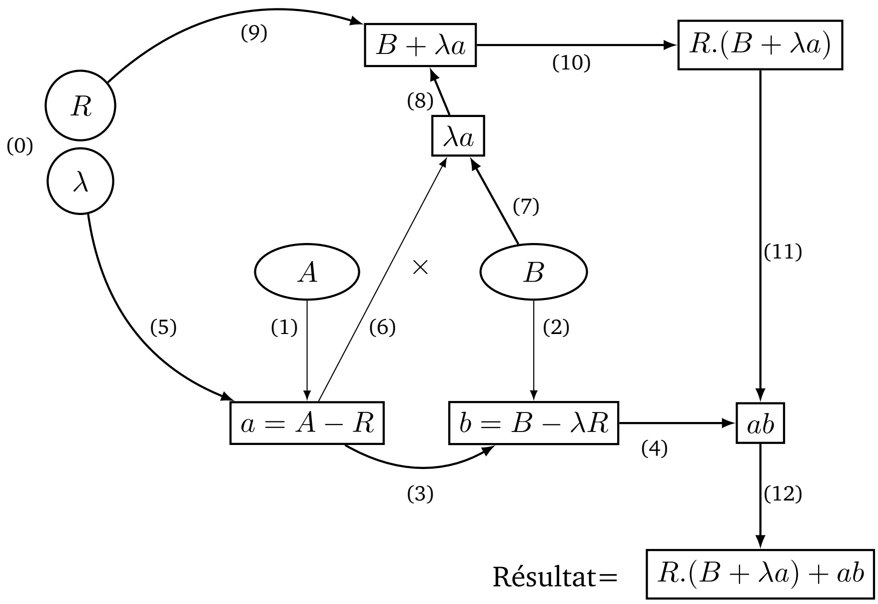


FIGURE 4.10 – Autre algorithme de multiplication mentale par double référence

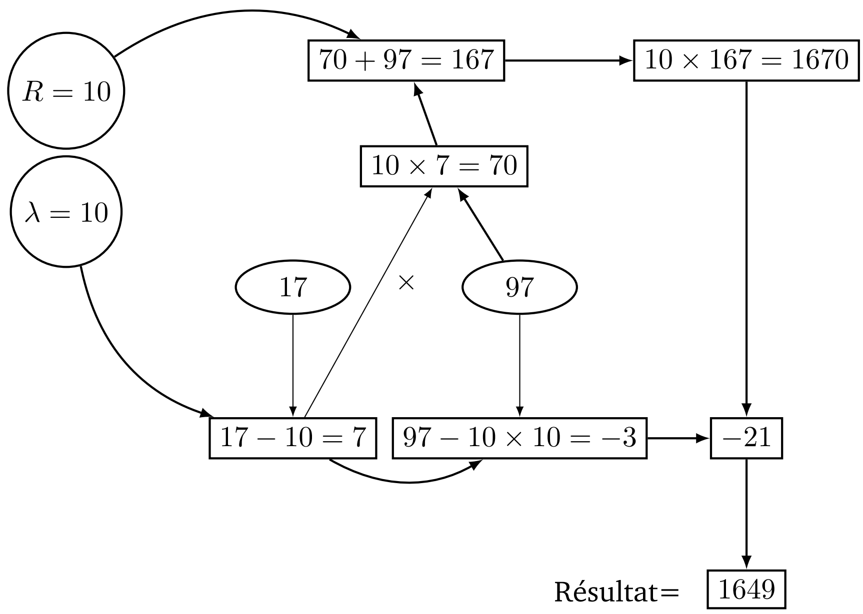


FIGURE 4.11 – Algorithme de multiplication 17×97 par double référence

4.6.5 Le cas particulier du carré mental

La procédure de calcul d'un **carré** A^2 peut aussi s'obtenir à partir de la procédure de multiplication mentale de deux facteurs selon la technique schématique basée sur une référence avec A=B. Ainsi, on a : Pour tout $R \in \mathbb{R}$, $A^2 = R[A + (A - R)] + (A - R)^2$
En posant $a = A - R$, il vient :

$$A^2 = R(A + a) + a^2 \tag{4.1}$$

Cet algorithme peut se schématiser de la même manière que dans la figure 4.4 en remplaçant B par A. Si l'on remplace R par $A - a$ dans l'équation (6.4), on obtient la méthode déjà proposée par Benjamin et Shermer (2006), $A^2 = (A - a)(A + a) + a^2$

Les tables d'addition et de multiplication s'avèrent indispensables. Sans elles, le calcul mental ne saurait exister ; en tous cas, il est bien certain que, privé de leur concours, l'enfant ne calculera jamais rapidement. Il faut avoir soin enfin, de faire apprendre par cœur, la moitié des nombres de 1 à 100, et le double des nombres de 1 à 50. Maintenant, dans la formation-apprentissage de la procédure, il est loisible de :

- fonctionner en faisant verbaliser les apprenants individuellement à tour de rôle face à ses pairs ;
- faire des exercices répétitifs par écrit et oral sous chronomètre ;
- évaluer avec chronomètre individualisé, c'est-à-dire donner la consigne, à chaque apprenant, de mentionner son heure de début et son heure de fin.

4.6.6 Organigramme de la multiplication mentale à référence

Le choix de procédé schématique à référence depend de la distance entre les deux facteurs B et A : soit la technique schématique de la multiplication mentale par double référence, soit la technique schématique de la multiplication mentale par une référence, soit la technique schématique du carré mentale. La figure 4.12 représente l'organigramme de la multiplication mentale à référence. Cet organigramme montre la complexité de la stratégie de mutiplication mentale proposée et son utilité en guise d'exemple pour la première introduction de l'algorithmique en classe de seconde, en faisant rappeler par les élèves notre algorithme de multiplication mentale de deux entiers naturels selon cet organigramme. Le calcul mental apparait bien ainsi comme une initiation à l'algorithmique, donc à l'informatique chez les jeunes collégiens et lycéens, le cerveau étant l'ordinateur idéal.

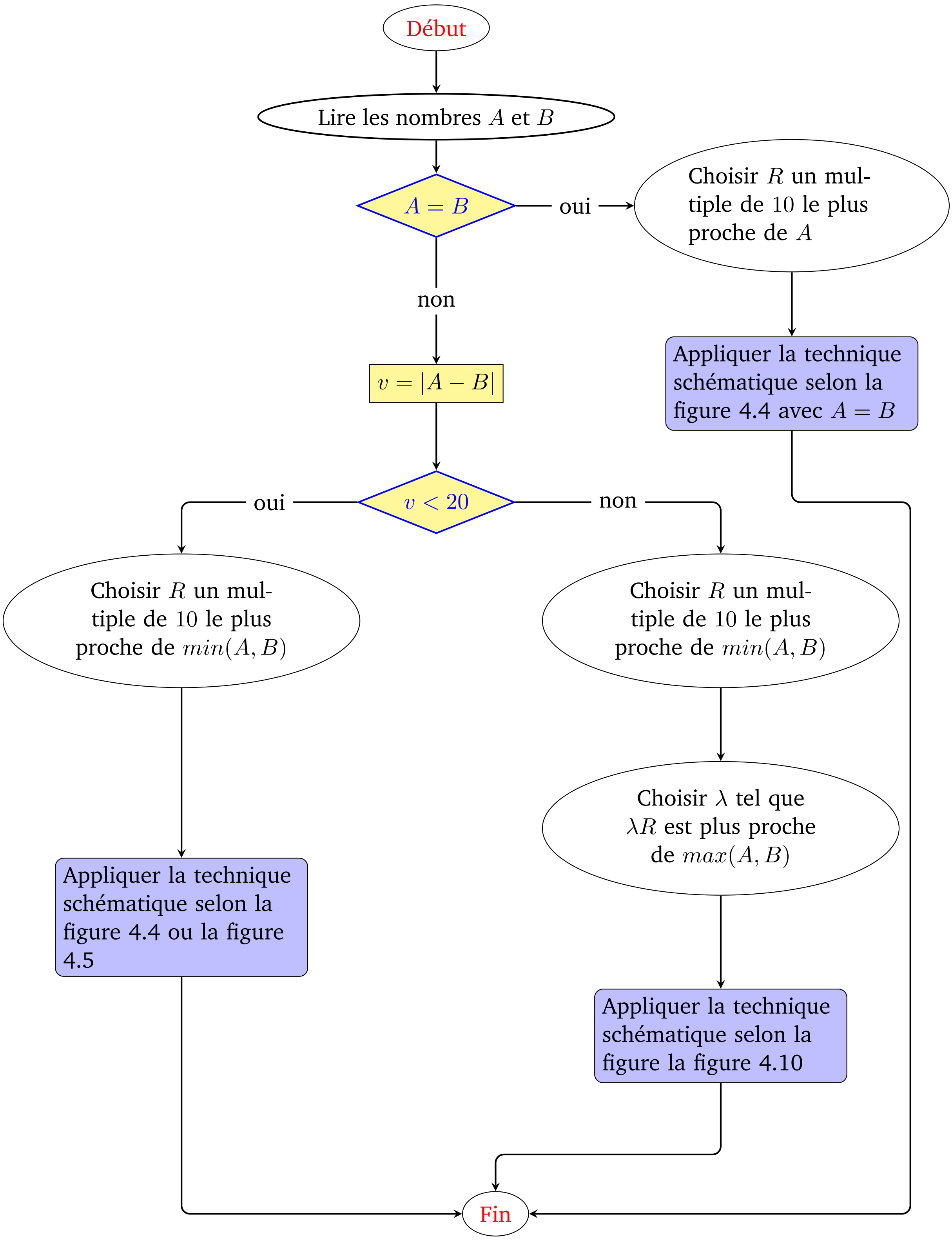


FIGURE 4.12 – Organigramme de la multiplication mentale à référence

4.6.7 Analyse des réponses aux items proposés à l'aide d'un Modèle de Réponse à l'Item (MRI)

Notre expérimentation comprend quatre phases : l'enseignement des procédures décrites à la section précédente, des exercices d'entraînement avec verbalisation, un test d'évaluation et l'analyse des résultats d'évaluation à travers les productions des apprenant.

Les MRI (cf. Chapitre 6) ont de nombreux avantages pratiques dans l'évaluation d'habileté calculatoire des élèves à un test aux items. Ils permettent de modéliser « la probabilité qu'un élève donne une certaine réponse à un item, en fonction de paramètres concernant l'élève et l'item » (Rocher, 2015a). Notre test est composé de 10 items (notés respectivement *Item*_13×17, *Item*_19×17, *Item*_23×29, *Item*_97×127, *Item*_47×53, *Item*_97×98, *Item*_97×107, *Item*_13×79, *Item*_989×997, *Item*_103×797) (cf. Annexe) de la multiplication mentale de deux facteurs selon la technique schématique basée sur une ou deux références. Ce test a été proposé à 198 personnes dont 74 élèves de la classe 1ère S, 82 élèves classe de terminale D et 42 étudiants des parcours Technique Commerciale et Technique Bancaire de l'IST (niveau Bac + 2ans) et nous utilisons le modèle MRI à deux paramètres à l'aide du programme eirt [1] pour tracer les CCI (cf. Chapitre 6) et CCT (cf. Chapitre 6) et effectuer des estimations des paramètres d'items du MRI. Notons que ce test d'évaluation a été précédé de trois séances de formation avec exercice oral.

Les dix courbes caractéristiques des items (cf. figure 4.13) sont tracées afin de déterminer les difficultés des items et leurs pouvoirs de discrimination au regard de l'habileté des items. En observant ces dix CCI du test, les 10 items sont rangés par ordre de difficulté, de gauche à droite, suivant la droite horizontale pour une probabilité de réussite $P_{ij} = 0,5$: l'*Item* _97×107 décrit par la première courbe est donc plutôt facile ; les *Item*_13×17, *Item*_19×17, *Item*_23×29, *Item*_97×98 décrits respectivement par la deuxième, troisième, quatrième et cinquième sont aussi faciles ; les *Item*_47×53, *Item*_989×997 et *Item*_97×127 décrits respectivement par la sixième, septième et huitième sont de difficulté moyenne ; tandis que l'*Item*_103×797 décrit par la dernière courbe est le plus difficile (cf. figure 4.13). Cela signifie que les multiplications mentales de deux facteurs selon la technique schématique basée sur une référence sont faciles pour les élèves et les autres basées sur deux références ont une difficulté moyenne et donc méritent qu'ont consacre plus de temps d'exercice d'entraînement

1. C'est un module pour Excel. En particulier, ce programme eirt se restreint au cas où la variable latente (l'habileté) est unidimensionnelle et de distribution normale, et le nombre de réponses possible aux items (les options) est fini.

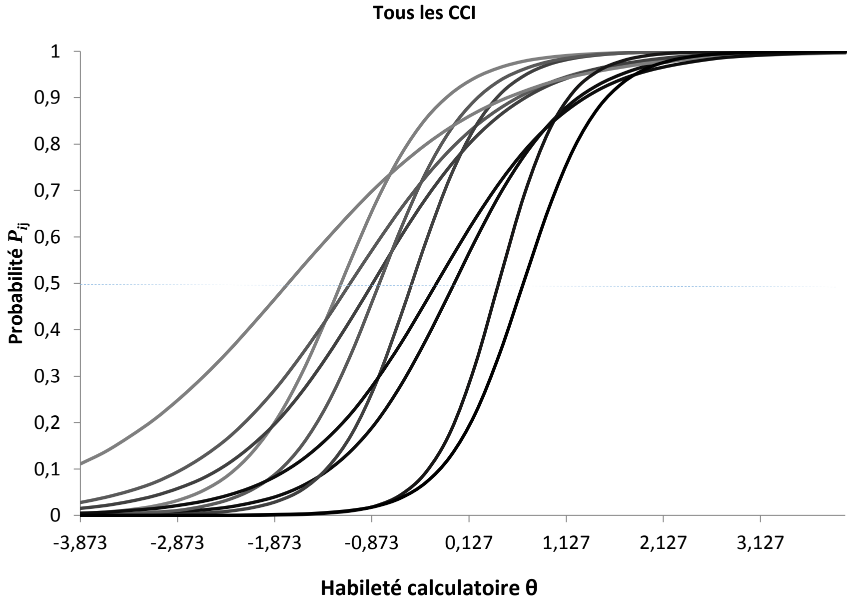


FIGURE 4.13 – Courbes caractéristiques des dix items

pour être automatisés.

Le paramètre de discrimination peut ainsi être interprété en termes de quantité d'information portée par l'item. En général, les pentes de ces dix CCI du test sont si abruptes que les items sont plus discriminants. En outre, d'après le tableau Tableau 4.4 illustrant l'estimation des paramètres des items, les paramètres de discrimination varient de $0,686$ à $3,047$. Vrignaud (2002) a considéré que le paramètre de discrimination d'un item est très satisfaisant s'il est supérieur à $0,40$; qu'il est satisfaisant entre $0,20$ et $0,40$; qu'il est faible entre $0,10$ et $0,20$; qu'il est insuffisant en dessous de 0,10. Ainsi, le test de multiplications mentales de deux facteurs selon la technique schématique basée sur une ou deux références peut différencier les élèves forts en calcul mental par rapport aux élèves faibles. C'est donc un bon test.

D'après la CCT (cf. figure 4.14), le test paraît de difficulté moyenne puisque à la valeur 5 $(= n/2$ avec $n = 10$) sur l'axe vertical correspond une valeur de thêta comprise entre $-0,873$ et $0,127$ sur l'axe horizontal.

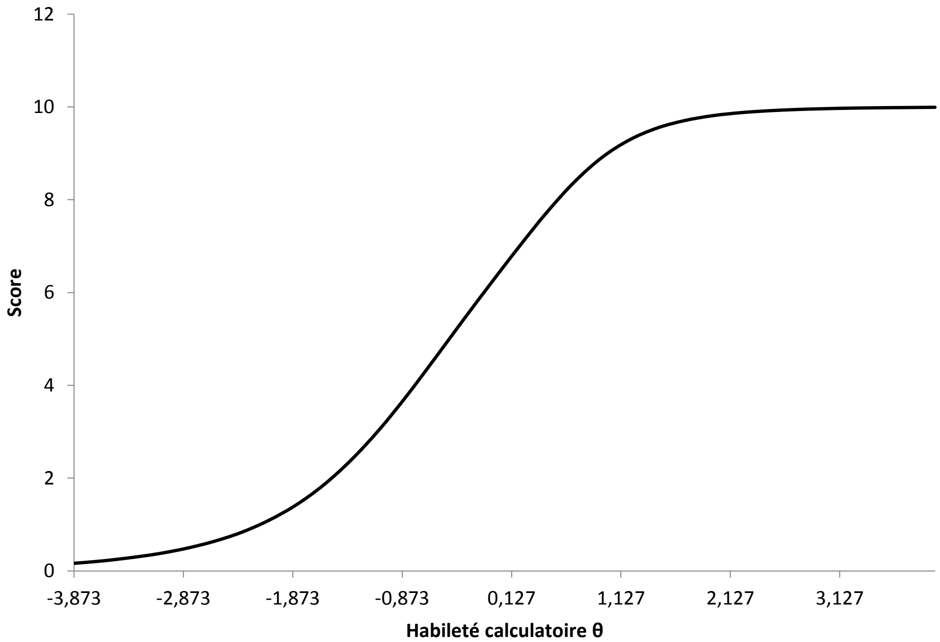


FIGURE 4.14 – Courbes caractéristiques de test

TABLEAU 4.4 – Estimés des paramètres de discrimination (a_j) et paramètres de difficulté (b_j)

Item	Paramètres de discrimination(a_j)	Paramètres de difficulté (b_j)
*Item*_13×17	2,029	-1,191
*Item*_19×17	1,276	-1,097
*Item*_23×29	1,395	-0,867
*Item*_97×127	1,717	-0,027
*Item*_47×53	2,505	-0,463
*Item*_97×98	2,167	-0,798
*Item*_97×107	0,974	-1,734
*Item*_13×79	3,047	0,432
*Item*_989×997	1,437	-0,208
*Item*_103×797	2,558	0,686

4.7 Conclusion

Premièrement, cette étude a permis, grâce à la schématisation de l'algorithme, de faciliter les techniques de la multiplication mentale de deux facteurs basées sur une ou deux références et de trouver une nouvelle procédure pour calculer mentalement un carré d'un nombre. Des évaluations dans des différents groupes d'élèves et étudiants ont été effectuées en utilisant un modèle MRI implémenté dans le programme *eirt*. Cela nous a montré que cette procédure schématique s'avère si intéressante et facile qu'on doit conseiller de la pratiquer à partir du collège. En effet, cette procédure fait intervenir des nombres négatifs qui sont inadaptés aux élèves du primaire, sauf si l'on se restreint aux entiers se trouvant entre dix et vingt. Dans les travaux futurs, nous envisagerons d'élaborer des procédures adaptées aux élèves du primaire sans faire intervenir les nombres négatifs et de proposer une possibilité d'intégrer le temps de traitement dans MRI. Enfin, l'habileté au calcul mental étant reconnue non innée, nous pensons que l'enseignement de cette technique de multiplication mentale basée sur un schéma et un choix judicieux de référence puisse contribuer efficacement à la formation au calcul mental réfléchi et automatisé avec tous ses enjeux.
Deuxièmement, ceci nous permet d'élaborer des fiches de calcul mental (ou mathématique mental) utilisées en classes secondaires. Nous élaborons des exemples de ces fiches par classe (cf. Annexe).

CHAPITRE 5

Implications pédagogiques

5.1 Réflexion personnelle sur les avantages du calcul mental

5.1.1 Innovation dans l'enseignement du calcul mental : la calculatrice

Au début de l'année 1970 jusqu'à 1977, plus encore que la réforme des mathématiques modernes, c'est l'apparition des calculatrices qui va influencer considérablement la pratique du calcul mental. Face à ce problème, les enseignants peuvent adopter deux points de vue : « Les machines débarrassent les études de calculs techniques fastidieux de favoriser l'apparition d'un concept par la variations d'exemples, rendent les mathématiques plus attrayantes ». Ou à l'inverse : « la gestion mentale des idées demande à se développer par exemple à la main ».
Certains enseignants se doutent sur la pertinence de l'apprentissage du calcul mental.
Les élèves, quant à eux, sont indéniablement démotivés ; Pourquoi faire des efforts intellectuels alors que la calculatrice donne les résultats en quelques fractions de secondes ?

Ainsi, pour les professeurs qui pensent que le calcul mental a toujours son utilité, il est probablement plus difficile de l'enseigner à l'heure actuelle.

Aujourd'hui, il faut convaincre les élèves, pour certains calculs, que le calcul mental est un outil humain le plus fiable et plus que la machine.

5.1.2 Le calcul mental et ses avantages dans l'apprentissage

Concernant les avantages du calcul mental dans l'apprentissage, dans sa thèse, Chesné (2014) a considéré le calcul mental comme :

1. la pratique régulière porteuse d'apprentissage ;
2. le précurseur de certains apprentissages ;

3. le facteur d'installation d'un climat de classe favorable aux apprentissages : facteur d'installation d'un « bon » climat de la classe et facteur favorable aux interactions.

Il admet donc que le calcul mental permet de participer largement à l'acquisition de connaissances mathématiques, et qu'il permet de développer leur disponibilité tout au long du collège. Pendant des années, l'apprentissage des opérations arithmétiques consistait à suivre les instructions de l'enseignant et à s'exercer jusqu'à ce qu'on arrive à une exécution rapide des calculs. Plus qu'un simple moyen d'obtenir un résultat, le calcul est de plus en plus perçu comme une fenêtre ouverte sur la structure profonde du système de numération. Le calcul mental, sous certaines réserves de contenus, de déroulements, peut permettre aux élèves de mémoriser des faits numériques, il peut contribuer à la conceptualisation des nombres (écriture, ordre, changement de désignation) et de leurs propriétés, il peut autoriser des calculs simples (et rapides) avec des nombres de taille et de nature différentes, il peut faciliter des calculs à la main et permettre de déterminer des ordres de grandeur (anticiper et contrôler des résultats). Certains de ces apprentissages visés ne sont pas spécifiques du calcul mental, mais nous postulons qu'une pratique régulière et fréquente du calcul mental peut les favoriser. Cela passe par des exercices répétitifs qui contribuent à la création et à l'extension de répertoires personnels de résultats mémorisés et l'acquisition de savoir-faire automatisés, mais aussi par des tâches qui nécessitent de la part des élèves des adaptations, qui développent le sens de la recherche de spécificités des nombres et de l'anticipation, qui les incitent à privilégier (ou à éliminer) certaines stratégies, autant de dimensions qui caractérisent à la fois une connaissance d'une palette de procédures et leur application variable en fonction des nombres en jeu.

Un deuxième aspect de vision du calcul mental concerne sa place dans l'organisation de l'enseignement au niveau macro. Cette vision porte aussi et surtout sur la manière dont elles peuvent l'être par rapport à l'ensemble d'un programme scolaire, c'est-à-dire sur l'intégration du calcul mental dans une progression annuelle. Cette problématique passe par une répartition pensée entre différents types de tâches, à différents moments de l'apprentissage, avec des intentions didactiques diverses de la part de l'enseignant : un premier objectif pour un enseignant serait d'atteindre un équilibre entre des tâches favorisant la mémorisation par les élèves de faits numériques et d'autres qui leur permettent de développer des stratégies de calcul efficaces en fonction des nombres en jeu ; un deuxième serait de préparer des apprentissages ultérieurs. Le calcul mental a comme avantage d'autoriser une fréquentation des nombres et des opérations qui peut ne pas être directement liée au contenu d'une séance. Sa pratique régulière peut donc définir des temps d'apprentissage différents de ceux d'une progression « classique ».

Le troisième thème associe des modalités de déroulement avec des effets potentiels, et touche à ce que nous appelons un « bon » climat de la classe, c'est-à-dire une ambiance de classe que nous jugeons favorable à l'enseignement et aux apprentissages. D'une part, c'est un facteur d'installation d'un « bon » climat de la classe. En effet, le calcul mental peut permettre de créer une gestion dynamique de la classe, voire de participer à l'installation de la « paix scolaire » dans la classe. Autrement dit, commencer une séance de mathématiques par une phase de calcul mental ou mathématique mentale permet de scénariser un rituel d'entrée en classe, de mettre en place des routines qui favorisent l'installation des élèves dans la classe, et « sécurisent » les premières minutes d'une séance tout en facilitant la mise en activité des élèves, de tous les élèves, sous réserve d'un choix adapté de tâches proposées.
D'autre part, le calcul mental est considéré comme facteur favorable aux interactions. En effet, il présente, du fait de ses modalités diverses mais spécifiques de mise en œuvre, des avantages en termes de prise d'informations par l'enseignant sur les activités des élèves, et d'exploitation de ces informations. Il lui permet d'abord d'avoir facilement, et rapidement, des renseignements sur les productions des élèves : directement à l'oral ; en circulant dans les rangs ou en ramassant les productions des élèves à l'écrit ; en observant les réponses et les temps de réponses enregistrés avec un logiciel. Selon le type de correction que l'enseignant choisit d'effectuer, il peut ensuite faire expliciter par les élèves leurs procédures et les comparer entre elles. C'est un moment opportun pour avoir accès aux conceptions et aux stratégies des élèves, correctes ou erronées. L'enseignant peut alors décider de laisser en l'état les différentes conceptions ou procédures verbalisées par les élèves, sans chercher à les modifier ni les hiérarchiser, ou au contraire les expliciter, les reformuler afin de les faire évoluer ou de privilégier certaines d'entre elles, voire faire émerger et institutionnaliser des conceptions correctes ou des procédures expertes. Cette phase est particulièrement favorable à la communication entre élèves et les amène à reconnaître qu'une même tâche peut être résolue de plusieurs façons.

5.1.3 La techniques de calcul mental et la mémoire

La mémoire permet d'enregistrer des informations venant d'expériences et d'événements divers, de les conserver et de les restituer. Elle repose sur cinq systèmes de mémoire impliquant des réseaux neuronaux distincts bien qu'interconnectés (Behra, 2015) :

– La mémoire de travail (à court terme) est au cœur du réseau.
– La mémoire sémantique et la mémoire épisodique sont deux systèmes de représentation consciente à long terme.
– La mémoire procédurale permet des automatismes inconscients.
– La mémoire perceptive est liée aux sens.

Cet ensemble complexe est indispensable à l'identité, à l'expression, au savoir, aux connaissances, à la réflexion et même à la projection de chacun dans le futur.

Une grande partie des personnes qu'on a interrogées, aussi bien les professeurs que les élèves, on a signalé que pour eux, le calcul mental est bénéfique en tant qu'entraînement intellectuel. Pour certains, il habituerait à faire des efforts de réflexion, ce qui permettrait de lutter contre la paresse intellectuelle, d'autres emploient l'expression de « gymnastique intellectuel ».

Le calcul mental utilise :

- la mémoire à long terme, sollicitée pour fournir un répertoire de résultats de calcul connus, l'exemple le plus typique étant une table de multiplication. Plus ce répertoire est étendu et moins il y a de calcul à faire.
- la mémoire à court terme, pour stocker les nombres sur lesquels on opère et les résultats intermédiaires. Cette mémoire n'est pas très étendue, elle permet de stocker une courte phrase et quelques nombres seulement, aussi faut-il réduire au minimum les retenues et autres résultats intermédiaires à stocker. De plus, elle est très volatile, on oublie en quelques secondes ce qu'on était en train de calculer, dès qu'on cesse de le faire. Aussi ne faut-il jamais s'arrêter en cours de calcul.

Un entrainement régulier permet d'augmenter la quantité de résultats déjà connus, et de renforcer la mémoire à court terme. Le calcul mental est une tâche très représentative de la fonction de la mémoire de travail. Cette tâche nécessite de retenir les nombres présentés (23×12) et d'effectuer des opérations sur ces nombres. Les chercheurs ont donc intégré des processus permettant la manipulation des informations, le simple stockage ne suffisant pas dans la plupart des tâches (Perrin, 2009).

Si l'on adopte ce point de vue, que les expérimentations pathologiques semblent confirmer, il serait donc illusoire de penser que la mémoire puisse s'entraîner comme un muscle. Apprendre des poésies ou du vocabulaire serait sans effet sur la mémoire de travail ; or, la mémoire sémantique est probablement développée le système scolaire à travers l'apprentissage de leçons. Beaucoup moins sollicitées à l'école, la mémoire de travail est pourtant très utile aussi bien dans la vie courante que la vie personnelle. S'il est désagréable d'entrer dans une pièce en ayant oublié ce que l'on venait y chercher, il est plus gênant d'oublier le nom de la personne qui vient de téléphoner et que son collègue doit rappeler d'urgence. Et quelle est l'activité scolaire qui semble a priori la mémoire de travail ? Le calcul mental semble que, dans certain cas, nous utilisons notre mémoire de travail pour stocker des connaissances dans notre mémoire sémantique : « Des études ont montré que l'acquisition du vocabulaire chez l'enfant dépendit largement de sa mémoire à court terme ». Celle-ci serait donc largement sollicitée par les élèves, dans toutes les manières. D'autre part, la mémoire serait fragmentée à l'extrême.

De là à en conclure que la seule utilité du calcul mental serait de développer la mémoire des nombres, objectif un peu faible pour justifier une pratique régulière. Une pratique du calcul mental permet de faire évoluer les procédures de calcul mental et d'enrichir ainsi les conceptions numériques des élèves, et la mémoire procédurale.

5.1.4 Enrichir les conceptions numériques

Comme nous avons vu au chapitre 4, les mathématiques sont un langage comme n'importe quelle autre langue, on peut les poser sur le papier en utilisant une grammaire qui leur est propre, avec des règles strictes, des mots et des symboles, chacun étant chargé d'un sens bien précis.

Un des objectifs à privilégier lors de l'apprentissage des mathématiques réside ainsi dans la maîtrise des écritures et du sens profond se chaque mot et chaque symbole utilisé.
Par exemple, considérons les quatre écritures $8+7$, $45-30$, 3×5 et $60\div 4$. Un nombre considérable d'élèves les perçoivent avant tout comme quatre écritures du même nombre 15. De même, le signe $=$ est parfois perçu par les élèves comme une simple ponctuation indiquant un changement d'étape à l'intérieur d'un calcul, alors que l'égalité exprime précisément que deux écritures désignant un seul et même nombre : $8+7=45-30=3\times 5=60\div 4$.

On donne suivant des exemples illustrant cette dernière remarque :
Calcul de 15×9
$15\times 10=150$
$15\times 1=15$
$15\times 9=150-15$

$15 \times 9 = 135$

Calcul de 22×19

$22 \times 20 = 440$

$22 \times 1 = 22$

$22 \times 19 = 440 - 22$

$22 \times 19 = 418$

Dans le cas particulier des multiplications, le calcul mental permet d'expliciter les différentes écritures d'un nombre.

Pour passer d'un énoncé de calcul au résultat final, l'élève a la possibilité d'utiliser des décompositions multiplicatives, additives et soustractives.
L'élève va nécessairement utiliser de façon intuitive ou raisonnée, l'associativité, la commutativité et la distributivité.
En cela, le calcul mental est donc également formateur quant aux propriétés opératoires, une ouverture de l'esprit et la qualité de l'expérience de vie.

5.1.5 Le point sur les mathématiques aux niveaux collège et lycée

Le calcul mental trouve encore une autre utilité lorsque l'enseignement souhaite transmettre à ses élèves le sens des opérations.
Comme chacun le sait, ce point des mathématiques de collège et du lycée est à la fois essentiel et très délicat à transmettre.
Pour maîtriser ce sens, on effectue en classe de nombreux problèmes, qui sont autant pour traduire et traiter mathématiquement des difficultés, elles sont d'ordre littéraire et mathématique :

- Il faut lire l'énoncé, le comprendre, rédiger une réponse, parfois effectuer des calculs écrasant.
- L'élève se trouve ainsi déchargé de nombreux obstacles à franchir. Ceux de la lecture, de la rédaction, et de la technique calculatoire.

Couverte jusqu'à présent dans la multiplicité des difficultés, seule demeure la traduction de l'énoncé, autrement dit le travail sur le sens des opérations, suivi d'un calcul qui se fait de

tête. De cette façon, chaque problème traité de manière orale s'effectue assez rapidement.
Cet avantage d'économie de temps peut être réinvesti pour multiplier et diversifier les situations étudiées tout en focalisant les efforts des élèves sur le sens des opérations.

5.1.6 Développer l'esprit critique

Le calcul mental et ses techniques étant maîtrisés, cet outil va permettre d'établir très aisément l'ordre de grandeur d'un calcul mental donné.
Ainsi, l'élève peut contrôler par lui-même la plausibilité d'un résultat qui aurait été trouvé à la main ou encore fourni par la calculatrice. De ce point de vue, le calcul mental développe une attitude de réflexion qui conduit à la vérification du travail effectué.

5.1.7 Aiguiser la mémoire

La pratique du calcul mental permet d'aiguiser la mémoire, d'éduquer à la spontanéité d'action et de réponse pertinente.
Dans ce point de vue, la récitation et la mentalisation logique du processus du calcul mental entraînent l'économie de pensée, de temps et de traitement.
La pratique du calcul mental permet aussi de pouvoir choisir l'action et la réponse, le principe de responsabilité et la force de l'être humain.
Comme on vient de le voir, les bénéfices tirés de la pratique du calcul mental sont multiples.

5.1.8 Motivations par des jeux ludiques

Les jeux ludiques permettent aux élèves de faire du calcul mental sans s'en rendre vraiment compte. C'est une motivation pour les élèves de « faire un jeu ».
Il existe une multitude de jeux qui abordent les objectifs du calcul mental. De plus les élèves ne sont pas pressés par le temps, ils peuvent réfléchir autant qu'ils veulent pour répondre à une question.

5.2 Réflexion sur les inconvénients du calcul mental

5.2.1 Difficultés de la contrainte temps

Les calculs mentaux ne présentent pas beaucoup d'inconvénients. Ceux-ci reposent sur les exercices différenciés d'application et une possibilité d'organisation.

Les séances d'experts (pourtant indispensables pour asseoir un nouvel acquis) permettent plus que toute autre activité, les éventuelles inégalités de dépister dans l'apprentissage.
Ils ne sont, classiquement favorables qu'aux quelques élèves qui, ayant acquis moyennement la nouvelle matière, sont à même capables de l'appliquer et profiter de la séance d'exercices pour affiner et fixer les nouvelles connaissances.

5.2.2 Différencier dans le temps

D'après l'expérience vécue auprès des élèves, pour gérer la différenciation dans le temps, il faut impérativement différer la partie « exercices » de la partie « apprentissage-découverte » d'une leçon.
Cela veut dire, qu'une nouvelle leçon ne sera pas suivie immédiatement d'exercices d'application. Ceux-ci seront réalisés par les élèves plus tard, le lendemain, la semaine suivante, à tout autre à un moment.

5.3 Réflexion sur la pédagogie des calculs mentaux

5.3.1 Rôles du calcul mental : Pédagogie des calculs mentaux

Les différents rôles attribués au calcul mental au cours de la période étudiée sont associés à son utilité perçue pour renforcer l'esprit, et avec son utilité sociale et pédagogique. L'école, qui doit préparer l'enfant à la vie en société et l'armer pour l'existence, ne peut ignorer cette discipline si l'utilité manifeste. Bien que reconnaissant que le calcul mental constitue une compétence précieuse dans la vie quotidienne, les partisans d'une augmentation de l'accent du calcul mental mis dans la classe mentale suggère qu'il devrait avoir un rôle plus large. La reconnaissance est donnée au rôle central que les procédures mentales occupent tout au long des mathématiques (Cockcroft, 1982). De plus, B. J. Reys et Barger (1994) suggèrent que le calcul mental est censé fournir un véhicule pour promouvoir la pensée, conjecturer et généraliser sur la base de la compréhension conceptuelle. Telle disposition contribue au développement d'une compréhension approfondie de la structure des nombres et de leurs interrelations, et donc à des approches ingénieuses pour manipuler les nombres (R. E. Reys, 1984). Le calcul mental peut donc être considéré comme un outil pédagogique facilitant le développement significatif des concepts et des compétences associées au nombre d'aspect du programme de mathématiques. Par conséquent, contrairement à la pratique actuelle, il est considéré comme une condition préalable essentielle aux méthodes de calcul écrit. Certes, la technique du calcul écrit ne doit pas être sacrifiée pour autant, mais aux problèmes écrits doivent se joindre des exercices mentaux qui, tout en accoutumant l'enfant à gagner du temps en effectuant de tête la plupart des calculs simples, l'amènent à mieux réfléchir à la structure des problèmes qui lui sont posés.

Le calcul mental constitue par ailleurs une excellente gymnastique intellectuelle qui, en obligeant l'enfant à faire travailler simultanément sa mémoire et son attention, confère plus de vigueur et de souplesse à son intelligence et oblige son esprit à discipliner. Cet exercice développe également mémoire des nombres, si nécessaire même en calcul écrit, et, en habituant l'élève à prendre contact plus intime avec l'individualité, l'amène progressivement à envisager, de nombreux cas, des simplifications opératoires il faut ajouter encore que si les exercices ont été préparés et choisis avec discernement, il excitera une vive émulation entre les élèves. Le travail mental était également considéré comme un moyen efficace pour cultiver la vitesse et la précision dans les nouveaux travaux et pour la révision des procédures mathématiques. Cependant, un accent peut avoir contribué à la conviction que la mathématique mentale entraînait la présentation d'une fiche d'exemples souvent en une seule étape, dont l'objet est de gagner des réponses correctes et réviser des acquis en mathématiques. L'exercice régulier et rationnel du calcul mental doit donc être pratiqué dans toutes les classes de l'enseignement du premier degré, et ceci, aussi bien pour son intérêt pratique (armer l'élève pour la vie et lui faire gagner du temps dans de nombreux calculs) que pour son intérêt proprement intellectuel (développer les facultés d'attention et de mémoire, plier l'intelligence à la gymnastique opératoire et t'amener à mieux saisir la structure des opérations, la signification abstraite des problèmes et les propriétés individuelles de chaque nombre).

Entreprendre des calculs mentaux est non seulement la méthode la plus simple pour effectuer de nombreuses procédures arithmétiques, il est également la principale forme de calcul utilisée dans la vie quotidienne. Cependant, c'est en relation avec l'utilité pédagogique du calcul mental, que les distinctions peuvent être plus clairement établies entre les croyances actuellement détenues par des éducateurs de mathématiques et ceux du passé. Contrairement aux croyances passées et des pratiques, qui se concentrent sur l'obtention de réponses rapidement et avec précision, il est maintenant recommandé par les éducateurs de mathématiques que l'accent devrait être mis sur les processus mental impliqués. Un tel focus permettrait au calcul mental d'être utilisé comme un outil pour faciliter le développement significatif de concepts et de promouvoir la compétence mathématique, la réflexion, la conjecture et la généralisation sur la base de compréhension des concepts (B. J. Reys et Barger, 1994). Par conséquent, le calcul mental est étroitement lié au développement du sens du nombre, au pouvoir mathématique, un pouvoir qui serait amélioré là où le fossé qui sépare l'apprentissage et l'utilisation des mathématiques à l'école et celles utilisées en dehors de la classe sont comblées (Willis, 1990). Un accent sur les processus impliqués dans le calcul mental pourrait fournir ce rapprochement. Les mathématiques populaires sont essentiellement mentales (Maier, 1980) et impliquent souvent la manipulation d'unités non standard en utilisant des stratégies inventées (Lave, 1985). Ainsi, dans l'optique de McIntosh (1990b), le calcul mental est les moyens plus faciles disponibles permettant de comprendre comment les nombres se comportent généralement être acquis, une croyance soutenue par de nombreux membres du personnel scolaire actuel.

C'est en ce qui concerne le rôle de l'arithmétique mentale comme moyen « d'améliorer la ténacité de l'esprit » que des distinctions pointues peuvent être tirées entre les croyances passées et celles qui sont actuellement préconisées par les éducateurs de mathématiques. Néanmoins, certains aspects de cette vision traditionnelle semblent rester dans l'esprit des beaucoup d'enseignants. Une telle croyance a abouti à l'arithmétique mentale étant considérée essentiellement comme le « travail sur certains nombres durs dans le temps le plus court par la méthode la plus courte ».

Il a été démontré que les algorithmes, en particulier ceux en papier et crayon, traditionnellement enseignés dans les écoles ne sont généralement pas utilisés une fois que les enfants quittent la classe (Carraher *et al.*, 1987 ; French, 1987). Willis (1990) a affirmé que l'utilité des mathématiques scolaires serait augmentée si elle reflétait les techniques utilisées dans la vie quotidienne. Les mathématiques populaires sont caractérisées par des techniques souvent mentales (Maier, 1980) et impliquent fréquemment la manipulation d'unités non standard en utilisant des stratégies (Lave, 1985). Cela implique qu'il doit y avoir un changement dans les problèmes de chemin sont présentés dans la classe - à partir de la présentation des exemples préemballés, avec ou sans placage de caractéristiques du monde réel, des situations ouvertes dans lesquelles les enfants sont libres de formuler leurs propres problèmes. Dans telles situations les intrants pertinents peuvent être aussi négociables que les solutions (Murtaugh, 1985).

5.3.2 Calcul mental dans l'enseignement élémentaire

Par le travail d'abstraction qu'il nécessite, le calcul mental ne peut être introduit dans les toutes premières étapes de l'enseignement du calcul. C'est uniquement par les méthodes concrètes que l'enfant peut être initié à la connaissance des premiers nombres et aux opérations élémentaires qui s'y rapportent. Les premières séances de calcul ne doivent pas être des leçons, mais des exercices concrets amenant l'enfant à saisir successivement la notion de nombre concret, puis celle de nombre abstrait, qui suppose un effort intellectuel déjà très intense. Les opérations concrètes seront introduites une à une, quand l'enfant disposera d'une claire conscience de la signification et de la nature des premiers nombres. Les premiers rudiments de calcul mental n'apparaissent qu'au moment où la pratique méthodique des opérations concrètes amène l'enfant à concevoir la possibilité de résumer, à l'aide des nombres abstraits, les résultats obtenus à partir d'objets de natures différentes. Les résultats des premières opérations abstraites étant obtenus à l'aide d'un support concret, on initiera bientôt l'enfant à transcrire ces opérations par écrit, et à les énoncer oralement, puis mentalement. Le calcul mental intervient ainsi progressivement au moment où le support concret disparaît, pour être remplacé par la connaissance des tables d'addition, de multiplication et des règles algorithmiques. Dès ce moment, de petits exercices très élémentaires de calcul mental peuvent être posés, exercices que l'on compliquera à mesure que la connaissance des tables s'étendra et se perfectionnera ; ces petits problèmes doivent porter sur une opération unique que la présentation concrète de l'énoncé doit faire apparaître très clairement.

La pratique du calcul mental permet justement d'aboutir aux objectifs à l'enseignement théorique du calcul à l'école primaire que le mathématicien Jules Tannery a mentionnés (Tannery, 1940) : « Ce que les enfants ont besoin de comprendre, c'est le sens de l'opération, c'est ce qu'elle permet d'obtenir ». En arithmétique, deux points importent : reconnaître quelles opérations on doit faire, c'est-à-dire, au fond, faire comprendre les définitions, puis savoir faire correctement les opérations : le premier point est affaire d'intelligence ; le second de routine, ou pour parler mieux, d'habitude. Ne méprisez point cette routine-là.
La distinction faite par divers traités de pédagogie entre calcul mental, calcul écrit exécuté de mémoire et calcul oral, ne nous semble pas fondamentale. Le calcul écrit exécuté de mémoire n'est qu'une forme de calcul mental à la technique mal adaptée ; les opérations mentales ont en effet leurs méthodes propres et ne doivent pas être calquées sur le calcul écrit. Le calcul oral peut être considéré comme une étape intermédiaire entre l'emploi des procédés de calcul

concret ou écrit et le calcul mental. Ainsi, l'apprentissage des tables d'addition et de multiplication relève-t-il essentiellement, dans ses premières étapes, du calcul concret et du calcul oral et, dans son stade final du calcul mental.

5.3.3 L'apprentissage des tables

Il a constitué pendant très longtemps un exercice de mémoire dont la complexité et l'inintérêt immédiat rebutaient la plupart des élèves en leur donnant une première image, bien peu engageante, du calcul. Fort heureusement, de nombreux éducateurs se sont efforcés de rendre moins ardue cette étude, indispensable à la pratique des procédés opératoires classiques. Les excellents résultats qu'ils ont obtenus tiennent à ce qu'ils ont su « rattacher cette étude au courant des intérêts matériels », au jeu et à l'attrait qui « doivent être le pivot de toute éducation ». En premier lieu, le maître devra insister sur l'intérêt pratique de cette étude ; s'il réussit à en persuader ses élèves, ceux-ci feront plus volontiers l'effort indispensable, n'ayant plus l'impression de travailler ainsi en pure perte.

En second lieu, le maître devra s'efforcer de faciliter cette étude en suivant une progression rationnelle et en s'aidant de méthodes concrètes ou de procédés imagés.

5.3.4 Instruction génétique

Les exercices de calcul mental doivent devenir plus complexes et correspondre, non plus à une opération unique, mais à un véritable problème. Afin d'amener l'élève à prendre conscience de l'importance de ce mode de calcul, qui lui permettra de ne pas rester désarmé devant un problème très simple, s'il ne dispose pas d'une feuille de papier et d'un crayon, les énoncés abstraits devront être remplacés par des questions concrètes et simples, empruntées à la vie de chaque jour. Ces exercices doivent rester à la portée de la majorité des élèves, les problèmes trop compliqués devant être réservés à la pratique du calcul écrit.

5.3.5 Un enseignement du calcul mental

Cet enseignement donné des méthodes ne serait que d'une faible utilité. Les exercices doivent être soigneusement graduées et la signification et l'enchaînement des opérations qui y interviennent, précisés par une explication théorique préliminaire, faite par écrit au tableau noir et par une interrogation de contrôle, destinée à vérifier l'efficacité de cette explication. L'enseignement du calcul mental doit être intimement associé dans sa structure à l'apprentissage du calcul écrit. Après avoir expliqué comment effectuer une opération ou résoudre une certaine catégorie de problèmes par écrit, le maître doit montrer les services que le calcul mental peut rendre dans cette même voie. L'élève est ainsi doté de deux armes dont il connaît les modes d'emploi et les rôles respectifs. Tandis que le calcul écrit demeure l'outil de choix dans la résolution de problèmes quelque peu complexes, le calcul mental, qui oblige l'élève à envisager clairement le but à atteindre, combat l'habitude si répandue de calculer machinalement, sans chercher à juger de la vraisemblance et de la signification des résultats obtenus. L'élève est ainsi amené à juger de façon critique les résultats obtenus par écrit et le calcul mental lui permettra très souvent, sinon de contrôler les résultats, du moins de vérifier leur ordre de grandeur.

Terminons cette étude rapide de la place et du rôle du calcul mental dans l'enseignement élémentaire par quelques conseils pratiques. Le calcul mental doit être enseigné méthodiquement car l'improvisation est encore plus dangereuse dans ce domaine que dans certaines autres disciplines. Cet enseignement doit avoir une place régulière dans l'emploi du temps, comme il l'a déjà dans les programmes. Cette place est à côté du calcul écrit qu'il complète et auquel il s'associe. Le maître doit réfléchir à l'avance à la structure et à l'enchaînement des méthodes qu'il doit enseigner et préparer avec soin un choix d'exercices, parfaitement adapté à la gradation des difficultés et à la diversité des applications. Les leçons doivent être très fréquentes mais brèves : l'explication et la partie pratique ne doivent pas durer au total plus de dix minutes. Il ne faut pas oublier en effet que, par sa nature même, le calcul mental contraint l'élève à une attention soutenue et que la prolongation de tels exercices risquerait d'entraîner une fatigue exagérée, tout en amenant une baisse de rendement et d'intérêt.

5.3.6 Approches de l'enseignement du calcul mental

5.3.6.1 Les théories de l'apprentissage

Les théories de l'apprentissage visent à expliquer le phénomène d'acquisition des connaissances. Les théories de l'apprentissage servent à donner des explications de ce qui se passe lors du processus d'apprentissage. L'application directe d'une théorie de l'apprentissage permet de formuler des hypothèses de travail et des méthodes pour des recherches en didactique plus systématique. Les théories de l'apprentissage sont utiles pour deux principales raisons : elles fournissent un cadre conceptuel pour l'interprétation de ce que nous observons et elles offrent des orientations pour trouver des solutions des problèmes rencontrés. Les principales théories de l'apprentissage : *behaviorisme, cognitivisme, constructivisme*, *socioconstructivisme, pédagogie par objectifs (PPO), approche par compétences (APC)* et *Méthode de Singapour*.

Le béhaviorisme

Le béhaviorisme (ou comportementalisme) est une théorie de l'apprentissage qui s'intéresse à l'étude des comportements observable sans faire appel à des mécanismes internes au cerveau ou à des processus mentaux non directement observables (Good et Brophy, 1995). Le terme béhaviorisme est apparu au début du 20ème siècle en parallèle avec les travaux du psychologue américain John Watson. Ce dernier est considéré comme le pionnier du béhaviorisme, il proposait surtout de faire de la psychologie en général une discipline scientifique en utilisant seulement des procédures objectives, comme les expériences de laboratoires, en vue d'établir des résultats exploitables statistiquement (Watson, 1972). Watson a été influencé par les travaux du physiologiste russe Ivan Pavlov sur le conditionnement des animaux. Cette conception l'entraîna à formuler la théorie psychologique du stimulus-réponse (ou conditionnement classique).

Les théories béhavioristes de l'apprentissage ont eu une influence considérable sur les projets pédagogiques jusque dans les années 70. Elles ont notamment trouvé un terrain d'application dans ce qu'on a appelé la pédagogie par objectif (P.P.O.). La rencontre entre les théories béhavioristes de l'apprentissage et la définition des objectifs en pédagogie a propulsé celles-là dans le système éducatif.

Du point de vue de l'enseignement, le béhaviorisme considère l'apprentissage comme une modification durable du comportement résultant d'un entraînement particulier. Il part du principe que l'acquisition des connaissances s'effectue par paliers successifs. Le passage d'un niveau de connaissance à un autre s'opère par des renforcements positifs des réponses et comportements attendus. De ce fait, l'enseignant répète une notion une ou plusieurs fois lorsqu'il constate à travers le comportement observé que la notion en question n'est pas assimilée par les apprenants. De même, il a pour tâche de concevoir des exercices progressifs, de guider les élèves dans leurs réalisations et de leur communiquer les rétroactions nécessaires à la prochaine étape. Néanmoins, les apprenants ne donnent souvent pas du sens aux connaissances qu'ils restituent et ils perdent le fil conducteur entre les différentes étapes de leur apprentissage. Dans cette théorie, l'apprenant est un élève qui écoute, regarde, réagit et tente de reproduire face à un enseignant qui est transmetteur d'information, de connaissances, qui présente, décrit, schématise, planifie et vérifie.

Cognitivisme

Le cognitivisme (ou rationalisme) est centré sur les manières de penser et de résoudre des problèmes. L'apprentissage ne peut être limité à un enregistrement conditionné, mais doit plutôt être envisagé comme nécessitant un traitement complexe de l'information reçue. La mémoire possède une structure propre, qui implique l'organisation de l'information et le recours à des stratégies pour gérer cette organisation (Crozat, 2002). La psychologie cognitive considère qu'il y a fondamentalement trois grandes catégories de connaissances : les connaissances déclaratives, procédurales et conditionnelles. Elle invite l'enseignant à développer des stratégies différentes pour faciliter l'intégration de chacune d'elles parce qu'elles sont représentées différemment dans la mémoire ; les connaissances déclaratives répondent en effet au « quoi », les connaissances procédurales au « comment » et les connaissances conditionnelles au « quand » et au « pourquoi ». Pour les cognitivistes, l'apprenant est un système actif de traitement de l'information, semblable à un ordinateur : il perçoit des informations qui lui proviennent du monde extérieur, les reconnaît, les emmagasine en mémoire, puis les récupère de sa mémoire lorsqu'il en a besoin pour comprendre son environnement ou résoudre des problèmes (Bibeau, 1996). L'enseignant est gestionnaire des apprentissages, il guide, anime, dirige, conseille, explique, régule, remédie. Les connaissances deviennent une réalité externe que l'apprenant doit intégrer à ses schémas mentaux et réutiliser plutôt qu'à acquérir des comportements observables (Bibeau, 2007). De plus, la méthode d'enseignement favorisée laisse place à de multiples cheminements d'apprentissage afin de tenir compte des différentes variables individuelles pouvant influencer la manière dont les élèves traitent l'information. L'enseignant cognitiviste sera invité à utiliser des TIC qui favorisent une grande interactivité avec les élèves, telles que des simulateurs, des expériences et des tutoriels intelligents. Toutefois, le modèle cognitiviste a une limite importante, liée au fait qu'un matériel bien structuré n'est pas suffisant pour assurer un apprentissage. La motivation des élèves est un facteur déterminant puisqu'il fournit l'énergie nécessaire pour effectuer les apprentissages.

Constructivisme

Contrairement aux behavioristes, les constructivistes croient que chaque apprenant construit la réalité, ou du moins l'interprète, en se basant sur sa perception d'expériences passées. Selon le modèle constructiviste, l'acquisition de connaissance ne se réalise pas par simple empilement mais passe par une réorganisation de conceptions mentales précédentes, un travail de construction ou de reconstruction. Pour Piaget, l'assimilation et l'accommodation forment un couple indispensable à l'activité cognitive dont les différents processus d'équilibration seront

développés dans l'équilibration des structures cognitives (Piaget, 1975). Selon le même auteur, l'assimilation désigne la réintégration d'éléments externes nouveaux dans une structure interne préexistante ; l'accommodation désigne l'adaptation de l'organisme aux variations externes qu'il ne réussit pas à assimiler.
Doolittle (1999) insiste sur huit conditions nécessaires pour réussir une pédagogie constructiviste :

1. Présenter aux apprenants des situations d'apprentissage complexes similaires à celles qu'ils rencontrent dans la vie courante.
2. Favoriser l'interaction et la collaboration entre les apprenants.
3. Donner le sens aux apprentissages des élèves.
4. Tout apprentissage doit partir des acquis des élèves.
5. Les élèves doivent bénéficier d'une évaluation formative continue.
6. Les élèves doivent être responsables de leurs apprentissages.
7. Les enseignants sont des guides et des agents qui facilitent l'apprentissage.
8. Revoir des contenus et les présenter selon diverses perspectives.

Aujourd'hui, le constructivisme apparait toujours prometteur du point de vue des technologies éducatives. Il favorise des outils donnant une grande autonomie à l'élève et lui permettant d'avancer à son rythme (plate-forme pédagogique, matériel didactiques) en utilisant des outils collaboratifs ou - au moins - coopératif (télé correspondance, blogs). Ce modèle favorise aussi le développement des problèmes assistés par ordinateur (Costa, 2014).

Socioconstructivisme

Ce modèle proposé par Vygotsky, reprend les idées principales du constructivisme de Piaget en y ajoutant le rôle social des apprentissages. L'apprentissage est vu comme l'acquisition de connaissances grâce aux échanges entre l'enseignant et les élèves ou entre élèves. Les élèves n'apprennent pas seulement grâce à la transmission de connaissances par l'enseignant mais aussi grâce aux interactions. Selon ce modèle, les apprentissages doivent être compris dans leur zone proximale de développement : cette zone comprend les tâches que les élèves peuvent réussir à l'aide d'un adulte, elles ne sont ni trop difficiles, ni trop faciles. Cette zone augmente nettement le potentiel d'un élève à apprendre plus efficacement (Vygotsky, 1980). Le maître a pour rôle de définir précisément cette zone afin de donner des exercices appropriés. De plus, il va favoriser le débat entre les élèves (conflit sociocognitif), en les faisant travailler en groupe. Dans ce modèle, les erreurs correspondent également à un point d'appui pour la construction de nouvelles connaissances. Bruner et Bonin (1996) a également apporté sa contribution à la théorie socioconstructiviste en expliquant que le modèle transmissif place l'enseignant en situation de monopole ce qui empêche l'acquisition de l'autonomie des élèves. Pour lui, l'enseignant doit faire en sorte que la tâche soit plus agréable à réaliser avec son aide tout en évitant que l'élève devienne dépendant de lui. Il doit également mobiliser et motiver l'élève en maintenant l'intérêt de la tâche pour l'élève.

La pédagogie par objectifs (PPO)

Née vers la fin du 19ème siècle, la PPO a été fortement influencée par des théories relatives au :

- courant pragmatique américain, une philosophie de la réussite en porte à faux avec les thèses de la philosophie spéculative et idéaliste.
- béhaviorisme qui met l'accent sur l'importance du comportement en psychologie et le comportement recherché dans l'apprentissage est influencé par les stimuli auxquels l'organisme est soumis.
- enseignement programmé qui décompose, en pédagogie l'apprentissage en unités séparées et progressivement transmissibles.

La PPO n'est donc pas une théorie de l'apprentissage. Elle est, en un certain sens, une technologie au service des pédagogies. C'est une entrée qui permet de clarifier :

- les visées éducatives et les intentions pédagogiques (à chaque niveau, quel discours ? quelle pratique ?) ;
- la formulation des objectifs d'apprentissage (l'objectif étant le comportement que le formateur déclare vouloir faire naître ou développer chez l'apprenant à l'issue d'un apprentissage) ;
- les procédures d'évaluation des apprentissages visés ;
- la hiérarchisation des apprentissages selon les domaines et niveaux taxonomiques. La PPO a surtout mis en exergue l'idée.

Avantages de la PPO :

La pédagogie par les objectifs est une technique qui a apporté des avancées significatives parmi lesquelles on peut citer :

- une meilleure planification des cours qui offre une vue complète sur le processus d'apprentissage ;
- un recentrage sur l'action de l'élève et sur le comportement qu'il doit manifester ;

– une adaptation des démarches et des moyens d'enseignement choisis aux objectifs visés ;
– une facilitation de l'évaluation de l'efficacité de son enseignement (congruence entre exercices et objectifs prescrits) ;
– un modèle qui donne confiance aux apprenants parce qu'ils sont motivés et savent exactement ce qu'on attend d'eux ;

Désavantages de la PPO :

Néanmoins des insuffisances sont décelées dans ce mode de traitement de contenus d'apprentissage. Entre autres, on peut retenir :

– l'émiettement du savoir ne prépare pas l'élève aux séances de synthèse au cours desquelles il fait face à la complexité des situations globales (compositions, examens, vie réelle) ;
– la réussite par l'élève des tâches intermédiaires proposées ne signifie nullement qu'il sait faire l'intégralité de la tâche : savoir débrayer, savoir accélérer, savoir freiner, savoir tourner le volant ne signifie pas que l'on sache conduire ! Le problème du transfert et de la mobilisation des connaissances se pose ;
– le chemin est trop balisé et l'élève ne développe pas la capacité d'apprendre à apprendre par lui-même ;
– la priorité faite aux objectifs à court terme ;
– la tendance à banaliser l'objet de l'apprentissage : en mettant l'accent sur le comportement final, on ne nomme pas toujours les connaissances à acquérir, les démarches impliquées ;
– le savoir est atomisé en de multiples apprentissages juxtaposés.

L'approche par compétences (APC)

Tout d'abord, une compétence est un processus. Elle est toujours en construction. Tout personne améliore ses compétences pendant tout sa vie.

1. <u>Quels sont les objectifs de l'approche par compétences ?</u>
   – Il s'agit d'abord de mettre l'accent sur ce que l'élève doit maîtriser, plutôt que sur ce que l'enseignant doit enseigner ;
   – Il s'agit également de donner du sens aux apprentissages, de montrer à l'élève à quoi sert tout ce qu'il apprend à l'école ;
   – Il s'agit enfin de certifier les acquis de l'élève en termes de résolution de situations concrètes, et non plus en termes d'une somme de savoirs et de savoir-faire.

Une compétence constitue un savoir-agir résultant d'une compréhension adéquate des savoirs, savoir-faire et savoir-être intégrés et accessibles en mémoire mobilisables de façon efficiente parce qu'ils ont été régulièrement et avec succès dans une grande variété de contextes et de disciplines.

2. Apprentissage mathématique et APC
   L'APC est un :
   - principe d'égalité des chances ; enseignés des mathématiques pour tous les élèves de la classe.
   - principe de l'enseignement qui souligne la nécessité de dispenser l'enseignement de maths par des personnes qualifiées en maths, en didactique des maths et en psycho-pédagogie.
   - principe de l'évaluation qui prend en compte que l'enseignement des maths vise des processus de compréhension et rien en premier lien des connaissances factuelles.

   En APC, l'enseignant sert de personne ressources pour aider, orienter, fournir des outils d'aide, intervenir éventuellement en cas de conflit et procéder à des régulations immédiates et ponctuelles. Il enregistre les lacunes et erreurs qui nécessitent une remédiation ultérieure plus conséquente.
   L'enseignant fait impliquer les élèves dans leur apprentissage.

3. Les principes directeurs de l'Apprendre par compétence sont :
   - *Principe 1 :* « Le tout n'est pas la somme des parties ».
     La juxtaposition des apprentissages ne suffit pas. Afin d'assurer une bonne maîtrise de la compétence, des activités favorisant l'intégration de leurs acquis doivent être proposées aux apprenants.
   - *Principe 2 :* « Tout n'a pas la même importance ».
     L'enseignant doit savoir que ce qui est essentiel à un niveau déterminé, peut être accessoire à un autre niveau. C'est ce qui explique l'existence des compétences de perfectionnement jugées utiles mais non indispensables et les compétences de base utiles et indispensables.
   - *Principe 3 :* « Même le plus compétent commet des erreurs ».
     L'erreur n'est pas une faute, elle est source d'apprentissage. C'est dire qu'il convient de reconsidérer, dans l'entrée par les compétences, le statut de l'erreur. C'est pourquoi le maître doit ainsi fixer un seuil d'erreur acceptable pour les apprentissages fonda-

mentaux. La règle des 2/3, par exemple, signifie que l'apprenant peut manifester sa maîtrise dans au moins trois occasions différentes.

– *Principe 4 :* « Ce qui distingue le professionnel expert de celui qui ne l'est pas réside, notamment, dans son pouvoir efficace à remédier ».

  Les épreuves d'évaluation que l'enseignant aura à construire doivent lui permettre d'identifier la nature des erreurs commises pour établir un diagnostic sur les difficultés rencontrées par les apprenants et mettre en place des stratégies de remédiation adéquates.
– *Principe 5 :* « Ce qui est significatif pour l'enfant résiste mieux à l'usure du temps ».

  Afin que les apprenants voient à quoi servent les apprentissages, l'enseignant doit construire des situations ayant du sens pour eux. Il est important de noter que ce qui a du sens pour l'apprenant peut se trouver aussi bien dans les situations de la vie quotidienne que dans l'univers de l'imaginaire.

Relation entre APC et PPO et socioconstructivisme :
En fait, l'APC est une évolution de la PPO exploitant la pédagogie active socioconstructiviste. Soit APC=PPO+ socioconstructiviste+pédagogie centrée sur l'apprenant.
On passe d'une centration sur les savoirs en PPO vers une prise en compte des activités dans lesquels ces savoirs s'incarnent et sont utiles ou appliqués. La pédagogie APC est centrée sur l'activité d'élève et le sens, et l'utilité des savoirs et non sur le savoir.

Quelle différence entre une approche par compétences et une approche par objectifs ?
L'approche par compétences développe l'idée que l'élève apprend mieux dans l'action, c'est-à-dire :

1. quand il est mis en situation de production effective ;
2. quand il est vraiment impliqué dans des tâches intégratrices qui nécessitent la mobilisation et l'intégration des acquis et donnent une vision globale des capacités à mobiliser ;
3. quand la situation d'apprentissage a du sens pour lui, qu'elle est significative ;
4. quand les erreurs qu'il commet lors de la réalisation de la tâche sont identifiées et exploitées par l'enseignant dans le cadre d'une régulation, lorsque ces erreurs sont de nature à créer un obstacle à la poursuite de l'activité ou des apprentissages ultérieurs ;
5. quand l'élève établit des contacts avec les autres pour construire ses connaissances et son savoir.

L'approche par objectifs est centrée sur l'acquisition des savoirs et savoir-faire négligeant l'acquisition des processus intellectuels. « Elle a comme porte d'entrée des comportements observables structurés, mais séparés les uns des autres, qui sont à développer chez les apprenants » (De Ketele et Gérard, 2005). L'approche par compétences est une manière de concevoir, de penser et de mettre en œuvre l'enseignement-apprentissage qui vient combler les insuffisances d'une approche par objectifs.

Méthode de Singapour

La méthode de Singapour est une méthode d'apprentissage qui a été créée vers les années 80 par une équipe de didacticiens en mathématiques mandatée par le *Ministère de l'Education de Singapour*. Le raisonnement a été testé et développé là-bas pour remonter le niveau scolaire des élèves en mathématiques. La méthode de Singapour consiste à donner une image aux problèmes de mathématiques pour mieux comprendre l'utilité et le fonctionnement de cette matière. Les élèves visualisent d'abord un schéma ou un objet puis le remplace petit à petit par un chiffre. Voici les trois principaux aspects de cette méthode :

1. *La modélisation*

   La modélisation est une présentation par un schéma d'un concept ou d'une situation mathématique. Pour résoudre un problème, les élèves dessinent un schéma, souvent des barres de longueurs différentes. Ainsi, une situation qui pourrait sembler compliquée, même pour les plus grands, devient très facile grâce à cette méthode. Cela va énormément leur faciliter les choses quelques années plus tard, lorsqu'ils étudieront l'algèbre.

2. *L'approche « **concrète-imagée-abstraite** »*

   Le principe est de passer d'une situation concrète à abstraite. Cela se fait en trois étapes :
   - *le concret* : on retient beaucoup plus de choses par le visuel et surtout les enfants. Pour comprendre, ils ont besoin de toucher, manipuler et voir l'objet. Pour cela, l'enseignant doit remplacer les données d'un problème de mathématiques par un objet : cubes, bâtons, jetons, etc. Les élèves peuvent ainsi les manipuler comme ils le veulent.
   - *l'imagé* : ensuite, l'objet est remplacé par une image ou un schéma.
   - *l'abstrait* : lorsque les enfants ont compris le principe, la situation mathématique peut être résolue par des chiffres, symboles et formules.

   La manipulation est au service de l'abstraction.

3. *La verbalisation*

   La verbalisation consiste à décrire, à expliquer les étapes qui leur permettent de résoudre un problème.

Grâce à cette approche par modélisation, la méthode Singapour offre aux élèves un outil pour la résolution de problèmes de différentes structures. Le modèle montre explicitement la situation mathématique en jeu. Le modèle permet de visualiser les quantités connues et inconnues (tout ou parties, différence) afin de déterminer quelle opération utiliser (addition, soustraction, multiplication ou division) pour résoudre le problème. En mathématiques, la méthode de Singapour a été créée dans le but d'offrir à ces jeunes élèves la possibilité de mieux comprendre et apprendre.

Cette méthode de Singapour est une bonne méthode d'apprentissage pour pouvoir progresser en calcul mental, notamment en application de notre nouvelle procédure de schématisation de la multiplication mentale proposée dans ce mémoire.

5.3.6.2 Approches de l'enseignement du calcul mental

R. E. Reys, B. J. Reys, Nohda et Emori (1995) ont suggéré qu'il existe deux approches de l'enseignement du calcul mental : *une approche behavioriste* et *une approche constructiviste*. Le premier considère le calcul mental comme une compétence de base et est considéré comme une condition préalable essentielle au calcul écrit, avec compétence acquise par l'enseignement direct. Cependant, l'approche constructiviste soutient que le calcul mental est un processus de pensée d'ordre supérieur dans lequel l'acte de générer et appliquer des stratégies mentales est important pour le développement mathématique. Dans les deux approches, l'accent est mis sur les stratégies. Cela contraste avec l'approche traditionnelle du calcul mental. Bien que comportementaliste par nature, il se concentre sur la vitesse et la précision avec lesquelles les réponses sont obtenues - arithmétique mentale.

Par conséquent, les exemples mentaux devaient être sur la base du travail écrit qui devait suivre, avec ceux soigneusement classés avant une leçon. Bien que les éducateurs de mathématiques seraient d'accord que le calcul mental doit faire partie de chaque leçon de mathématiques, Rathmell et Trafton (1990) affirment qu'il ne devrait pas être considéré comme un sujet distinct avec un ensemble de compétences. Plutôt, un accent sur le calcul mental devrait recevoir une emphase continue dans toutes les situations nécessitant un calcul, conduisant ainsi les enfants à voir les méthodes mentales comme alternatives de calcul légitimes (B. J. Reys, 1985).

Néanmoins, dans le contexte de développer la compétence du calcul mental dans une séquence mentale pour chaque opération, il est légitime de mettre en évidence des stratégies mentales d'enseignement. Ceci ne veut pas dire que le calcul mental devrait être considéré comme un sujet distinct. Il reconnaît plutôt que, pour certains enfants, l'invention spontanée de stratégies mentales peut être difficile (Carroll, 1996). En outre, il reconnaît également que ceux qui démontrent une faible compétence en calcul mental peut bénéficier d'un accent dirigé par l'enseignant sur les stratégies mentales sélectionnées (T. J. Cooper, A. M. Heirdsfield et Irons, 1996). Les stratégies mises en évidence sont celles des stratégies de comptage et heuristiques considérées comme accessibles pour la plupart des enfants dans chacune des classes. Ces stratégies contribuent à tirer sur le sens du nombre d'un étudiant. Comme B. J. Reys, R. E. Reys et Hope (1993) ont observé, le calcul mental peut fournir de nombreuses opportunités pour le développement de la pensée mathématique. Cependant, cela nécessite une pratique régulière et systématique. De préférence, cela devait être entrepris pendant de courtes périodes, les matins où l'esprit des enfants était frais. Les leçons ont été caractérisées par une livraison de question rapide, avec le bénéfice généralement considéré comme étant dans le nombre de questions répondues. Martin (1916) a préconisé que les explications doivent être réduites au minimum afin d'assurer une « concentration de l'esprit ».

Cela contraste avec les croyances actuelles sur l'enseignement du calcul mental, l'essence de ce qui est l'accent sur l'aide aux enfants pour voir comment calculer mentalement. Les constatations concernant les pratiques traditionnelles ont été tempérées par les enseignants du secondaire indiquant qu'ils ont également utilisé des approches constructivistes à développer des compétences avec le calcul mental. La majorité a révélé qu'ils, à moins parfois, permettait aux enfants de décider quelle stratégie mentale employée, d'expliquer, de discuter de leurs stratégies, et de relier les méthodes de calcul au-delà des faits de base aux stratégies de pensée utilisées dans leur développement.

5.3.6.3 La séquence d'enseignement nécessaires pour développer des compétences en calcul mental

Les approches recommandées pour développer l'habileté avec le calcul mental découlent de la conviction que l'accent dans les salles de classe ne devrait pas être uniquement sur son utilité, mais devrait reconnaître que les stratégies mentales sont, par essence, des façons de penser à propos des mathématiques (Cobb et Merkel, 1989). L'accent doit être mis sur développer des approches ingénieuses et ingénieuses pour travailler avec des chiffres et promouvoir le sens du nombre. Contrairement à ce qui a été défini comme l'approche traditionnelle du calcul mental, où l'accent a été mis sur l'exactitude de la réponse, R. E. Reys,

B. J. Reys, Nohda et Emori (1995) ont identifié deux approches générales quelles stratégies mentales sont les principales préoccupations. Le premier, qui peut être classé comme une approche behavioriste, implique l'enseignement direct et la pratique d'un ensemble prédéterminé de stratégies mentales en préparation pour le calcul écrit, tandis que le second est une approche constructiviste. Cette approche reflète la conviction que le calcul mental est un processus de pensée d'ordre supérieur de générer une stratégie mentale d'importance égale à son application (R. E. Reys, B. J. Reys, Nohda et Emori, 1995). Dans le premier, l'enseignant prend une position autoritaire, alors qu'avec la mise en œuvre d'une approche constructiviste, l'enseignant assume le rôle d'un coach intellectuel, en aidant les étudiants à développer les systèmes de calcul distinctifs, une caractéristique des calculateurs mentaux qualifiés (Hunter, 1977). Cependant, comme l'a observé Hazekamp (1986), on sait peu de choses comment les enfants développent des stratégies pour le calcul mental. De plus, il y a des preuves (Flournoy, 1954 ; Josephina, 1960 ; Markovits et J. Sowder, 1994) pour suggérer que les gains sont faits, au moins en ce qui concerne l'exactitude de la réponse, lorsque l'instruction systématique a été fournie. D'où une troisième approche proposée par Carroll (1996) mérite d'être considérée. Cette approche, qui contient des éléments des deux premiers, a pour objectif la discussion et le partage de stratégies mentales conçues avec des professeurs et d'autres étudiants. Bien que l'enseignant, dans cette approche essentiellement constructiviste, ne présente pas ensemble prédéterminé de stratégies pour les enfants, des solutions alternatives peuvent être présentées aux enfants dans les cas où, par exemple, l'efficacité de procédures est la principale préoccupation.

Plus généralement, comme l'affirment Rathmell et Trafton (1990), « le calcul mental est plus adéquatement considéré comme un accent continu dans un programme de mathématiques que comme un sujet distinct composé de sous-compétence organisé dans l'ordre et enseigné séparément les leçons ». Il faut donner aux enfants l'occasion de jouer avec les chiffres (C. Thornton, 1985), en utilisant des jeux et des puzzles, par exemple. Le but est d'aider les enfants à voir comment calculer mentalement et à comprendre que le calcul mental est un processus créatif avec de nombreux chemins de solutions légitimes pour des problèmes particuliers. Cette compréhension sera renforcée lorsque des opportunités sont offertes pour que les enfants partagent et justifient leurs réponses et leurs méthodes de solution (Rathmell et Trafton, 1990). Lorsqu'un enseignement ciblé a lieu, il est recommandé de plusieurs approches à quelques problèmes, plutôt qu'une seule approche de chacun d'un grand nombre de questions (McIntosh, 1988). Il est essentiel que les enfants trouvent que le calcul mental est agréable et qu'ils connaissent du succès. Cependant, les enfants ne devraient être mis au défi que lorsqu'ils sont prêts à être mis au défi. Bien que cela puisse être difficile pour un enseignant de déterminer, l'indicateur critique est la confiance perçue avec laquelle un enfant approche le calcul mental dans des situations particulières.

L'accent primordial doit être sur l'intégration du calcul mental dans tous les activités en classe pertinentes dans un effort pour maximiser les liens avec le monde réel de l'enfant, capitalisant ainsi sur leurs connaissances mathématiques idiosyncratiques. Néanmoins, il faut prendre en considération l'accent mis sur le savoir-faire mental vis-à-vis des méthodes écrites de calcul à des étapes particulières au sein du programme mathématique d'une classe. Il existe des preuves suggérant que les enfants ont des difficultés avec le calcul mental lorsque des compétences en calcul écrit, en particulier les algorithmes écrits standards, sont développés avant de se concentrer sur les stratégies mentales (T. J. Cooper, Haralampou et Irons, 1992). Cela a conduit à la suggestion que, pour chaque opération, l'accent devrait être mis sur le calcul mental avant l'introduction de procédures écrites. C. A. Thornton, Jones et Neal (1995) suggèrent que les conséquences d'une telle approche seraient le développement de stratégies de calcul plus flexibles, à la fois mentales et écrites. Cela contraste avec l'inflexibilité des stratégies mentales qui résultent de l'approche traditionnelle de l'enseignement du calcul mental.

5.3.7 Implications pour la prise de décision concernant la révision du programme scolaire

Par l'analyse du calcul mental d'un point de vue historique, la connaissance peut être donnée à la nature des programmes passées et leur mise en œuvre lors des révisions futures aux programmes de mathématiques. Le développement et la mise en œuvre du programme, cependant, nécessitent d'être guidés par la recherche, dans un contexte de débat éclairé au sein de la société et dans les écoles, en particulier. Le critique à ce dernier est professionnellement approprié au développement pour les enseignants de mathématiques.

Favoriser le débat sur le calcul

Pour les enfants à devenir des calculateurs compétents en utilisant une gamme de mentale, les stratégies technologiques et écrites de calcul exigent que les concepteurs de programmes, les enseignants, et les parents se familiarisent avec les questions entourant les méthodes de calcul. Alors que l'accent sur les stratégies mentales, et les méthodes appropriées d'enseignement, peuvent être intégrés dans l'approche de l'enseignement les mathématiques incorporées dans les programmes scolaires, la mise en œuvre d'une séquence révisée pour l'introduction des procédures de calcul nécessite une longue période de débat professionnel et public.

Les enseignants auront besoin de nombreux services pour soutenir la mise en séquence de calcul mental-écrit. Gérer l'apprentissage tout en permettant aux enfants de calculer en utilisant des stratégies écrites auto-générées nécessitera de nombreux enseignants pour élargir leur répertoire de procédures d'organisation pour l'apprentissage des mathématiques. Les techniques de conférence utilisées pour guider le développement de l'écriture des enfants peuvent avoir besoin d'être adapté pour la classe de mathématiques. L'utilisation des stratégies auto-générées, qu'elles soient mentales, technologiques ou écrites, individualise l'apprentissage et donc l'instruction, en particulier lorsque le but de l'enseignement est de promouvoir la capacité de l'individu à penser de manière créative et indépendante. C'est grâce à un tel développement professionnel que les enseignants pourraient se familiariser avec l'éventail des questions entourant la nature, la séquence et le rôle du mental, des procédures de calculs technologiques et écrites.

Néanmoins, si les enfants doivent maîtriser une gamme des techniques de calcul flexible et d'apprendre les mathématiques qui sont importantes et de valeur à leur succès individuel, dans les entreprises privées et professionnelles, il est essentiel que l'accent est mis sur la facilitation du changement des enseignants en ce qui concerne leurs croyances et les pratiques liées aux calculs des réponses exactes et approximatives. Ceci doit se produire dans le contexte plus large d'analyser de nouveau leurs croyances sur les mathématiques et l'enseignement des mathématiques.

Ce changement nécessite une réflexion approfondie des enseignants sur les images et les résultats de l'enseignement des mathématiques et des mathématiques. Les normes professionnelles pour l'enseignement des mathématiques (National Council of Teachers of Mathematics, 1991) souligne que les opportunités des enseignants doivent « examiner et réviser leurs hypothèses concernant la nature des mathématiques, comment elles devraient être enseignées et comment les élèves apprennent mathématiques », ce qui est important pour la mise en œuvre de nouveaux programmes. La reconnaissance que les changements recommandés aux pratiques d'enseignement n'auront pas d'impact substantiel sur ce qui se passe dans les écoles devraient examiner et il n'y a pas de révision de ces hypothèses.

5.3.8 Les contrôles rapides

Les exercices de calcul mental permettent aux maîtres de « laisser souvent reposer les plumes et de faire travailler les esprits ». Conduits avec adresse, ils peuvent susciter une émulation très active et un intérêt soutenu. Au procédé ordinaire d'interrogation qui risque de laisser une bonne partie des élèves dans l'inactivité ou d'engendrer du désordre, beaucoup de maîtres préfèrent le procédé des réponses par écrit, dit Procédé La Martinière, qui discipline l'interrogation et oblige toute la classe à participer activement. Chaque élève disposant d'une ardoise, d'une craie et d'un chiffon, le maître pose une question que toute la classe est sollicitée de résoudre de tête, sans répondre ni écrire. Après un temps de réflexion proportionné à la difficulté de la question posée, le maître donne un premier signal et chaque élève doit alors inscrire sur son ardoise le résultat qu'il a trouvé mentalement ; à un second signal, proche du premier, les ardoises doivent être brandies vers le maître qui, en quelques instants, peut lire toutes les réponses, féliciter ceux qui ont trouvé le résultat exact, faire calculer ceux qui n'ont pas abouti et faire rectifier les erreurs. A un nouveau signal, les ardoises sont posées sur la table, et les chiffres qui s'y trouvaient, effacés ; un nouvel exercice peut alors être abordé. Cette méthode est rapide, efficace et attrayante ; elle crée beaucoup d'émulation tout en supprimant tout effort de discipline. Mais il est évident que pour qu'elle rende le maximum de services, le maître doit toujours faire trouver et corriger les erreurs et faire expliquer la marche que l'on devait suivre pour arriver le plus rapidement possible au résultat. Tout en amenant assez vite à une sorte d'automatisme, de mécanisation des procédés de calcul mental les plus courants, mécanisation qui procure un incontestable accroissement de rapidité, la pratique de cette méthode ne détourne pas l'élève de la recherche préalable de la méthode la plus appropriée à chaque exemple. Ces deux objectifs, qui contribuent de façon efficace à la formation de l'esprit, peuvent être ainsi simultanément poursuivis.

La pratique du calcul mental donne à l'élève des habitudes de logique, d'attention et d'ordre, de réflexion, de sens concret et de prudence, de vivacité et de maîtrise de soi, tout en le rendant capable « de comprendre l'aspect quantitatif de son milieu et de réagir intelligemment devant les problèmes qui surgissent dans la vie de l'individu et dans celle de la société ».

5.3.9 Perfectionnement de la technique de calcul mental

Sans peut-être lui donner une place suffisante, l'enseignement primaire n'ignore pas le calcul mental et ses élèves possèdent, pour la plupart, un entraînement qui leur permet d'aborder avec quelques chances de succès les problèmes élémentaires posés par la vie courante. Mais un tel entraînement doit être poursuivi si l'on veut que les aptitudes au calcul se maintiennent.

L'enseignement commercial fait avec raison une place assez considérable au calcul mental et s'efforce de perfectionner la technique opératoire de ses élèves, tout en l'orientant vers des problèmes plus spécialisés. Le premier objectif qu'il se propose est d'améliorer la pratique des quatre opérations arithmétiques élémentaires : addition, soustraction, multiplication et division, en habituant à opérer sur des nombres de plus en plus grands avec rapidité et sécurité. Son second objectif consiste à adapter cette technique aux opérations commerciales et bancaires les plus courantes.
Dans l'enseignement normal du second degré, le calcul mental devrait également conserver une place assez importante. Les habitudes de contact avec le concret, d'attention et de maîtrise de soi qu'il donne, peuvent en effet être exploitées d'une façon très fructueuse, sinon dans l'étude du programme d'arithmétique et d'algèbre, du moins dans la résolution des exercices d'application. Malheureusement l'étendue des programmes et l'exiguïté de l'horaire ne permettent pas aux professeurs de poursuivre cet entraînement d'une façon intensive. Cependant, on ne saurait trop recommander, à l'occasion d'une révision ou d'une correction orale d'exercices, de maintenir les élèves dans un état d'esprit favorable à l'emploi des procédés de calcul mental. Certes, on ne peut envisager de traiter ainsi des problèmes trop complexes, mais le calcul mental permet, en quelques instants, de vérifier l'ordre de grandeur d'un résultat obtenu par une autre voie ou d'accélérer une opération algébrique. De plus, au moment où l'élève se trouve en contact avec les problèmes concrets posés par l'étude de la physique, cet entraînement au calcul pourra rendre les services les plus précieux. Les élèves qui abordent l'enseignement des mathématiques ont trop souvent tendance à oublier le rôle du calcul et à minimiser son importance devant celle de la théorie. Certes, mathématiques et calcul sont deux disciplines différentes, et le mathématicien de profession s'efforce toujours, à juste titre, de substituer les raisonnements théoriques aux vérifications numériques. Mais, dans la réalité concrète, en face de laquelle se trouveront plus tard la plupart des élèves formés par notre enseignement, l'élément numérique reprend toujours une place de premier plan.

Aussi serait-il bon - sans négliger pour autant la formation proprement mathématique de nos élèves - de ne jamais leur laisser perdre de vue l'aspect numérique des problèmes qu'ils résolvent et de maintenir chez eux un entraînement régulier aux méthodes de calcul numérique et, en particulier, à celles du calcul mental.

5.3.10 Vérification par le Procédé La Martinière (PLM)

a) Dispositif

Ce procédé est fortement conseillé par les programmes. Le maître pose les questions à l'oral et les élèves répondent à l'oral ou à l'écrit.
L'enseignant pose la question, les élèves réfléchissent en s'aidant ou non de leur ardoise, puis l'enseignant indique un « top » pour écrire le résultat et un second « top » pour montrer le résultat.

b) Intérêt

Ce procédé permet de faire un contrôle rapide des élèves qui réussissent et de ceux qui sont en difficultés. L'enseignant peut alors demander les procédés utilisés et ainsi aider ceux qui sont le plus en difficulté.
Le fait que les élèves effacent leur ardoise et ne gardent pas trace de leurs erreurs, ceci permet de leur donner une autre chance. Il n'y a pas trace des erreurs. Dans certaines classes (notamment dans une classe de $9^{\text{ème}}$), les élèves inscrivaient un point sur leur ardoise quand ils répondaient correctement, puis à la fin de la séance de calcul mental, ils comptaient les points. Cette manière ne permet plus aux élèves s'étant trompés d'oublier leurs erreurs.

5.4 Conclusion

Comme nous le voyons le calcul mental est très simple avec un peu d'entraînement et en connaissant quelques astuces décrites ci-dessus. Malheureusement, les élèves préfèrent souvent la solution de faciliter avec la calculatrice, mais ce n'est pas la meilleure solution.
Il faut se forcer au contraire à calculer mentalement (ou à la main au brouillon) dès qu'on le peut dans un exercice ou même un contrôle.
Faire des exercices spécifiques de calcul mental est un très bon entraînement qui nous aidera à coup sûr à devenir indépendant de la calculatrice.

Dans les classes du primaire,
- Le calcul mental a une importante double :

- Comme gymnastique intellectuelle, il stimule l'attention, cultive la mémoire en même temps que le jugement et le raisonnement ; c'est le type, par excellence, de la méthode active.
- Comme utilité pratique, il répond aux nécessités de la vie journalière ; il est une excellente préparation au calcul écrit ; il contribue au bon renom de l'école.

- Le calcul mental repose sur les bases suivantes :
  - Étude minutieuse de la notion de nombre ;
  - Acquisition des tables d'addition et de multiplication.

- Les règles employées dans le calcul mental sont les suivantes :
  - Décomposition des nombres ;
  - Procédé du nombre rond ;
  - Opération commençant par les unités les plus hautes ;
  - Procédé du déplacement d'unités.

- La leçon de calcul mental ne portera que sur des nombres peu élevés.

Elle sera toujours faite, dans le cours moyen notamment, au moyen de l'ardoise, et par le procédé La Martinière. Dix minutes par jours, au début de chaque leçon d'arithmétique, seront consacrées à cet exercice.

Dans les classes du secondaire, c'est-à-dire aux niveaux du collège et lycée, arrivés au terme de recherches et d'expérimentations, on peut donner des éléments de réponses aux interrogations qui ont motivé notre travail.

A l'élaboration de ce mémoire, lorsqu'on évoquait la dévalorisation du calcul mental, on pensait que les collègues soutenaient cette tendance. Il n'en est rien.

Face au flou que les programmes laissent planer à son sujet, il est vrai que beaucoup d'enseignants développent au collège une pratique anecdotique du calcul mental. Cependant, la plupart d'entre eux estiment qu'il constitue un point essentiel dans l'enseignement des mathématiques.

Outre les conceptions numériques des apprenants, sa pratique permet de développer dans un cadre plus général leur concentration, leur réflexion, leur esprit, leur autonomie, leur spontanéité ...

En ce qui concerne le point de vue des élèves, notre première impression a été confirmée : Beaucoup estiment que le calcul mental est rendu obsolète par la supposée infaillible calculatrice.

Pourtant, en soulignant la simplicité et l'efficacité de procédures bien choisies, on leur redonne assez facilement l'envie de calculer de tête.

Les expérimentations ont montré qu'un volume horaire raisonnable, soutenu par des séances appropriées comme celles de calcul rapide ou de jeux, suffit pour réveiller l'intérêt et la motivation des élèves, voir apparaître des progrès sensibles.
Il serait intéressant d'inscrire le travail dans la longueur. On pourrait ainsi étudier les répercussions à long terme d'une pratique conséquente du calcul mental sur d'autres domaines des mathématiques, sur le calcul algébrique par exemple.
La mise en œuvre de la politique d'alphabétisation de masse dans le monde rural devrait se servir de la division par 5 pour passer de fmg en Ariary.
$Xfmg = X/5 = (X/10) \times 2.$ et $YAr = Y \times 5fmg = (Y \times 10) \div 2$
La multiplication par 2 étant plus simple que la division par 5 et la division par 10 consiste à déplacer la virgule de 1 rang.
Réciproquement, pour retrouver la valeur en fmg à partir d'un montant Ariary, il suffit de multiplier ce dernier par 10 et diviser le résultat obtenu par 2 ou le diviser par 2 et multiplier le résultat obtenu par 10.
Tout ceci peut s'effectuer en un temps record sans support matériel (ni papier crayon, ni calculette).

Les études présentées dans cette recherche confrontent les principaux supports d'enseignement par l'image, leurs formes et leurs usages : abécédaires et méthodes d'apprentissage de la lecture et de l'écriture.
L'image a été convoquée de façon parfaitement réfléchie à des fins d'enseignement ; livres illustrés, jeux et jouets, images sur papier ont été utilisés pour la transmission à l'enfant de connaissances, de croyances, d'idées, de valeurs et de normes de comportement.

Troisième partie

Analyse statistique

CHAPITRE 6

Les deux mesures de qualité : Relation entre TRI et $\mathbf{M_{GK}}$

6.1 Introduction

En éducation et en sciences sociales, les enseignants et les chercheurs utilisent souvent des tests aux items, des enquêtes ou des questionnaires pour évaluer les aptitudes des apprenants et mesurer le trait ou l'attitude d'intérêt, comme la religiosité, la tolérance ou capital social. En général, les répondants ou les apprenants réagissent à un ensemble d'indicateurs de trait. Les indicateurs sont généralement appelés items et un ensemble d'items appartenant au même trait est appelé une échelle. Les répondants reçoivent un score sur chaque item, et un résumé des scores d'un répondant, le plus souvent, la somme des scores d'un item, produit une estimation de son niveau de caractère. Les sommes des scores ne peuvent être utilisées de manière significative comme des estimations des niveaux de caractère des répondants si les scores sur les items dans l'échelle sont unidimensionnels et ont le pouvoir de discrimination pour distinguer le niveau de traits.

D'une part, pour la construction d'une échelle, les méthodes basées sur la théorie de la réponse aux items sont fréquemment utilisées pour informer sur le développement, l'interprétation, et sont aussi utilisées pour des évaluations pédagogiques dans un large domaine des contextes. La théorie de la réponse aux items (TRI) est un ensemble de techniques de variables latentes spécialement conçues pour modéliser l'interaction entre la « capacité » d'un sujet et les stimuli au niveau des items (difficulté, devinettes, etc.) (Chalmers, 2012). L'accent est mis sur la structure des réponses plutôt que sur les variables de score composites ou totales et la théorie de régression linéaire. Le cadre de la TRI souligne comment les réponses peuvent être pensées en termes probabilistes. Dans TRI, les réponses à l'item sont considérées comme les variables de résultat (dépendantes), et la capacité du candidat et les caractéristiques des items sont les variables prédictives latentes (indépendantes). Ces méthodes sont utiles, car elles fournissent des informations sur la relation entre les emplacements des étudiants sur une variable latente et la probabilité d'une réponse particulière (c'est-à-dire, la fonction de réponse d'items FRI).

Les modèles de réponse aux items (MRI) sont couramment utilisés pour modéliser les traits latents associés à un ensemble d'items ou de questions dans un test ou un sondage. Dans le domaine de l'éducation, les tests font partie intégrante du programme d'études en tant qu'outil d'évaluation permettant d'évaluer la compétence et le développement des compétences des élèves. En plus de considérer le score total comme un indicateur de performance, on peut vouloir comprendre si l'instrument de test est adéquatement conçu pour mesurer des aspects particuliers des connaissances et des compétences des répondants. La TRI tente d'examiner simultanément la pertinence des questions en termes de mesure de ce qu'elles sont conçues pour mesurer la compétence des répondants. Les MRI décrivent les interactions des personnes et des items de test (Reckase, 2009). Par conséquent, la TRI est un cadre général pour spécifier les fonctions mathématiques qui caractérisent la relation entre la capacité ou le trait d'une personne observée par un instrument et les réponses de la personne aux différents items de l'instrument (DeMars, 2010). Dans les tests éducatifs, la TRI offre une alternative à la théorie des tests classiques, qui dépend des scores totaux ou du nombre correct en tant que variables de résultat. Les MRI sont devenus un cadre populaire dans de nombreux domaines, y compris la psychologie, les soins infirmiers et la santé publique.

En plus de son utilisation comme une alternative au TRI paramétrique, plusieurs chercheurs ont reconnu l'utilité de l'analyse d'échelle de Mokken dans son propre droit comme une méthode pour explorer les propriétés fondamentales, y compris la classification invariante de personne et d'item lorsqu'un niveau de mesure ordinale est suffisant pour informer les décisions en fonction d'une procédure de mesure. En particulier, plusieurs auteurs (Chernyshenko, Stark, Chan, Drasgow et Williams, 2001 ; Meijer et Baneke, 2004 ; Meijer, Tendeiro et Wanders, 2015 ; Reise et Waller, 2009) ont souligné que le TRI non paramétrique en général, en particulier l'analyse d'échelle de Mokken, est une approche particulièrement utile dans les contextes dans lesquels les processus de réponse sous-jacents ne sont pas bien compris, comme les variables affectives. Les tests de compétences au niveau scolaire impliquent également un processus de réponses qui ne sont pas bien comprises, et l'analyse d'échelle de

Mokken fournit un cadre utile pour explorer les propriétés fondamentales de mesure de ces évaluations, y compris le degré auquel la classification invariante de l'étudiant et d'item est observé. Par exemple, les évaluations de performance des apprenants impliquent un processus de réponse complexe dans lesquels les enseignants sont invités à traduire leur perception de la réussite des élèves à une échelle d'évaluation, en utilisant un processus de jugement qui est médiatisé par de nombreuses variables interactives, telles que les performances des élèves, les rubriques, les échelles d'évaluation, et les caractéristiques individuelles des enseignants.

D'autre part, les personnes travaillant dans la didactique des mathématiques ont constamment considéré l'analyse implicative statistique (ASI) comme une méthode d'analyse de données rentable et heuristique. Les théories des relations entre ces deux champs de recherche, la didactique des mathématiques et l'analyse statistique implicative, en termes de producteurs de modèles et de techniques d'une part et sur le terrain d'application d'autre part, sont sans doute trop réductrices, d'un point de vue historique. En effet, l'histoire encore très brève de l'émergence de ces deux domaines scientifiques nous montre des liens plus complexes : la coïncidence du temps d'émergence et de reconnaissance, celle de leurs situations géographiques et institutionnelles (certaines universités et associations de chercheurs en France) et enfin, et surtout, la présence d'acteurs communs (en particulier Regis Gras (Gras *et al.*, 1996 ; Gras, 1992)) implique une dynamique propre à ces relations. Ainsi l'analyse implicative des données a pu être identifiée comme une méthode d'analyse privilégiée en didactique mathématique et réciproquement d'une certaine manière, certains problèmes de didactique ont pu poser des questions dans l'analyse implicative. D'abord, l'intérêt de l'ASI a souligné des liens implicatifs qui peuvent être interprété comme des règles et des règlements reliant les actions, les discours, les niveaux ou ... en tant que caractéristiques d'un groupe. L'analyse implicative des données nous permet de montrer des règles (ou quasi règles) qui structurent un ensemble de données à partir des calculs des cooccurrences de certaines modalités de variables. Ces règles peuvent être représentées de manière générique par une expression de type « si A alors B ». Elles sont conséquemment hiérarchiques, ce qui signifie qu'elles opèrent une asymétrie entre les modalités réglementées. Cette asymétrie amène à remettre en question didactiquement le fait que très peu d'étudiants ont fait B sans avoir fait A, réussi en B sans avoir réussi en A, ont répondu B sans avoir répondu A, que très peu d'enseignants ont fait B sans avoir fait A, etc. Donc ASI nous permet de prouver le rôle décisif joué par certains critères d'analyse et la nécessité de leur présence dans l'évaluation des compétences. Selon Totohasina (2008) et Feno (2007), les mesures probabilistes de qualité ou mesures d'intérêt servent à évaluer, à classer les règles d'association d'un contexte de la fouille de données. Il existe plusieurs mesures de qualité entre autres la mesure de qualité normalisée M_{GK} et la mesure de *Loevinger* M_{GK}-normalisable, outil de construction des échelles de compétences dans la littérature. Parfois ces items sont si utiles que le recours à l'ASI-M_{GK} est une meilleure solution pour pouvoir identifier les relations avec d'autres items et même des relations causales.

Dans la suite de ce chapitre, la section 6.2 présente l'état de l'art du TRI (paramétrique et non-paramétrique). La section 3 présente la description de la mesure M_{GK}, quelques propriétés nécessaires à la construction d'échelle en proposant des erreurs-types et des intervalles de confiance de cette mesure, afin de mieux interpréter des résultats obtenus, ainsi que la relation de la mesure M_{GK} avec l'échelle de Mokken en proposant une nouvelle échelle utilisant la mesure M_{GK}. Les résultats des enquêtes et les résultats expérimentaux d'évaluation sur le calcul mental basé sur la schématisation de la multiplication mentale, utilisant le MRI et la mesure M_{GK} sont présentés dans la section 4. La section 5 est consacrée à la discussion et la conclusion.

6.2 Théorie de Réponse aux Items (TRI)

6.2.1 Présentation générale

Le Modèle des Réponses aux Items (Van der Linden et R. Hambleton, 1997 ; R. K. Hambleton, H.Swaminathan et Rogers, 1991 ; Bertrand et Blais, 2004) traite des processus sous-jacents à la réponse d'un individu à une question ou à un item. Le MRI est basé sur deux postulats de base :

(a)- la performance d'un répondant à un item peut être prédite ou expliquée par un ensemble de facteurs appelé des traits, des traits latents ou des habiletés ;

(b)- la relation entre le score à un item et le score du trait mesuré par cet item peut être décrite par une fonction monotone croissante, communément appelée Courbe Caractéristique d'Item (CCI).

Le deuxième postulat soutient donc que la probabilité de trouver la bonne réponse augmente avec le niveau de l'habileté du candidat.

En fait, la CCI permet d'estimer les qualités psychométriques des items. Les MRI sont une classe de modèles probabilistes. Ils modélisent la probabilité qu'un individu donne une certaine réponse à un item, en fonction de paramètres concernant l'élève et l'item. De manière très générale, les MRI peuvent être présentés de la manière suivante : $P(X = k|\theta, \xi) = F(\theta, \xi, k)$. La probabilité qu'un individu donne la réponse k à l'item X dépend de la caractéristique θ concernant l'individu et de la caractéristique ξ concernant l'item X. Il existe plusieurs modèles de MRI dont les formes mathématiques, les courbes caractéristiques de l'item et le nombre des paramètres à estimer peuvent varier d'un modèle à l'autre. Nous présentons quelques-uns de ces modèles les plus utilisés en sciences de l'éducation (Rocher, 2015b ; Ministère de l'éducation nationale française et de l'Enseignement supérieur, 2015 ; Le, 2013 ; Glas, 2008 ; Vrignaud, 2008).

Le modèle de Rasch (Modèle de réponse à l'item à un paramètre) est un des modèles les plus simples du MRI puisque chaque item est caractérisé par un paramètre unique appelé le paramètre de difficulté de l'item. Ce modèle s'écrit de la manière suivante (cf. équation (6.1)) :

$$P_{ij} = P\left(X_{ij} = 1/\theta_i, b_j\right) = \frac{1}{1 + e^{-(\theta_i - b_j)}} \tag{6.1}$$

où P_{ij} est la probabilité que l'individu i réussisse l'item j et

$$X_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ si l'individu } i \text{ réussit l'item } j \\ 0 \text{ si l'individu } i \text{ échoue à l'item } j \end{cases}$$

C'est une fonction sigmoïde du niveau d'habilité θ_i de l'individu i et du niveau de difficulté b_j de l'item j.

Le deuxième modèle, proposé par Birnbaum, est le modèle à deux paramètres obtenu en introduisant un deuxième paramètre, dit de discrimination. Ce modèle est défini par l'expression (cf. équation (6.2)) :

$$P_{ij} = P\left(X_{ij} = 1/\theta_i, a_j, b_j\right) = \frac{1}{1 + e^{-1,7a_j(\theta_i - b_j)}} \tag{6.2}$$

où le paramètre de discrimination a_j (a_j >0) représente la pente au point d'inflexion de la courbe caractéristique de l'item j qui varie d'un item à l'autre et la constante $1,7$ est introduite pour rapprocher la fonction sigmoïde de la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite (Bertrand et Blais, 2004).

6.2.1.1 Courbe caractéristique d'item

Le MRI permet d'estimer, pour un trait donné, la probabilité de choisir une option de réponse à un item donné. Ainsi, la probabilité de répondre à une option d'item varie en fonction des scores obtenus sur le trait mesuré. La figure 6.1 illustre bien le concept de courbe caractéristique d'item. La probabilité de réussir l'item (en ordonnées) dépend du niveau d'habileté (en abscisse). L'axe horizontal représente l'ensemble des facteurs appelés des traits, des traits latents ou des habiletés, tandis que l'axe vertical représente la performance des réussites à l'item. Une courbe caractéristique d'item est monotone croissante lorsque le score d'un individu à un item donné augmente en fonction de son score total. Ainsi, à un item, deux individus possédant des degrés d'habileté différents donneront des réponses différentes à cet item. Le point sur l'échelle d'habileté en dessous du point d'inflexion (où la courbe cesse de devenir concave et commence à devenir convexe) réfère généralement à la difficulté de l'item. Par ailleurs, la pente de la courbe au point d'inflexion exprime la puissance discriminatoire d'un item en fonction du niveau d'habileté.

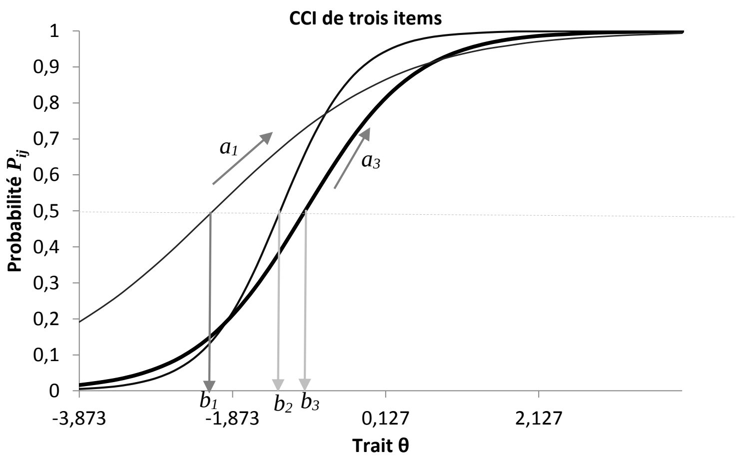


FIGURE 6.1 – Exemple des trois courbes caractéristiques des trois items

6.2.1.2 Le paramètre de difficulté b_j

Quel que soit le modèle utilisé pour définir la courbe caractéristique d'un item (à un, deux ou trois paramètres), le paramètre dit de difficulté est toujours présent. Dans le cadre du MRI, il est défini par convention comme la valeur de thêta qui correspond à une probabilité de réussite exactement égale à $0,5$. C'est précisément cette valeur de thêta qu'on appelle paramètre de difficulté b_j de l'item. Si la courbe de la figure 6.1 se déplaçait vers la droite, la difficulté de l'item serait par conséquent plus grande. Dans cet exemple 6.1, les paramètres de difficulté des items représentés par les trois courbes sont respectivement, de gauche à droite : b_1 (valeur lue sur l'axe horizontal pour une probabilité de réussite égale à $0,5$), b_2 et b_3, avec $b_1 < b_2 < b_3$. L'item décrit par la première courbe est donc plutôt facile, celui qui est décrit par la deuxième est de difficulté moyenne tandis que le dernier est le plus difficile. On remarquera également que la mesure du trait latent chez les sujets et la difficulté des items sont exprimées sur la même échelle, allant de -3 et $+3$. Afin de déterminer la difficulté d'un item j à un endroit donné de l'échelle θ, il faut donc procéder à un examen visuel des CCI et interpréter la difficulté de l'item suivant la valeur de $P_{ij}(\theta)$, la probabilité de réussite de l'item, à cet endroit de l'échelle : la valeur du paramètre b_j ne nous donne ici qu'une indication générale de la difficulté de l'item j.

6.2.1.3 Le paramètre de discrimination a_j : règle d'interprétation

Une deuxième caractéristique importante de l'item est son pouvoir discriminant, c'est-à-dire son aptitude à différencier les individus en fonction du degré auquel ils possèdent le trait latent. En MRI, la valeur du paramètre de discrimination a_j est en effet proportionnelle à la pente de la tangente géométrique passant par le point d'inflexion de la courbe où cette pente est maximale. Cette pente varie théoriquement entre 0 (lorsque l'angle formé avec l'axe horizontal est égal à $0°$) et $+\infty$ (angle égal à $90°$). La pente peut donc être plus ou moins inclinée : plus la pente est abrupte, plus l'item est discriminant et inversement. En pratique, il peut arriver que ce paramètre soit de signe négatif pour l'item qui est mieux réussi par les moins bons élèves que par les meilleurs (c'est-à-dire moins bons et meilleurs en fonction de la position qu'ils occupent sur l'échelle des scores thêta). Dans l'exemple présenté par la figure 6.1, les paramètres de discrimination a_j respectifs des courbes caractéristiques de trois items sont de $a_1 = 0,9$ pour la courbe ayant la pente la plus faible, de $a_3 = 1,3$ (cas intermédiaire) et de $a_2 = 2,5$ pour la courbe avec la pente la plus accentuée. Pour un item très discriminant, la probabilité de le réussir sera très faible d'un certain niveau d'habileté et très élevée au-delà de ce même niveau. Ainsi, une faible différence de niveau d'habileté peut conduire à des probabilités de réussite très différentes. De son côté, un item peu discriminant pourra conduire à de faibles différences de probabilité de réussite, pour un écart de niveau d'habileté important. La discrimination d'un item représente sa capacité à différencier des sujets qui obtiennent un niveau élevé de réussite à l'ensemble du test avec des sujets qui présentent un niveau plus faible de réussite. On parle du pouvoir discriminant d'un item. Un bon item est ici un item qui permet bien de distinguer les sujets sur leur niveau de réussite globale à l'épreuve.

6.2.1.4 La courbe caractéristique du test

Les modèles qui viennent d'être présentés permettent donc de construire les courbes caractéristiques pour tous les items qui figurent dans un test. A partir de ces courbes, on peut définir la courbe caractéristique du test (CCT). La CCT s'obtient simplement en additionnant, pour chaque valeur de thêta, les probabilités relatives aux différents items. L'axe des ordonnées est une échelle dont les valeurs vont de 0 à n, n étant le nombre total d'items. La forme de la courbe permet notamment de déterminer : (a) quelle est la difficulté du test et (b) pour quelles valeurs de thêta (c'est-à-dire sur quelle portion de l'échelle des compétences) l'instrument discrimine le mieux les individus. Enfin, la courbe caractéristique du test permet également d'effectuer une sorte de conversion d'échelle, à partir de laquelle chaque résultat individuel (initialement exprimé par un score thêta compris entre $-3,873$ et $+4$) peut être interprété comme un pourcentage : plus exactement, comme le pourcentage attendu d'items réussis dans l'univers des items d'où proviennent ceux qui composent le test (échelle de « scores vrais » au sens usuel que ce terme assume en théorie de la mesure). Pour obtenir ce pourcentage, il suffit de diviser par n et de multiplier par 100 la somme des probabilités obtenues pour une valeur donnée de θ (calcul d'un pourcentage ordinaire).

6.2.2 TRI non-paramétrique

6.2.2.1 Introduction

Les modèles de Mokken appartiennent à la classe des modèles statistiques appelée théorie de la réponse non-paramétrique aux items parce que la relation entre la variable latente et la probabilité d'une réponse (FRI) ne correspond pas nécessairement à une forme particulière, aussi longtemps que les exigences de base de classification sont satisfaites. Ils étendent le simple modèle déterministe de mise à l'échelle de Guttman (Guttman, 1950) qui suppose de façon irréaliste que les données sont exemptes d'erreur. Les modèles de Mokken introduisent l'idée de Guttman dans un cadre probabiliste et permettent donc aux chercheurs de modéliser des données permettant des erreurs de mesure (Van Schuur, 2003). Le principal avantage de la théorie de la réponse non-paramétrique aux items par rapport aux modèles de réponse d'items les plus couramment utilisés, comme le modèle de Rasch, est qu'ils assouplissent certaines des hypothèses fortes (forme ogive logistique ou forme sigmoïde) sur le comportement non linéaire des probabilités de réponse invoquées par la famille de modèles TRI paramétriques (Sijtsma et Molenaar, 2002). L'analyse d'échelle de Mokken (Mokken, 1971) est une approche probabiliste non paramétrique de TRI qui fournit un cadre systématique pour évaluer la qualité de la mesure en termes de propriétés de mesure fondamentale.

6.2.2.2 Analyse de l'échelle de Mokken

Les échelle de Mokken, produites par l'analyse d'échelle de Mokken, sont définies au moyen des coefficients d'échelle de Loevinger (Mokken, 1971). Par la suite, nous introduisons le modèle d'homogénéité monotone, les coefficients d'échelle de Loevinger, les relations entre le modèle d'homogénéité monotone et les coefficients d'échelle de Loevinger, la définition d'une échelle, deux types d'analyse d'échelle de Mokken et quelques résultats existants pour la distribution de coefficients d'échelle.

6.2.2.3 Le modèle d'homogénéité monotone de Mokken (MHMM)

Le modèle d'homogénéité monotone (Mokken, 1971 ; Sijtsma et Molenaar, 2002 ; Sijtsma et Meijer, 2007) est un modèle de théorie de la réponse à un item non paramétrique pour la mesure ordinale de la personne (par exemple, la théorie connexe a été élaborée par Molenaar (1997), Ramsay (1991), Scheiblechner (2007), Stout (1990)). Avant de discuter des hypothèses de ce modèle, nous introduisons d'abord une notation. Soit θ la performance sous-jacente de la variable latente sur chacun des items du test. La probabilité d'obtenir un score x_j sur un item j est notée par $P(X_j = x_j|\theta)$. Cette probabilité de réponse conditionnelle est connue comme la fonction de réponse à l'item. En outre, la probabilité conjointe d'un modèle de score particulier sur les items J dans le test est notée $P(X_1 = x_1, ..., X_J = x_J|\theta)$. Le modèle d'homogénéité monotone est basé sur les trois hypothèses suivantes :

- *Unidimensionnalité*. Les réponses aux items sont conduites par une variable latente unidimensionnelle notée θ.
- *Indépendance locale*. La distribution conjointe des scores d'items sachant θ peut être écrite comme le produit des distributions marginales conditionnelles J :
  $P(X_1 = x_1, ..., X_J = x_J|\theta) = \prod_{j=1}^{J} P(X_j = x_j|\theta)$.
- *Monotonie*. Lorsque la variable latente θ augmente, la probabilité d'une réponse positive à un item augmente ou reste identique aux intervalles de θ ; c'est-à-dire, pour deux

valeurs de θ, θ_a et θ_b, tels que $\theta_a < \theta_b$, la monotonie signifie que $P(X_j = 1|\theta = \theta_a) \leq P(X_j = 1|\theta = \theta_b)$ pour $j = 1, ...J$

Pour les items dichotomiques, le modèle d'homogénéité monotone implique l'ordre stochastique de variable latente θ par le score total $X_+ = \sum_{j=1}^{J} X_j)$; c'est-à-dire, pour une valeur arbitraire t de θ, la probabilité $P(\theta > t|X_+ = x_+)$ n'est pas décroissante en x_+ (Hemker, Sijtsma, Molenaar et Junker, 1997 ; Grayson, 1988). Cette propriété garantit une échelle de personne ordinale : des personnes avec les scores X_+ plus élevés en moyenne ont des valeurs θ plus élevées. Mokken (1971) montre que pour un test à J items, le modèle d'homogénéité monotone implique que toutes les covariances interitems ou, de manière équivalente, toutes les corrélations produit-moment interitems, sont non négatives. Soit σ_{ij} covariances entre item X_i et X_j ; le modèle d'homogénéité monotone implique

$$\sigma_{ij} \geq 0 \quad \text{pour tout} \quad i < j. \tag{6.3}$$

L'équation (6.3) est utilisée partout. La covariance inter-item non négative est un cas particulier d'un résultat général de covariance interitem, connu sous le nom d'association conditionnelle, et prouvé être vrai par Holland et Rosenbaum (1986) dans des conditions plus générales - variables latentes multidimensionnelles et les scores continus des items, et l'indépendance locale et la monotonie adaptées à ces conditions. Dans le cadre de l'association conditionnelle de Holland et Rosenbaum (1986), la covariance interitem non négative dans l'équation (6.3) est appelée association non négative par paires (Ellis et Van den Wollenberg, 1993). Autres conséquences observables, telles que la monotonie manifeste (Junker et Sijtsma, 2000), peuvent être utilisées pour tester l'hypothèse de monotonie, mais comme l'association conditionnelle (sauf l'association non-négative par paires), ils ne jouent aucun rôle dans cette étude.

6.2.2.4 Coefficients d'échelle de Loevinger

Pour une paire d'items dichotomiques, les erreurs de Guttman (Guttman, 1944) sont définies et représentent le nombre de personnes ayant répondu négativement à l'item le plus facile (des deux items), et positivement à l'item le plus difficile. La difficulté d'un item dans un cadre non paramétrique est représentée par la probabilité empirique de réponses négatives à l'item. Considérons le tableau de contingence entre les items X_i et X_j (voir tableau 6.1).

TABLEAU 6.1 – Tableau de contigence entre les items X_i et X_j

X_i \ X_j		X_j 0	1	Total
X_i	0	n_{ij}^{00}	n_{ij}^{01}	n_i^0
	1	n_{ij}^{10}	n_{ij}^{11}	n_i^1
	Total	n_j^0	n_j^1	N

L'item X_i est dit plus facile que l'item X_j si $P(X_i = 1) > P(X_j = 1)$, c'est-à-dire si $n_i^1 > n_j^1$. Dans ce cas, le nombre d'erreurs de Guttman F_{ij} entre les items X_i et X_j est égal à $F_{ij} = N.P(X_i = 0, X_j = 1) = n_{ij}^{01}$. Ainsi, si l'item X_i est plus facile que l'item X_j ($n_{ij}^{10} > n_{ij}^{01}$), alors $F_{ij} = n_{ij}^{01}$, sinon (si $n_{ij}^{01} > n_{ij}^{10}$), $F_{ij} = n_{ij}^{10}$. Alors $F_{ij} = \min(n_{ij}^{10}, n_{ij}^{01})$.
Soit E_{ij} le nombre d'erreurs de Guttman attendues sous l'hypothèses d'indépendance des réponses aux items, alors $E_{ij} = \dfrac{(F_{ij} + n_{ij}^{00}) \times (F_{ij} + n_{ij}^{11})}{N}$.

Le modèle de Guttman (1950) est la base des coefficients d'échelles de Loevinger : *le coefficient d'échelle de Loevinger entre deux items i et j*, *le coefficient de Loevinger d'intégration d'un item j dans une échelle*, $j = 1, ..., J$ et *le coefficients d'échelles de Loevinger* ,notés respectivement H_{ij}, H_j et H (Mokken, 1971 ; Loevinger, 1948). Ces coefficients d'échelles suivants ont été proposés par Loevinger (Loevinger, 1948). Nous les définirons à partir des erreurs de Guttman, en concordance avec Molenaar (Molenaar, 1991) ou avec le manuel du logiciel MSP (Molenaar, Sijtsma et Boer, 2000) .

Le coefficient d'échelle de Loevinger entre deux items i et j,noté H_{ij}, est défini par

$$H_{ij} = 1 - \frac{F_{ij}}{E_{ij}} \tag{6.4}$$

Mokken présente ce coefficient comme le rapport entre la covariance σ_{ij} des items X_i et X_j et la covariance maximale possible à marges fixées dans le tableau de contingence des items X_i et X_j notée σ_{ij}^{max}.

$$H_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{\sigma_{ij}^{max}} \tag{6.5}$$

Hemker, Sijtsma et Molenaar (1995) présentent en outre ces coefficients de cette manière.

Nous privilégierons la première approche pour deux raisons : d'une part, elle ne pose pas le problème de définition d'une covariance entre deux variables catégorielles, et d'autre part, elle nous semble plus facile à interpréter. Ce coefficient est simple à interpréter. Il est toujours inférieur à 1 (la valeur 1 étant atteinte quand il n'y a aucune erreur de Guttman observée entre les deux items).

Lorsqu'il est proche de 1, cela signifie qu'il y a peu d'erreurs de Guttman observées (comparativement au nombre attendu sous l'hypothèse d'indépendance). Lorsqu'il est proche de 0, cela signifie que les réponses aux deux items sont indépendantes. Lorsqu'il est négatif, cela signifie qu'il y a plus d'erreurs de Guttman observées que d'attendues sous le modèle d'indépendance. Dans ce cas, il faut inverser les réponses (pour un des items, la réponse positive est favorable au trait latent, tandis que pour l'autre item, la réponse posititive est défavorable au même trait latent). Ainsi, sous réserve que les items i et j soient correctement codés, le coefficient H_{ij} de Loevinger ne doit pas être significativement négatif. Mokken (1971) montre que si les items X_i et X_j sont monotonement homogènes, alors $\sigma_{ij} > 0$ et $H_{ij} > 0$. Donc pour qu'un ensemble d'items soit monotonement homogène, il faut que toutes les paires d'items (i, j) vérifie $H_{ij} > 0$.

Soient S un ensemble d'items et H_j *le coefficient d'intégration d'un item j appartenant à S* ($j \in S$) dans l'échelle formée par les items de l'ensemble S. Alors, en posant F_j le nombre d'erreurs de Guttman associées à l'item j par rapport à l'ensemble des items de S et E_j ce nombre attendu sous l'hypothèse d'indépendance des réponses entre l'item j et chacun des items de l'ensemble S, on a alors $F_j = \sum_{i \neq j} F_{ij}$, $E_j = \sum_{i \neq j} E_{ij}$, et

$$H_j = 1 - \frac{F_j}{E_j} = \frac{\sum_{i \neq j} E_{ij} H_{ij}}{\sum_{i \neq j} E_{ij}} \tag{6.6}$$

Le coefficient H_j peut également être écrit en termes de covariances interitem et de covariances maximum correspondant, compte tenu des distributions marginales des scores, comme

$$H_j = \frac{\sum_{i \neq j} \sigma_{ij}}{\sum_{i \neq j} \sigma_{ij}^{max}}$$

Soit le score reste $R_{(j)}$ défini par le score total sur $J - 1$ items excluant l'item j, alors on peut écrire aussi (Sijtsma et Molenaar, 2002)

$$H_j = \frac{\sigma_{X_j R_{(j)}}}{\sigma_{X_j R_{(j)}}^{max}} \tag{6.7}$$

L'équation (6.7) montre que le coefficient H_j exprime la force de la relation entre l'item j et les autres éléments du test, comparables à un coefficient de régression dans un modèle de régression.

Cet indice s'interprète sous réserve de considérer que tous les items de S en dehors de l'item j vérifient de bonnes propriétés d'échelles (vérifient un MHMM). Dans ce cas, un indice H_j proche de 1 signifie que l'item j s'intègre bien dans l'échelle S, tandis qu'un coefficient H_j proche de 0 signifie que l'item j s'intègre mal dans l'échelle formée de l'ensemble des autres items de S.

Soit F le nombre d'erreurs de Guttman entre les items d'un ensemble S et E ce nombre attendu sous l'hypothèse d'indépendance des réponses des items de S, alors $F = \sum_{i=1}^{J-1}\sum_{j=i+1}^{J} F_{ij}$ et $E = \sum_{i=1}^{J-1}\sum_{j=i+1}^{J} E_{ij}$. Alors le coefficient H d'échelle de Loevinger vaut

$$H = 1 - \frac{F}{E} = \frac{\sum_{i=1}^{J-1}\sum_{j=i+1}^{J} F_{ij}}{\sum_{i=1}^{J-1}\sum_{j=i+1}^{J} E_{ij}} = \frac{\sum_{i=1}^{J-1}\sum_{j=i+1}^{J} E_{ij}H_{ij}}{\sum_{i=1}^{J-1}\sum_{j=i+1}^{J} E_{ij}} \tag{6.8}$$

Le coefficient H peut également s'écrire en termes de covariances interitem et de covariances de points restants, ce qui entraîne

$$H = \frac{\sum_{i=1}^{J-1}\sum_{j=i+1}^{J} \sigma_{ij}}{\sum_{i=1}^{J-1} \sigma_{ij}^{max}} = \frac{\sum_{j=1}^{J} \sigma_{X_j R_{(j)}}}{\sum_{j=1}^{J} \sigma_{X_j R_{(j)}}^{max}}$$

On montre (Mokken, 1997) que $H \geq \min_{j \in S} H_j$. Un coefficient H proche de 1 signifie que l'échelle formée par l'ensemble des items de S a de bonnes propriétés d'échelles (cet ensemble d'items vérifie un MHMM), tandis qu'un coefficient H proche de 0 montre que cette échelle a de mauvaises propriétés. Si les données obéissent à un scalogramme de Guttman parfait, $H = 1$, mais cette valeur n'est jamais trouvée dans la pratique. Sijtsma et Molenaar (2002) (voir aussi Hemker, Sijtsma et Molenaar (1995)) ont montré que H_{ij}, H_j et H sont liés de telle sorte que

$$\min_{i,j}(H_{ij}) \leq \min_{j}(H_j) \leq H \leq \max_{j}(H_j) \leq \max_{i,j}(H_{ij}) \tag{6.9}$$

6.2.3 Relations entre le modèle d'homogénéité monotone de Mokken et les coefficients d'échelles de Loevinger

Le modèle d'homogénéité monotone implique des conséquences observables sur les coefficients d'échelles H_{ij}, H_j et H. Ces conséquences observables sont utilisées dans l'analyse des données pour déterminer si les données supportent l'ajustement du modèle d'homogénéité monotone (Mokken, 1971 ; Sijtsma et Meijer, 2007). En particulier, Mokken (1971) a montré que le modèle d'homogénéité monotone implique que

$$0 \leq H_{ij} \leq 1 \text{ pour tout } i < j, 0 \leq H_j \leq 1 \text{ pour tout } j, \text{et } 0 \leq H \leq 1. \tag{6.10}$$

Ainsi, les coefficients d'échelles négatifs sont en conflit avec le modèle d'homogénéité monotone. Ces conséquences observables sont à la base de l'analyse de l'échelle de Mokken.

6.2.3.1 Définition d'une échelle et les deux types d'analyse de l'échelle de Mokken

Définition d'une échelle.

Dans cette étude, un ensemble d'items est une échelle, appelée *une échelle de Mokken* (Mokken, 1971 ; Molenaar *et al.*, 2000) si, pour une corrélation ρ, et pour toute valeur constante $0 < c \leq 1$,

$$\rho_{ij} > 0 \text{ (équivalent à } \quad H_{ij} > 0) \text{ pour tout } i < j, \text{et} \tag{6.11}$$

$$H_j \geq c > 0 \text{ pour tout } j \tag{6.12}$$

L'équation (6.11) est le premier critère d'une échelle de Mokken, et l'équation (6.12) est le second critère d'une échelle de Mokken. Comparé aux équations (6.3) et (6.10), l'inégalité stricte n'est pas cruciale ici en raison de continuité des échelles de ρ et H_j. Sauf pour les inégalités strictes, l'homogénéité monotone le modèle implique à la fois l'équation (6.11) et $H_j > 0$ (qui fait partie de l'équation (6.12)). Cependant, le modèle d'homogénéité monotone n'implique pas de valeurs positives spécifiques du réel c. Ainsi, l'inclusion du réel c positif dans la définition d'une échelle de Mokken peut être une source de confusion et doit être expliqué. Pour comprendre le rôle du réel positif c, on peut noter que le monotone modèle d'homogénéité, et des cas particuliers de ce modèle tels que les modèles logistiques à un, deux et trois paramètres, permettent de classer des items qui ont des FRI (presque) plats dans une échelle.

Ces items contribuent peu, voire rien, à une classification fiable des personnes et peut même atténuer la fiabilité de cette classification ; ainsi, ces items sont indésirables dans une échelle. L'inclusion d'un c positif dans la définition d'une échelle Mokken empêche la sélection de ces items dans une échelle en rejetant des items avec $H_j < c$. Ainsi, l'analyse de l'échelle de Mokken vise à produire des échelles « de haute qualité », dont la définition dépend du choix du chercheur de la borne inférieure c. Mokken (1971) propose de toujours mettre c au moins à $0,3$. On peut noter cette équation (6.9) implique que $H \geq \min_j(H_j)$; ainsi, pour la borne inférieure $c = 0,3$, l'échelle totale $H \geq 0,3$. Le choix du réel c contrôle la qualité des différents items de l'échelle et de l'échelle totale et, donc, du score d'échelle totale $X+$ pour classifier des personnes sur la variable latente θ.

Pour l'interprétation de H, Mokken (1971) a proposé les règles empiriques suivantes :
- si $H < 0,3$, alors l'ensemble d'items ne peut pas mettre à l'échelle à toutes fins pratiques ;
- si $0,3 \leq H < 0,4$, alors l'échelle est dite « faible » ;
- si $0,4 \leq H < 0,5$, alors l'échelle est dite « modérée » ;
- si $H \geq 0,5$, alors l'échelle est dite « forte ».

Il suggère donc d'utiliser les coefficients de Loevinger pour construire un ensemble d'items vérifiant un MHMM. Cette idée a été formalisée par Hemker, Sijtsma et Molenaar (1995) pour proposer la procedure d'échelle de Mokken, une méthode de sélection automatique d'items permettant de construire des échelles vérifiant un MHMM. Dans la suite, nous dirons qu'un item est dite « scalable » s'il peut mettre à l'échelle, c'est-à-dire, s'il vérifie les hypothèses d'homogénéité.

Les deux types d'analyse de l'échelle de Mokken

Le premier modèle est le MHMM, qui est le plus général des deux modèles d'analyse de l'échelle de Mokken d'origine.

Le deuxième modèle de Mokken (Mokken, 1971) est le modèle de double monotonie de Mokken (MDMM), qui est un cas particulier du MHMM. Le MDMM vérifie les même trois hypothèses de MHMM, et une quatrième hypothèse d'ordre invariant d'item ce qui signifie que la fonction de réponse d'un item individuel ne se croise pas avec les fonctions de réponse des autres items. Selon le MDMM, les FRI peuvent prendre une variété de formes tant qu'elles ne se croisent pas. Le résultat important de cette exigence pour les items dichotomiques est que lorsque les données correspondent aux hypothèses de MDMM, les items sont ordonnés de la même manière à travers les étudiants. Comme l'ajustement aux hypothèses du MDMM fournit des preuves pour l'ordre invariable des étudiants et items, ce modèle a été décrit comme une version ordinale du modèle de Rasch dichotomique ou le modèle logistique à un paramètre en TRI paramétrique (Van Schuur, 2003 ; Meijer, Sijtsma et Smid, 1990).

6.3 Analyse des indices $\mathrm{M_{GK}}$

6.3.1 Définition et quelques propriétés

Soient X_i et X_j deux motifs (dans ce mémoire, les motifs sont des items), la mesure $\mathrm{M_{GK}}$ (Totohasina, 2008) est définie par :

$$M_{GK}(X_i \to X_j) = \begin{cases} \dfrac{P(X_j=1|X_i=1)-P(X_j=1)}{1-P(X_j=1)}, \text{ si } X_i \text{ favorise } X_j \\ \dfrac{P(X_j=1|X_i=1)-P(X_j=1)}{P(X_j=1)}, \text{ si } X_i \text{ défavorise } X_j \end{cases} \tag{6.13}$$

On dit que la permisse X_i favorise le conséquent X_j si $P(X_j=1|X_i=1) > P(X_j=1)$ et X_i défavorise X_j si $P(X_j=1|X_i=1) < P(X_j=1)$. Les probabilités $P(X_i=1)$, $P(X_j=1)$ et $P(X_j=1|X_i=1)$ sont obtenues à l'aide des entrées de la tableau de contingence (c.f tableau 6.1). Cette mesure de qualité ou mesure d'intérêt des règles d'association $\mathrm{M_{GK}}$, étant donné de la dépendance exclusive des quatre paramètres dont N, $P(X_i=1)$, $P(X_j=1)$ et $P(X_j=1|X_i=1)$ est une mesure probabiliste de qualité (Totohasina, 2008). Rappelons que le terme mesure ici n'est pas à prendre au sens de la théorie en analyse mathématique, mais mesure signifie ici un indice qui permet d'évaluer le degré de lien (orienté) entre deux items (Totohasina, 2008).

Dans la relation (6.13), la composante favorisante est souvent notée par M_{GK}^f et la composante défavorisante par M_{GK}^d, et elles peuvent s'écrire en fonction des fréquences observées du tableau de contingence entre les items X_i et X_j (c.f tableau 6.1) ; c'est-à-dire, pour deux items X_i et X_j , on a :

$$M_{GK}(X_i \to X_j) = \begin{cases} M_{GK}^f(X_i \to X_j) = 1 - \dfrac{Nn_{ij}^{10}}{n_i^1 n_j^0}, \text{ si } X_i \text{ favorise } X_j \\ M_{GK}^d(X_i \to X_j) = \dfrac{Nn_{ij}^{11}}{n_i^1 n_j^1} - 1, \text{ si } X_i \text{ défavorise } X_j \end{cases} \tag{6.14}$$

La mesure de qualité $\mathrm{M_{GK}}$ est normalisée (Totohasina, 2008). En effet, elle vérifie les cinq conditions ci-dessous :

(i) $M_{GK}(X_i \to X_j) = -1$ si et seulement si les deux items X_i et X_j sont alors incompatibles ;

(ii) $-1 < M_{GK}(X_i \to X_j) < 0$ si et seulement si X_i défavorise X_j , ou de manière équivalente, X_i et X_j sont négativement dépendants ;

(iii) $M_{GK}(X_i \to X_j) = 0$, si et seulement si les deux items X_i et X_j sont indépendants ;

(iv) $0 < M_{GK}(X_i \to X_j) < 1$, si et seulement si X_i favorise X_j , ou de manière équivalente, X_i et X_j sont positivement dépendants ;

(v) $M_{GK}(X_i \to X_j) = 1$ si et seulement si X_i implique logiquement X_j .

Les propositions ci-dessous montrent que la mesure de qualité $\mathrm{M_{GK}}$ n'est pas une mesure symétrique (Totohasina, 2008).

(*i*) Si X_i favorise X_j, nous avons la relation :

$$M_{GK}(X_i \to X_j) = \frac{1 - P(X_j = 1)}{1 - P(X_i = 1)} \times \frac{P(X_i = 1)}{P(X_j = 1)} M_{GK}(X_j \to X_i); \tag{6.15}$$

c'est-à-dire que, en général, $M_{GK}(X_i \to X_j) \neq M_{GK}(X_j \to X_i)$ si X_i favorise X_j. De plus, si $P(X_i = 1) \geq P(X_j = 1)$, alors $M_{GK}(X_i \to X_j) \leq M_{GK}(X_j \to X_i)$.

(*ii*) Si X_i défavorise X_j, nous avons la relation :

$$M_{GK}(X_i \to X_j) = M_{GK}(X_j \to X_i) \tag{6.16}$$

(*iii*) Si X_i défavorise X_j, nous avons l'égalité et l'équivalence suivantes (Totohasina, 2008) :

$$M^f_{GK}(X_i \to \overline{X_j}) = -M^d_{GK}(X_i \to X_j); \tag{6.17}$$

$$\text{et } \forall \alpha \in]0;1[, \text{ on a } -1 < M^d_{GK}(X_i \to X_j) < -\alpha \Longleftrightarrow \alpha < M^f_{GK}(X_i \to \overline{X_j}) < 1$$

Autre propriété de M_{GK} :
M_{GK} est une fonction définie sur $\mathbb{R}^4$ et à valeurs dans $[-1; 1]$. C'est une *fonction homogène de degré zéro*.

Expression de $\mathrm{M_{GK}}$ en « exp-log recursive »

Cela nous conduit à définir, pour chaque paire d'items X_i et X_j, trois cas possibles d'indices M_{GK} : $M^f_{GK}(X_i \to X_j)$, $M^f_{GK}(X_j \to X_i)$ et $M^d_{GK}(X_i \to X_j)$. Les indices M_{GK} peuvent s'écrire en notation d'exp-log recursive. Soit $\mathbf{n} = (n^{00}_{ij}, n^{01}_{ij}, n^{10}_{ij}, n^{11}_{ij})^T$ où $\mathbf{n}^T$ désigne le transposé de la matrice ou du vecteur $\mathbf{n}$; $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_2$, $\mathbf{B}_1$ et $\mathbf{C}_1$ sont des matrices définies par :

$$\mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \qquad \mathbf{A}_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{B}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \qquad \mathbf{C}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Alors :

$$M_{GK}^f(X_i \to X_j) = 1 - \exp(\mathbf{A}_2 \ln(\mathbf{A}_1 \mathbf{n})); \tag{6.18}$$

$$M_{GK}^f(X_j \to X_i) = 1 - \exp(\mathbf{A}_2 \ln(\mathbf{B}_1 \mathbf{n})); \tag{6.19}$$

$$M_{GK}^d(X_i \to X_j) = \exp(\mathbf{A}_2 \ln(\mathbf{C}_1 \mathbf{n})) - 1. \tag{6.20}$$

Preuve :

- $$\mathbf{A}_1\mathbf{n} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_{ij}^{00} \\ n_{ij}^{01} \\ n_{ij}^{10} \\ n_{ij}^{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n_{ij}^{00} + n_{ij}^{01} + n_{ij}^{10} + n_{ij}^{11} \\ n_{ij}^{10} + n_{ij}^{11} \\ n_{ij}^{00} + n_{ij}^{10} \\ n_{ij}^{10} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} N \\ n_i^1 \\ n_j^0 \\ n_{ij}^{10} \end{pmatrix}$$

car $n_i^1 = n_{ij}^{10} + n_{ij}^{11}$, $n_j^0 = n_{ij}^{00} + n_{ij}^{10}$, et $N = n_{ij}^{00} + n_{ij}^{01} + n_{ij}^{10} + n_{ij}^{11}$

$$\mathbf{A}_2 \ln(\mathbf{A}_1\mathbf{n}) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ln(N) \\ \ln(n_i^1) \\ \ln(n_j^0) \\ \ln(n_{ij}^{10}) \end{pmatrix} = \Big(\ln(N) - \ln(n_i^1) - \ln(n_j^0) + \ln(n_{ij}^{10})\Big)$$

$$\exp(\mathbf{A}_2 \ln(\mathbf{A}_1\mathbf{n})) = \exp\Big(\ln(N) - \ln(n_i^1) - \ln(n_j^0) + \ln(n_{ij}^{10})\Big) = \frac{e^{\ln(N)} e^{\ln(n_{ij}^{10})}}{e^{\ln(n_i^1)} e^{\ln(n_j^0)}} = \frac{N n_{ij}^{10}}{n_i^1 n_j^0}$$

Ainsi, on obtient $1 - \exp(\mathbf{A}_2 \ln(\mathbf{A}_1\mathbf{n})) = 1 - \dfrac{Nn_{ij}^{10}}{n_i^1 n_j^0} = M_{GK}^f(X_i \to X_j)$ et la relation (6.18) est verifiée. $\square$

- $$\mathbf{B}_1\mathbf{n} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_{ij}^{00} \\ n_{ij}^{01} \\ n_{ij}^{10} \\ n_{ij}^{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n_{ij}^{00} + n_{ij}^{01} + n_{ij}^{10} + n_{ij}^{11} \\ n_{ij}^{00} + n_{ij}^{01} \\ n_{ij}^{01} + n_{ij}^{11} \\ n_{ij}^{01} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} N \\ n_i^0 \\ n_j^1 \\ n_{ij}^{01} \end{pmatrix}$$

car $n_i^0 = n_{ij}^{00} + n_{ij}^{01},\ \ n_j^1 = n_{ij}^{01} + n_{ij}^{11}$, et $N = n_{ij}^{00} + n_{ij}^{01} + n_{ij}^{10} + n_{ij}^{11}$

$$\mathbf{A}_2 \ln(\mathbf{B}_1\mathbf{n}) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ln(N) \\ \ln(n_i^0) \\ \ln(n_j^1) \\ \ln(n_{ij}^{01}) \end{pmatrix} = \left(\ln(N) - \ln(n_i^0) - \ln(n_j^1) + \ln(n_{ij}^{01})\right)$$

$$\exp(\mathbf{A}_2 \ln(\mathbf{B}_1\mathbf{n})) = \exp\left(\ln(N) - \ln(n_i^0) - \ln(n_j^1) + \ln(n_{ij}^{01})\right) = \frac{e^{\ln(N)} e^{\ln(n_{ij}^{01})}}{e^{\ln(n_i^0)} e^{\ln(n_j^1)}} = \frac{Nn_{ij}^{01}}{n_i^0 n_j^1}$$

Ainsi, on obtient $1 - \exp(\mathbf{A}_2 \ln(\mathbf{B}_1\mathbf{n})) = 1 - \dfrac{Nn_{ij}^{01}}{n_i^0 n_j^1} = M_{GK}^f(X_j \to X_i)$ et la relation (6.19) est verifiée. $\square$

- $$\mathbf{C}_1\mathbf{n} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_{ij}^{00} \\ n_{ij}^{01} \\ n_{ij}^{10} \\ n_{ij}^{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n_{ij}^{00} + n_{ij}^{01} + n_{ij}^{10} + n_{ij}^{11} \\ n_{ij}^{01} + n_{ij}^{11} \\ n_{ij}^{10} + n_{ij}^{11} \\ n_{ij}^{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} N \\ n_j^1 \\ n_i^1 \\ n_{ij}^{11} \end{pmatrix}$$

car $n_j^1 = n_{ij}^{01} + n_{ij}^{11},\ \ n_i^1 = n_{ij}^{10} + n_{ij}^{11}$, et $N = n_{ij}^{00} + n_{ij}^{01} + n_{ij}^{10} + n_{ij}^{11}$

$$\mathbf{A}_2 \ln(\mathbf{C}_1\mathbf{n}) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ln(N) \\ \ln(n_j^1) \\ \ln(n_i^1) \\ \ln(n_{ij}^{11}) \end{pmatrix} = \left(\ln(N) - \ln(n_j^1) - \ln(n_i^1) + \ln(n_{ij}^{11})\right)$$

$$\exp(\mathbf{A}_2 \ln(\mathbf{C}_1\mathbf{n})) = \exp\left(\ln(N) - \ln(n_j^1) - \ln(n_i^1) + \ln(n_{ij}^{11})\right) = \frac{e^{\ln(N)} e^{\ln(n_{ij}^{11})}}{e^{\ln(n_i^1)} e^{\ln(n_j^1)}} = \frac{N n_{ij}^{11}}{n_i^1 n_j^1}$$

Ainsi, on obtient $\exp(\mathbf{A}_2 \ln(\mathbf{C}_1\mathbf{n})) - 1 = \dfrac{N n_{ij}^{11}}{n_i^1 n_j^1} - 1 = M_{GK}^d(X_i \to X_j)$ et la relation (6.20) est verifiée. □

6.3.2 Erreurs-types (ET) des indices M_{GK}

Dans la modélisation marginale de données catégoriques (par exemple, voir Bergsma, Wicher, Croon et Hagenaars (2009), Van der Ark, Croon et Sijtsma (2008)), une méthode en deux étapes est utilisée pour calculer les erreurs-types des statistiques de l'échantillon. Nous décrivons cette méthode pour les indices M_{GK}. La première étape consiste à écrire les indices M_{GK} en fonction des fréquences observés des données. Soit le vecteur **n** de l'espace $\mathbb{N}^4$. Nous avons vu que les indices M_{GK} peuvent être écrits en fonction du vecteur **n**, c'est-à-dire $M_{GK} = g(\mathbf{n})$ où g sont des fonctions scalaires.

La deuxième étape consiste à utiliser la méthode delta pour obtenir les erreurs-types asymptotique pour les indices M_{GK}. Soit $\mathbf{V_n}$ et $\mathbf{V}_{g(\mathbf{n})}$ les matrices asymptotiques de variance-covariance respectives de **n** et $g(\mathbf{n})$; Soit N la taille totale de l'échantillon ; et que $\mathbf{D}(\mathbf{x})$ soit une matrice diagonale avec les éléments de vecteur **x** sur la diagonale. Si **n** est échantillonné à partir d'une distribution multinomiale, alors $\mathbf{V_n} = \mathbf{D}(\mathbf{n}) - \mathbf{n}N^{-1}\mathbf{n}^T$ (Agresti, 2007 ; W. P. Bergsma, 1997). Maintenant, si $\mathbf{G} = \mathbf{G}\ (\mathbf{n})$ est la matrice jacobienne, qui est la matrice des dérivées partielles premières de $g(\mathbf{n})$ par rapport à **n**, alors selon la méthode delta

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_{g(\mathbf{n})} &= \mathbf{G}\mathbf{V_n}\mathbf{G}^T \\ &= \mathbf{G}[\mathbf{D}(\mathbf{n}) - \mathbf{n}N^{-1}\mathbf{n}^T]\mathbf{G}^T \\ &= \mathbf{G}\mathbf{D}(\mathbf{n})\mathbf{G}^T - \mathbf{G}\mathbf{n}N^{-1}\mathbf{n}^T\mathbf{G}^T \end{aligned} \tag{6.21}$$

Dans la plupart des applications de modèles marginaux, les fonctions g sont homogènes de l'ordre 0 ; c'est-à-dire que la valeur de g () ne change pas lorsque les valeurs de ses arguments sont toutes multipliées par la même constante t : $g(t\mathbf{n}) = g(\mathbf{n})$. Pour de telles fonctions, peu importe que **n** représente les fréquences observées ou les probabilités observées, les fonctions $g_(\mathbf{n})$ sont également fonctions homogènes. Le théorème de la fonction homogène d'Euler (W. P. Bergsma, 1997) implique maintenant que **Gn** = 0. Par conséquent, l'équation (6.21) donne

$$\mathbf{V}_{g(\mathbf{n})} = \mathbf{GD}(\mathbf{n})\mathbf{G}^T \tag{6.22}$$

Ainsi, la racine carrée de la diagonale de $V_{g(\mathbf{n})}$ donne le nécessaire erreurs-type (ET).

La notation utilisée dans ces dérivations est appelée la notation exp-log généralisée (W. P. Bergsma, 1997 ; Kritzer, 1977). De plus, Kuijpers, Van der Ark et Croon (2013) montre comment obtenir la matrice des dérivées partielles **G**. Pour calculer les erreus-types de ces indices M_{GK}, on applique cette méthode en posant $g_1(\mathbf{n}) = M^f_{GK}(X_i \to X_j)$, $g_2(\mathbf{n}) = M^f_{GK}(X_j \to X_i)$ et $g_3(\mathbf{n}) = M^d_{GK}(X_i \to X_j)$ et l'intervalle de confiance à 95% pour l'estimation est $M_{GK} \pm 1,96 \times ET(M_{GK}) = [M_{GK} - 1,96 \times ET; M_{GK} + 1,96 \times ET]$ (Agresti, 2007 ; W. P. Bergsma, 1997).

Proposition 1

Soient ET_1, ET_2 et ET_3 les erreus-types des indices respectifs $M^f_{GK}(X_i \to X_j)$, $M^f_{GK}(X_j \to X_i)$ et $M^d_{GK}(X_i \to X_j)$. On a :

$$ET_1 = \frac{Nn^{10}_{ij}}{n^1_i n^0_j}\left(n^{00}_{ij}\left(\frac{1}{N}-\frac{1}{n^0_j}\right)^2 + n^{01}_{ij}\left(\frac{1}{N}\right)^2 + n^{10}_{ij}\left(\frac{1}{N}-\frac{1}{n^1_i}-\frac{1}{n^0_j}+\frac{1}{n^{10}_{ij}}\right)^2 + n^{11}_{ij}\left(\frac{1}{N}-\frac{1}{n^1_i}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}};$$

$$ET_2 = \frac{Nn^{01}_{ij}}{n^0_i n^1_j}\left(n^{00}_{ij}\left(\frac{1}{N}-\frac{1}{n^0_i}\right)^2 + n^{01}_{ij}\left(\frac{1}{N}-\frac{1}{n^0_i}-\frac{1}{n^1_j}+\frac{1}{n^{01}_{ij}}\right)^2 + n^{10}_{ij}\left(\frac{1}{N}\right)^2 + n^{11}_{ij}\left(\frac{1}{N}-\frac{1}{n^1_j}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}};$$

$$ET_3 = \frac{Nn^{11}_{ij}}{n^1_i n^1_j}\left(n^{00}_{ij}\left(\frac{1}{N}\right)^2 + n^{01}_{ij}\left(\frac{1}{N}-\frac{1}{n^1_j}\right)^2 + n^{10}_{ij}\left(\frac{1}{N}-\frac{1}{n^1_i}\right)^2 + n^{11}_{ij}\left(\frac{1}{N}-\frac{1}{n^1_i}-\frac{1}{n^1_j}+\frac{1}{n^{11}_{ij}}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Preuve :

- Soit $g_1(\mathbf{n}) = 1 - \exp(\mathbf{A}_2 \ln(\mathbf{A}_1\mathbf{n}))$ et posons $f_0(\mathbf{n}) = \mathbf{n}$, $f_1(\mathbf{n}) = \ln(\mathbf{A}_1 f_0(\mathbf{n}))$ et $f_2(\mathbf{n}) =$

$\exp(\mathbf{A}_2 f_1(\mathbf{n}))$.

Nous avons $\dfrac{\partial f_0(\mathbf{n})}{\partial \mathbf{n}^T} = \mathbf{I}$, où $\mathbf{I}$ est une matrice identité (ou matrice unité d'ordre 4).

$$\begin{aligned}\frac{\partial f_1(\mathbf{n})}{\partial \mathbf{n}^T} &= \mathbf{D}^{-1}(\mathbf{A}_1 f_0)\mathbf{A}_1 \frac{\partial f_0(\mathbf{n})}{\partial \mathbf{n}^T} \\ &= \mathbf{D}^{-1}(\mathbf{A}_1\mathbf{n})\mathbf{A}_1\mathbf{I} \\ &= \mathbf{D}^{-1}(\mathbf{A}_1\mathbf{n})\mathbf{A}_1\end{aligned}$$

avec

$$\mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} ; \ \mathbf{A}_1\mathbf{n} = \begin{pmatrix} N \\ n_i^1 \\ n_j^0 \\ n_{ij}^{10} \end{pmatrix}$$

et

$$\mathbf{D}^{-1}(\mathbf{A}_1\mathbf{n}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{N} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{n_i^1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{n_j^0} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{n_{ij}^{10}} \end{pmatrix}. \text{ Donc, } \frac{\partial f_1(\mathbf{n})}{\partial \mathbf{n}^T} = \begin{pmatrix} \frac{1}{N} & \frac{1}{N} & \frac{1}{N} & \frac{1}{N} \\ 0 & 0 & \frac{1}{n_i^1} & \frac{1}{n_i^1} \\ \frac{1}{n_j^0} & 0 & \frac{1}{n_j^0} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{n_{ij}^{10}} & 0 \end{pmatrix}$$

Ensuite, pour $f_2(\mathbf{n})$, nous avons $\dfrac{\partial f_2(\mathbf{n})}{\partial \mathbf{n}^T} = \mathbf{D}(\exp(\mathbf{A}_2 f_1))\mathbf{A}_2 \dfrac{\partial f_1(\mathbf{n})}{\partial \mathbf{n}^T}$, avec

$$\mathbf{A}_2 f_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ln(N) \\ \ln(n_i^1) \\ \ln(n_j^0) \\ \ln(n_{ij}^{10}) \end{pmatrix} = \left(\ln(N) - \ln(n_i^1) - \ln(n_j^0) + \ln(n_{ij}^{10})\right);$$

$$\exp(\mathbf{A}_2 f_1) = \frac{N n_{ij}^{10}}{n_i^1 n_j^0} \qquad ; \qquad \mathbf{D}(\exp(\mathbf{A}_2 f_1)) = \frac{N n_{ij}^{10}}{n_i^1 n_j^0}$$

$$\text{et } \mathbf{A}_2 \frac{\partial f_1(\mathbf{n})}{\partial \mathbf{n}^T} = \left(\left(\frac{1}{N} - \frac{1}{n_j^0}\right) \quad \frac{1}{N} \quad \left(\frac{1}{N} - \frac{1}{n_i^1} - \frac{1}{n_j^0} + \frac{1}{n_{ij}^{10}}\right) \quad \left(\frac{1}{N} - \frac{1}{n_i^1}\right) \right).$$

$$\text{Donc } \frac{\partial f_2(\mathbf{n})}{\partial \mathbf{n}^T} = \frac{N n_{ij}^{10}}{n_i^1 n_j^0} \left(\left(\frac{1}{N} - \frac{1}{n_j^0}\right) \quad \frac{1}{N} \quad \left(\frac{1}{N} - \frac{1}{n_i^1} - \frac{1}{n_j^0} + \frac{1}{n_{ij}^{10}}\right) \quad \left(\frac{1}{N} - \frac{1}{n_i^1}\right) \right)$$

et on obtient la matrice jacobienne $\mathbf{G}_1$ de $g_1(\mathbf{n})$: $\mathbf{G}_1 = \dfrac{\partial g_1(\mathbf{n})}{\partial \mathbf{n}^T} = -\dfrac{\partial f_2(\mathbf{n})}{\partial \mathbf{n}^T}$.

De plus, comme $\mathbf{D(n)}= \begin{pmatrix} n_{ij}^{00} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & n_{ij}^{01} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & n_{ij}^{10} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & n_{ij}^{11} \end{pmatrix}$, la matrice asymptotique de variance-covariance de $g_1(\mathbf{n})$ est égale à $\mathbf{V}_{g_1(\mathbf{n})} = \mathbf{G}_1\mathbf{D}(\mathbf{n})\mathbf{G}_1^T$

$$\mathbf{V}_{g_1(\mathbf{n})} = \left(\frac{Nn_{ij}^{10}}{n_i^1 n_j^0}\right)^2 \left(n_{ij}^{00}\left(\frac{1}{N} - \frac{1}{n_j^0}\right)^2 + n_{ij}^{01}\left(\frac{1}{N}\right)^2 + n_{ij}^{10}\left(\frac{1}{N} - \frac{1}{n_i^1} - \frac{1}{n_j^0} + \frac{1}{n_{ij}^{10}}\right)^2 \right.$$
$$\left. + n_{ij}^{11}\left(\frac{1}{N} - \frac{1}{n_i^1}\right)^2\right).$$

Ainsi,l'erreur-type ET_1 de l'indice $M_{GK}^f(X_i \to X_j)$ est

$$\left(\frac{Nn_{ij}^{10}}{n_i^1 n_j^0}\right) \left(n_{ij}^{00}\left(\frac{1}{N} - \frac{1}{n_j^0}\right)^2 + n_{ij}^{01}\left(\frac{1}{N}\right)^2 + n_{ij}^{10}\left(\frac{1}{N} - \frac{1}{n_i^1} - \frac{1}{n_j^0} + \frac{1}{n_{ij}^{10}}\right)^2 + n_{ij}^{11}\left(\frac{1}{N} - \frac{1}{n_i^1}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

□

• Pour le deuxième indice $M_{GK}^f(X_j \to X_i)$, soit $g_2(\mathbf{n}) = 1 - \exp(\mathbf{A}_2 \ln(\mathbf{B}_1\mathbf{n}))$ et posons $f_0(\mathbf{n}) = \mathbf{n}$, $f_3(\mathbf{n}) = \ln(\mathbf{B}_1 f_0(\mathbf{n}))$ et $f_4(\mathbf{n}) = \exp(\mathbf{A}_2 f_3(\mathbf{n}))$.
En procedant de la même manière que précédent, on obtient la matrice asymptotique de variance-covariance $\mathbf{V}_{g_2(\mathbf{n})}$ de $g_2(\mathbf{n})$ tel que

$$\mathbf{V}_{g_2(\mathbf{n})} = \left(\frac{Nn_{ij}^{01}}{n_i^0 n_j^1}\right)^2 \left(n_{ij}^{00}\left(\frac{1}{N} - \frac{1}{n_i^0}\right)^2 + n_{ij}^{01}\left(\frac{1}{N} - \frac{1}{n_i^0} - \frac{1}{n_j^1} + \frac{1}{n_{ij}^{01}}\right)^2 + n_{ij}^{10}\left(\frac{1}{N}\right)^2 \right.$$
$$\left. + n_{ij}^{11}\left(\frac{1}{N} - \frac{1}{n_j^1}\right)^2\right).$$

Ainsi,l'erreur-type ET_2 de l'indice $M_{GK}^f(X_j \to X_i)$ est

$$\frac{Nn_{ij}^{01}}{n_i^0 n_j^1} \left(n_{ij}^{00}\left(\frac{1}{N} - \frac{1}{n_i^0}\right)^2 + n_{ij}^{01}\left(\frac{1}{N} - \frac{1}{n_i^0} - \frac{1}{n_j^1} + \frac{1}{n_{ij}^{01}}\right)^2 + n_{ij}^{10}\left(\frac{1}{N}\right)^2 + n_{ij}^{11}\left(\frac{1}{N} - \frac{1}{n_j^1}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

□

• Et pour le troisième indice $M^d_{GK}(X_i \to X_j)$, soit $g_3(\mathbf{n}) = \exp(\mathbf{A}_2 \ln(\mathbf{C}_1\mathbf{n})) - 1$ et posons $f_0(\mathbf{n}) = \mathbf{n}$, $f_5(\mathbf{n}) = \ln(\mathbf{C}_1 f_0(\mathbf{n}))$ et $f_6(\mathbf{n}) = \exp(\mathbf{A}_2 f_5(\mathbf{n}))$.
En procedant de la même manière que précédent, on obtient la matrice asymptotique de variance-covariance $\mathbf{V}_{g_3(\mathbf{n})}$ de $g_3(\mathbf{n})$ tel que

$$\mathbf{V}_{g_3(\mathbf{n})} = \left(\frac{Nn^{11}_{ij}}{n^1_i n^1_j}\right)^2 \left(n^{00}_{ij}\left(\frac{1}{N}\right)^2 + n^{01}_{ij}\left(\frac{1}{N} - \frac{1}{n^1_j}\right)^2 + n^{10}_{ij}\left(\frac{1}{N} - \frac{1}{n^1_i}\right)^2 \right.$$
$$\left. + n^{11}_{ij}\left(\frac{1}{N} - \frac{1}{n^1_i} - \frac{1}{n^1_j} + \frac{1}{n^{11}_{ij}}\right)^2\right).$$

Ainsi,l'erreur-type ET_3 de l'indice $M^d_{GK}(X_i \to X_j)$ est

$$\left(\frac{Nn^{11}_{ij}}{n^1_i n^1_j}\right)\left(n^{00}_{ij}\left(\frac{1}{N}\right)^2 + n^{01}_{ij}\left(\frac{1}{N} - \frac{1}{n^1_j}\right)^2 + n^{10}_{ij}\left(\frac{1}{N} - \frac{1}{n^1_i}\right)^2 + n^{11}_{ij}\left(\frac{1}{N} - \frac{1}{n^1_i} - \frac{1}{n^1_j} + \frac{1}{n^{11}_{ij}}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

□

6.3.3 Relation entre les indices $\mathbf{M_{GK}}$ et l'échelle de Mokken et construction d'une échelle utilisant les indices $\mathbf{M_{GK}}$

Rappelons que la mesure de Loevinger (Feno, 2007) est définie par :

$$Loevinger(X_i \to X_j) = \frac{P(X_j = 1|X_i = 1) - P(X_j = 1)}{1 - P(X_j = 1)}$$

Cette mesure de qualité est identique à $\mathrm{M_{GK}}$ dans le cas où la prémisse et le conséquent d'une règle se favorisent, c'est-à-dire $Loevinger(X_i \to X_j) = M^f_{GK}(X_i \to X_j)$.
Si $P(X_i = 1) > P(X_j = 1)$, la mesure de Loevinger $Loevinger(X_j \to X_i)$ n'est autre que le coefficient H_{ij} d'échelle de Loevinger entre les items X_i et X_j, défini par l'équation (6.4), base de l'échelle de Mokken. Par conséquent, si $P(X_i = 1) > P(X_j = 1)$, alors $M^f_{GK}(X_j \to X_i) = H_{ij}$, c'est-à-dire, pour tous X_i et X_j, $H_{ij} = \max(M^f_{GK}(X_i \to X_j); M^f_{GK}(X_j \to X_i))$. L'analyse d'échelle de Mokken utilise donc un des indices M_{GK} : c'est la composante favorisante M^f_{GK}.
D'ailleur, dans MHMM, l'hypothèse $\sigma_{ij} \geq 0$ de l'équation (6.3) signifie que X_i favorise X_j (ou $P(X_j = 1|X_i = 1) - P(X_j = 1) > 0$. En effet, selon Totohasina (2008), la covariance σ_{ij} entre X_i et X_j et la mesure M_{GK} ont le même signe. L'analyse d'échelle de Mokken se limite alors aux items dont l'un favorise l'autre. Pourtant, nous pouvons prévoir les informations entre les autres items qui ne peuvent pas mettre à l'échelle de Mokken.

De ce fait, dans le cas des items X_i et X_j où X_i défavorise X_j (ou $\sigma_{ij} < 0$), nous introduisons l'indice M^d_{GK} pour construire une sous-échelle des items défavorisant entre eux. Ains, pour un ensemble S d'items, on peut avoir :

- soit une échelle dans le cas de de MHMM, c'est-à-dire, pour tous les items $\sigma_{ij} > 0$;
- soit deux sous-échelles : une sous-échelle des items favorisant entre eux et une autre sous-échelle des items défavorisant entre eux.

Dans le cas où X_i défavorise X_j, d'après la relation (6.17), il suffit d'analyser les coefficients d'echelle de Loevinger entre les items X_i et $\overline{X_j}$, c'est-à-dire, la réponse négative est favorable au trait latent pour un item et la réponse positive est défavorable pour l'autre item. Dans ce cas, le coefficient $H_{ij} = -M^d_{GK}(X_i \to X_j)$. Aini, pour construire un échelle, nous pouvons utiliser les indices M_{GK} dans l'analyse d'échelle de Mokken, en remplaçant H_{ij} par $\max(M^f_{GK}(X_i \to X_j); M^f_{GK}(X_j \to X_i))$ si X_i favorise X_j et par $-M^d_{GK}(X_i \to X_j)$ si X_i défavorise X_j.

6.4 Analyse des réponses aux items proposés

6.4.1 Principe d'évaluation de la qualité des mesures à l'aide d'analyse d'échelle de Mokken

La procédure d'application d'analyse d'échelle de Mokken dans le cadre d'évaluer les propriétés de mesure d'une évaluation éducative comprend quatre grandes étapes : l'importation de la matrice de données ; l'analyse des opportunités d'évaluation (OE) ; l'interprétation des résultats dans le contexte et enfin la modification des OE (Wind, 2017).

La première étape de la procédure consiste à importer la matrice de données dans un logiciel pour l'analyse d'échelle de Mokken. Pour les applications de base de l'analyse d'échelle de Mokken, les données qui sont incluses dans l'analyse comprennent les réponses des apprenants aux OE. Dans ce cas, le terme OE est utilisé pour décrire les procédures utilisées pour évaluer les apprenants dans une évaluation éducative qui se traduit par des scores ordinaux. Après l'importation des données dans le logiciel pour l'analyse d'échelle de Mokken, la deuxième étape de la procédure d'analyse de l'évaluation éducative utilisant l'analyse d'échelle de Mokken est d'analyser les OE en utilisant des indicateurs de la qualité de mesure basée sur le MHMM et le MDMM. Dans cette étape, trois catégories d'indicateurs peuvent être utilisé pour évaluer la qualité de la mesure : la monotonie, les coefficients d'échelle et l'ordre invariant d'items. Pour l'ordre invariant d'items, lorsque l'analyse d'échelle de Mokken est appliquée aux tests d'évaluation pédagogique, il est important de noter que les implications de l'ordre invariant sont quelque peu différentes des implications dans les analyses d'échelle de Mokken traditionnelles. Plus précisément, un ordre invariant cohérent d'items ou de niveaux d'évaluateurs de rendement des apprenants pourrait être une préoccupation d'équité qui doit être soutenue par des preuves empiriques afin d'informer l'interprétation et l'utilisation des scores. En outre, dans le contexte d'évaluation pédagogique, l'ordre observé de difficulté d'OE n'est pas généralement par rapport à une spécification a priori de l'ordre prévu. Au lieu de cela, la preuve simple est plus nécessaire que l'ordre cohérent pour tous les apprenants de l'échantillon. Les méthodes d'évaluation de l'hypothèse d'ordre invariant dans les données empiriques impliquent l'analyse des fonctions de réponse pour la preuve de non intersection. Semblable à l'hypothèse de monotonie, l'ordre invariant d'items peut être évalué pour les OE dichotomiques en utilisant des preuves graphiques et statistiques. Plusieurs procédures sont disponibles pour évaluer les l'ordre invariant d'items pour les OE dichotomiques, y compris la méthode de score reste, la méthode de division d'items, les matrices de proportion, et la méthode de division de score reste (Van Schuur, 2011). Pour les OE dichotomiques, la procédure graphique d'évaluation de l'ordre invariant d'items basé sur la méthode de score reste implique un traçage de la probabilité d'une réponse correcte dans une paire d'OE en fonction des groupes de score reste. Des exemples graphiques sont fournis dans le travail de Wind (2017).

La troisième étape majeure de la procédure analytique consiste à interpréter les résultats de l'analyse des OE dans le contexte de l'évaluation éducative (Wind, 2017). Les résultats de la monotonie, des coefficients d'échelle de Loevinger et les analyses d'ordre invariant doivent être considérées au niveau des OE individuels en fonction du contexte unique dans lequel l'évaluation est utilisée. Essentiellement, le but de cette étape est d'examiner les résultats en fonction de deux considérations principales : (1) les implications pratiques des violations des exigences du modèle d'analyse d'échelle de Mokken en termes d'interprétation et d'utilisation prévues de l'évaluation et les conséquences de l'évaluation et (2) des opportunités pour améliorer la qualité de l'OE dans les itérations suivantes, qui dépendent de la considérations pratiques, comme le temps et d'autres ressources, ainsi que le rôle du contenu de l'OE en termes d'alignement sur les normes ou des objectifs dans le plan du contenu du test.

La quatrième étape de la procédure analytique est de modifier l'ensemble des OE. Quand il est possible de réviser les OE pour lesquelles les violations de la monotonie, des coefficients d'échelle de Loevinger et de d'ordre invariant ont été observées, ces révisions doivent être informées par les meilleures pratiques pour le développement de l'évaluation et la révision dans l'évaluation éducative.

6.4.2 Analyse de test d'évaluation sur le calcul mental

Nous analysons les données relatives à l'échelle d'habileté calculatoire utilisant la schématisation de la multiplication mentale. Notre échelle d'habileté est composé de 10 items (notés respectivement *Item*_13×17, *Item*_19×17, *Item*_23×29, *Item*_97×127, *Item*_47×53, *Item*_97×98, *Item*_97×107, *Item*_13×79, *Item*_989×997, *Item*_103×797) (cf. Annexe) de la multiplication mentale de deux facteurs selon la technique schématique basée sur une ou deux références. Ce test a été proposé à 198 personnes dont 74 élèves de la classe 1ère S, 82 élèves classe de terminale D et 42 étudiants des parcours Technique Commerciale et Technique Bancaire de l'IST (niveau Bac + 2ans). Notons que ce test d'évaluation a été précédé de trois séances de formation avec exercice oral. Dans la version originale d'ensemble de données, les catégories de réponses sont dichotomiques : codés en 1 si la réponse est correcte et codés en 0 sinon. Après avoir trouvé les probabilités de réponses vraies pour tous les items, ces items sont classés et numérotés par ordre décroissant suivant la facilité des items : l'item X_1 est plus facile que l'item X_2, l'item X_2 est plus facile que l'item X_3 et ainsi de suite (c.f tableau 6.2). Des analyses d'échelle de Mokken ont été effectuées sur les données obtenues.

TABLEAU 6.2 – Ordre de popularité ou de facilité des items X_i

Item X_i	Idendification d'item	$P(X_i = 1)$
X_1	*Item*_13×17	0,833
X_2	*Item*_97×107	0,823
X_3	*Item*_19×17	0,768
X_4	*Item*_97×98	0,747
X_5	*Item*_23×29	0,712
X_6	*Item*_47×53	0,657
X_7	*Item*_989×997	0,566
X_8	*Item*_97×127	0,54
X_9	*Item*_13×79	0,359
X_{10}	*Item*_103×797	0,273

Les OE de calcul mental étaient basées sur les concepts liés à la schématisation de la multiplication mentale de deux facteurs selon la technique schématique basée sur une ou deux références. En outre, l'analyse exploratoire fondée sur la procédure de sélection automatisée des items, qui identifie les items scalables, a révélé que les items peuvent être décrits en utilisant une seule échelle de Mokken - fournissant ainsi la preuve à l'appui de l'hypothèse de l'unidimensionnalité.

Après les réponses des apprenants aux items de test d'évaluation recueillies, la matrice des réponses dichotomique a été importée dans le « package mokken » de R (Van der Ark, 2007, 2012) pour analyser. Ensuite, les OE ont été évaluées en utilisant les trois catégories d'indicateurs de qualité de mesure décrits ci-dessus : la monotonie, les coefficients d'échelle et l'ordre invariant. Comme résultats pour les items de calcul mental, aucune violation de la monotonie n'a été révélée. Cependant, l'inspection des FRI utilisées pour évaluer la monotonie ont révélé des différences dans la pente et la forme des FRI à travers les 10 items. Comme aucune violation de la monotonie n'a été observée pour ce test d'évaluation, ces résultats suggèrent que l'ordre relatif des apprenants en termes de construction est cohérent à travers les items de calcul mental. En d'autres termes, cette conclusion suggère que la conclusion relative sur l'ordre de tous les élèves et les étudiants en termes de connaissances à la schématisation de la multiplication mentale de deux facteurs selon la technique schématique basée sur une ou deux références sont compatibles à travers tous les 10 items.

Pour les coefficients d'échelle, le coefficient d'échelle de Loevinger global pour les 10 items de calcul mental est $H = 0,51$ avec l'erreur-type $ET = 0,03$. L'intervalle de confiance à 95% pour cette estimation est $H \pm 1,96 \times ET(H) = [0,45; 0,57]$ (qui va d'une échelle modérée de Mokken à une échelle forte de Mokken). Les coefficients d'échelle H_j des items individuels et leurs erreurs-types correspondantes sont indiqués dans le tableau 6.3. L'analyse de ces coefficients révèle que le coefficient d'échelle de chaque item de calcul mental est au-dessus de la valeur minimale $H_j = 0,3$ de Mokken et varie de $H_j = 0,32$ ($ET = 0,04$) pour l'item X_2, qui est le moins scalable, à $H_j = 0,67$ ($ET = 0,05$) pour l'item X_{10} qui est le plus scalable. Dans l'ensemble, ces résultats suggèrent que certaines erreurs de Guttman observées pour chacun des items d'évaluation examinés dans cette étude, et que chacun de ces items de calcul mental contribue à un ordre globale significatif des apprenants en termes de connaissances en calcul mental utilisant la schématisation de la multiplication mentale de deux facteurs selon la technique schématique basée sur une ou deux références. Comme $H \geq 0,5$, les 10 items de calcul mental constituent une forte échelle de Mokken et l'évaluation du calcul mental est une évaluation de forte enjeux lors de la mise en œuvre d'une schématisation de la multiplication mentale à référence. Ainsi, les variations observées des coefficients d'échelle d'items n'ont pas posé de problème sérieux sur l'interprétation de la réalisation des apprenants en terme de décision sur les apprenants individuels. D'ailleurs, tous les 10 items de calcul mental sont si scalable que nous devons pas faire appel aux indices M_{GK} pour les items non scalables et la révision des OE n'est pas nécessaire.

TABLEAU 6.3 – Les coefficients d'échelle H_j des 10 items individuels X_j

Item X_j	H_j	ET
1	$0,59$	$0,05$
2	$0,32$	$0,04$
3	$0,37$	$0,04$
4	$0,52$	$0,05$
5	$0,45$	$0,05$
6	$0,57$	$0,05$
7	$0,37$	$0,04$
8	$0,53$	$0,05$
9	$0,59$	$0,05$
10	$0,67$	$0,05$

6.5 Conclusion

L'analyse d'échelle de Mokken utilise les coefficients de Loevinger pour la construction d'échelle toute en restant dans le cas homogène. Elle est actuellement développée et implémentée dans des programmes, à savoir MSP (qui est commercial) et le logiciel libre R via « package mokken ». Bien que c'est un modèle TRI non paramétrique le plus populaire, elle se limite aux items homogènes vérifiant la covariance inter-item non négative. Comme la composante favorisante M_{GK}^f de la mesure $\mathrm{M_{GK}}$ est égale à la mesure de Loevinger H_{ij}, le MHMM utilise une partie de la mesure $\mathrm{M_{GK}}$ qui est la mesure utilisé dans l'ASI. Outre la pertinence de $\mathrm{M_{GK}}$ mesurant la qualité des règles d'association entre des motifs (Totohasina, 2008 ; Feno, 2007), les relations causales ou les liens implicatifs entre des items, $\mathrm{M_{GK}}$ permettent de construire, dans un ensemble S d'items, deux sous-échelles : une échelle des items favorisant entre eux et une autre sous-échelle des items défavorisant entre eux. Avec $\mathrm{M_{GK}}$, outil d'élaboration des graphes implicatifs appliqués en didactique des mathématiques et implémenté dans un nouvel programme CHIC-$\mathrm{M_{GK}}$ (Bemarisika, 2016) (séquence du logiciel CHIC de Gras (Gras *et al.*, 1996), version Couturier (2008)) de représentation en graphe des chaînes implicatives entre les règles d'association valides, on peut construire aussi une échelle de Mokken composée de deux sous-échelles. D'ailleur, le CHIC-$\mathrm{M_{GK}}$ implémente deux vues graphiques supplémentaires : la hiérarchie de similarité et la hiérarchie cohésive (Bemarisika, 2016).

Conclusion générale et perspectives

Conclusion sur le calcul mental

Cette étude a analysé les pratiques relatives à la nature, les aspects, les fonctions, et les méthodes d'enseignement associées au calcul mental de réponses exacte au-delà des faits de base.

On distingue deux aspects du calcul mental : le calcul automatisé et le calcul réfléchi qui sont décrits au chapitre 2. Les termes, d'une époque à une autre, ont quelque peu varié. En première approximation, on peut être tenté d'opposer le calcul mental au calcul écrit ou instrumenté. Mais pratiquer un calcul mental ne signifie pas que tout se passe sans écrire. L'expression « calcul mental » n'implique pas qu'aucun support écrit ne puisse intervenir dans la consigne, dans la formulation du résultat, voire des résultats intermédiaires (Butlen et Pezard, 2000). Ce qu'on désigne sous le terme de calcul écrit (l'opération posée) requiert la connaissance des tables et la gestion des retenues, donc du calcul mental déjà mais encore trop léger. Le calcul automatisé vise la mobilisation automatique de résultats et de procédures (appelées faits numériques) supposées difficiles à mémoriser comme les tables d'addition, de multiplication, quelques doubles, carrés, multiplier un nombre entier par 10 ou 100. Dans ce cas, l'exigence de rapidité sera un critère de réussite. Avant d'être automatisés, les résultats sont construits par le raisonnement, donc « réfléchis ». L'entraînement quotidien et progressif conduira l'élève à mémoriser peu à peu ces faits numériques sans le recours au calcul réfléchi (Butlen et Pezard, 1991). Tandis que le calcul réfléchi (ou raisonné) consiste pour l'élève à mettre en œuvre des procédures qui relèvent d'un traitement raisonné lié aux nombres en jeu. En effet, le calcul réfléchi fait appel à l'élaboration et l'utilisation de procédures intermédiaires pour obtenir le résultat et peut faire intervenir l'écrit car les élèves peuvent avoir besoin de garder une trace écrite des étapes du calcul. L'élève doit donc adapter son raisonnement au contexte et développer la caractérisation des nombres. La rapidité, sans être complètement

écartée, peut être retenue comme un critère de réussite.
Outre les composantes affectives, les composantes conceptuelles, ainsi que les concepts et compétences connexes décrites au chapitre 3, les stratégies de calcul mental sont des composantes de base du calcul mental. Alors, pour progresser, il faut s'entrainer, mettre en place diverses stratégies pour que les choses deviennent naturelles.

En plus de sa fonction pédagogique classique consistant à développer la capacité à conduire un raisonnement rapide sur le choix de stratégie gagnante de ses dimensions de calcul automatisé ou réfléchi (Mansour, 2013), le calcul mental possède, entre autres, une fonction sociale indispensable dans la vie quotidienne pour obtenir discrètement et rapidement un résultat exact et un ordre de grandeur pour se contrôler. Entreprendre des calculs mentaux est non seulement la méthode la plus simple pour effectuer de nombreuses procédures arithmétiques, il est également la principale forme de calcul utilisée dans la vie quotidienne. Or l'estimation est une partie importante du programme d'études de mathématiques. Elle permet, par exemple, de vérifier la cohérence des résultats lorsqu'on résout des problèmes avec une calculatrice. En effet, souvent, nous devons faire des calculs rapidement et mentalement à des moments où nous n'avons ni papier, ni crayon, ni calculatrice sous la main. Ainsi, le calcul mental ayant alors une grande utilité pratique contribue à la préparation des apprenants à la vie active. C'est un calcul d'usage.
De plus, faisant nécessairement appel aux connaissances des nombres et des opérations mathématiques, le calcul mental fait non seulement appel à la mémoire, mais il la développe. Ensuite, exigeant une attention constante et ne pouvant pas se faire d'une manière mécanique, comme c'est souvent le cas dans le calcul écrit, le calcul mental s'avère aussi un moyen important pour développer le sens du nombre et pour acquérir une meilleure compréhension de la valeur de position et des opérations mathématiques. L'élève qui est habile en calcul mental sera plus habile à saisir les liens entre les données numériques et à les transformer.
Enfin, le calcul mental permet de structurer le cerveau, de façonner sa façon de réfléchir, de booster la mémoire, l'esprit d'analyse et de synthèse. Il contribue ainsi à former le talent mathématique, c'est-à-dire la pensée logique, la capacité de généralisation rapide, de réversibilité du raisonnement mathématique, la flexibilité de la pensée, comme en témoigne l'existence des calculateurs prodiges dont fait partie le célèbre garçon allemand Rüdiger (Camos, 2004). Des études ont montré que plus l'on entraînera son cerveau à se souvenir, plus des automatismes apparaîtront et sa capacité en calcul mental sera décuplée. Certains scientifiques ont pu déterminer que le calcul mental active des zones du cerveau liées à l'attention

spatiale (Krutetski, 2004). La représentation des nombres serait ainsi comparable à la représentation spatiale. Bon pour le cerveau, il permettrait de lutter contre le vieillissement et de retarder des maladies comme Alzheimer. Il permet aussi de faire fonctionner ses neurones à toute vitesse en s'amusant et de faire des mathématiques sans s'en rendre vraiment compte. Par conséquent, le calcul mental a tout bon.

Concernant l'enseignement-apprentissage du calcul mental à Madagascar décrit au chapitre 4, notre étude est basée sur l'analyse du programme scolaire de mathématiques, sur les faits constatés depuis ma carrière dans l'enseignement ainsi que des expérimentations en classe sur l'enseignement de calcul mental. À Madagascar, d'après le programme scolaire en vigueur, la pratique de l'enseignement-apprentissage propre du calcul mental se fait à l'école primaire, de la classe de 9$^{\text{ème}}$ à la classe de 7$^{\text{ème}}$, dans laquelle nous avons analysé les problèmes liés à ce type de calcul, entres autres, les langages d'expression, le langage mathématique et l'enseignement de l'arithmétique.
Par contre, la rubrique « calcul mental » ne figure pas dans les programmes scolaires de mathématiques du secondaire (Collège et Lycée). L'enseignement de l'arithmétique est diminué au Collège et disparaît totalement au Lycée, sauf en classe de TC. Pour que le calcul mental soit considéré comme la méthode de premier recours (Australian Education Council, 1991), il faudra une plus grande visibilité, à la fois dans le programme scolaire et de la manière dont les méthodes de calcul sont enseignées. Cela nous incite l'enseignement des nouvelles formes de calcul mental dans l'école secondaire. Pour ce faire, nous avons proposé des astuces et techniques des calculs mentaux et des fiches de calcul mental en secondaire.
Par ailleurs, le concept de nombre premier et la décomposition de nombre en produit des facteurs des nombres premiers sont enseignés à partir de la classe de 6$^{\text{ème}}$, dès lors, quant à la multiplication mentale de deux facteurs, il en existe plusieurs procédures mobilisant la décomposition multiplicative ou additive d'un des facteurs, l'associativité et distributivité de la multiplication par rapport à l'addition. Voilà pourquoi, convaincu de la facilité d'additionner par rapport à multiplier mentalement, nous allons utiliser une procédure basée sur la schématisation et le choix d'un facteur auxiliaire de référence tout en facilitant le calcul de produit ; ainsi, le choix de référence doit se faire parmi les multiples de 10. En effet, pour effectuer le calcul de $x.10^n$, il suffit de rajouter n zéros à droite de x.
Notre étude, décrite à la sous-section 4.6.3, s'est rapportée à l'apprentissage du calcul mental, notamment la multiplication mentale de deux facteurs, selon la technique schématique en utilisant des rectangles et des ellipses reliées par des flèches. Ce choix d'apprentissage sur

schéma se justifie par le fait qu'une figure est psychologiquement plus rapidement et durablement perceptible par l'effet visuel qu'une suite des phrases en mots bien agencés. C'est une nouvelle procédure de calcul réfléchi dont les procédures intermédiaires sont représentées à l'aide des schémas et la décomposition du produit initial en plusieurs additions simples. La schématisation peut être une aide méthodologique importante pour aider les élèves à surmonter leurs difficultés de retenir mentalement des procédures intermédiaires (Lowe, 1996). Aussi, l'enseignement-apprentissage de la schématisation de la multiplication mentale, qui exige une verbalisation des procédures, s'avèrera en une contribution à :

– développer la capacité d'expression française ;
– développer la capacité de calculer mentalement ;
– développer la mémoire haptique et la mémoire procédurale ;
– l'amélioration de la qualité d'enseignement de mathématiques ;
– l'initiation non déclarée de l'enseignement-apprentissage de l'algorithmique, donc en informatique.

Ce qui contribuera potentiellement en guise d'exemple en algorithmique de la classe de 2^{nde}. Cette étude de la schématisation de la multiplication mentale a abouti à une publication (Randriantsaralaza et Totohasina, 2018).

Conclusion sur les mesures de qualité

Dans l'analyse statistique, nous avons utilisé deux mesures de qualité : la théorie de la réponse aux items (TRI) et l'ASI-M_{GK}. D'une part, en éducation et en sciences sociales, pour la construction d'une échelle, les méthodes basées sur la théorie de la réponse aux items (TRI) sont fréquemment utilisées par les enseignants et les chercheurs pour informer sur le développement, l'interprétation, évaluer les aptitudes des apprenants et mesurer le trait ou l'attitude d'intérêt, comme la religiosité, la tolérance ou capital social et utilisés pour des évaluations pédagogiques dans un large domaine des contextes à partir des tests aux items, des enquêtes ou des questionnaires. Ces méthodes sont utiles car elles fournissent des informations sur la relation entre les emplacements des étudiants sur une variable latente et la probabilité d'une réponse. Il existe deux types de TRI : TRI paramétrique et TRI non-paramétrique. Les modèles de Mokken (Mokken, 1971) appartiennent à la classe de théorie de la réponse non-paramétrique aux items qui fournit un cadre systématique pour évaluer la qualité de la mesure en termes de propriétés de mesure fondamentale.

D'autre part, dans la recherche en didactique, on peut avoir besoin de connaître s'il y des liens de cause à effet entre les observations. On peut citer, par exemple, l'importance de la découverte des liens entre les erreurs des élèves, entre les connaissances acquises, ou encore, entre les erreurs et les approches pédagogiques utilisées. L'analyse statistique implicative (ASI) nous permet de prouver le rôle décisif joué par certains critères d'analyse et la nécessité de leur présence dans l'évaluation des compétences. La mesure de qualité normalisée $\mathrm{M_{GK}}$ est parmi des plusieurs mesures de qualité utilisées en ASI. Certes, l'analyse d'échelle de Mokken utilise une de composante M_{GK}^{f} de l'indice $\mathrm{M_{GK}}$. Etant donné de la mesure, pour mieux interpréter les résultats, nous avons étudié les erreurs-types de l'indice $\mathrm{M_{GK}}$, en utilisant la méthode delta.

Perspectives

Compte tenu de ce qui précède, et tel que nous l'avons déjà développé dans nos analyses et nos conclusions, le travail de thèse réalisé permet d'envisager de nouvelles perspectives de travaux mentionnées ci-après :

- Élaboration des procédures, adaptées au primaire, de multiplication mentale de deux facteurs A et B selon la technique schématique basée sur une ou deux références utilisant les rectangles et les ellipses reliés par des flèches.
- Élaboration des brochures guides pédagogiques pour vulgariser la technique schématique proposée.
- Construction d'une échelle de mesure en fonction de temps de réponse en utilisant les indices $\mathrm{M_{GK}}$.
- Construction des erreurs-types des nombreuses mesures utilisées en ASI et ceux qui satisfont la propriété de fonction homogène.

Bibliographie

Agresti, A. (2007). *An introduction to categorical data analysis 2^{nd} ed.* Hoboken, New Jersey, NJ : John Wiley et Sons Inc.

Australian Education Council. (1991). *A national statement on mathematics for australian schools*. Carlton : Curriculum Corporation.

Baraquin, N., Baudart, A., Dugué, J., Laffitte, J., Ribes, F. et Wilfert, J. (1995). *Dictionnaire de philosophie*. Paris : Armand Colin.

Barrody, A. J. (1984). Children's difficulties in subtraction : some causes and questions. *Journal for Research in Mathematics Education*, *15*(3), 203–213.

Barrody, A. J. et Standifer, D. J. (1993). Addition and subtraction in the primary grades. Dans R. J. Jensen (dir.), *Research ideas for the classroom : early childhood mathematics* (p. 72–102). New York, NY : Simon et Schuster Macmillan.

Baruk, S. (1992). *Dictionnaire des mathématiques élémentaires*. Paris : Éditions du Seuil.

Behra, T. (2015). Mémoire(s). *Cité des sciences et de l'industrie - Département Education et Formation*.

Behr, M. (1989). Reflections on the conference. Dans J. T. Sowder et B. P. Schappelle (dir.), *Establishing foundations for research on number sense and related topics : report of a conference* (p. 85–88). San Diego : San Diego State University for Research in Mathematics et Science Education.

Beishuizen, M. (1985). Evaluation of the use of structured materials in the teaching of primary mathematics. Dans B. S. Alloway et G. M. Mills (dir.), *New directions in education and training technology* (p. 246–258). London : Kogan Page.

Beishuizen, M. (1993). Mental strategies and materials or models for addition and subtraction up to 100 in dutch second classes. *Journal for Research in Mathematics Education*, *24*(4), 294–323.

Beishuizen, M. et Angileri, J. (1998). Which mental strategies in the early number curriculum ? a comparison of british ideas and dutch views. *British Educational Research Journal*, *24*(5), 519–538.

Bemarisika, P. (2016). *Extraction de règles d'association selon le couple support-M_{GK} : Graphes implicatifs et Applications en didactique des mathématiques* (Thèse de doctorat, Université d'Antsiranana, Madagascar : Mathématiques et Informatique).

Benjamin, A. et Shermer, M. (2006). *Secrets of mental math : the mathemagician's guide to lightning calculation and amazing math tricks*. Random House, Inc., New York, NY : Three Rivers Press.

Bergsma, W. P. (1997). *Marginal models for categorical data*. Tilburg, The Netherlands : Tilburg University Press.

Bergsma, Wicher, P., Croon, A. M. A. et Hagenaars, A. J. (2009). *Marginal models for dependent, clustered, and longitudinal categorical data*. New York, NY : Springer.

Bertrand, R. et Blais, J.-G. (2004). *Modèles de mesure : l'apport de la théorie des réponses aux items*. Le Delta I, 2875, boulevard Laurier, bureau 450 Sainte-Foy Québec : Presses de l'Université du Québec.

Bibeau, R. (1996). École informatisée clés en main. projet franco-québécois de recherche-action. *Revue de l'EPI (Enseignement Public et Informatique)*, *82*, 137–147.

Bibeau, R. (2007). Les technologies de l'information et de la communication peuvent contribuer à améliorer les résultats scolaires des élèves. *Revue de l'EPI (Enseignement Public et Informatique)*, *94*.

Board, M. S. E. et Council, N. R. (1990). *Reshaping school mathematics : a philosophy and framework for curriculum*. Washington : National Academy Press.

Bouvier, A., George, M. et LeLionnais, F. (2001). *Dictionnaire des mathématiques*. Paris : Quadrige/PUF.

Bovier-Lapierre, G. (1887). *Calcul mental. dictionnaire de pédagogie et d'instruction primaire*. Paris : Librairie Hachette et Cie.

Bruner, J. S. et Bonin, Y. (1996). *L'éducation, entrée dans la culture : les problèmes de l'école à la lumière de la psychologie culturelle*. Paris, France : Éditions Retz.

Burns, M. (2007). Mental math. *Instructor*, *116*(6), 51–54.

Butlen, D. (2007). Le calcul mental entre sens et technique. Recherches sur l'enseignement des mathématiques aux élèves en difficulté, du calcul mental à la résolution des problèmes numériques. *Presses universitaires de Franche-Comté*.

Butlen, D. et Charles-Pézard, M. (2003). Une contribution à l'étude des rapports entre habiletés calculatoires et résolution de problèmes numériques à l'école primaire et au début du collège. *Spirale, Revue de Recherches en Education*, *31*, 117–140.

Butlen, D. et Charles-Pézard, M. (2007). Conceptualisation en mathématiques et élevés en difficulté le calcul mental, entre sens et technique. *Grand N*, *79*, 7–32.

Butlen, D. et Pezard, M. (1991). Calcul mental, calcul rapide. *Grand N*, *47*, 35–59.

Butlen, D. et Pezard, M. (2000). Calcul mental et résolution de problèmes numériques au début du collège. *REPERES - IREM*, *41*, 5–24.

Callingham, R. (2005). A whole-school approach to developing mental computation strategies. Dans H. L. Chick et J. L. Vincent (dir.), *Proceedings of the 29th conference of the international group for the psychology of mathematics education* (vol. 2, p. 201–208). Melbourne : PME.

Camos, V. (2004). Compétences exceptionnelles en mathématiques. *Science@direct, Elsevier, Psychologie française*, *49*, 321–336.

Caney, A. (2004). Numbers+magic =answer. students explaining : make the most of mental computation. *Australian Primary Mathematics Classroom*, *9*(3), 10–14.

Carpenter, T. P., Matthews, W., Lindquist, M. M. et Silver, E. A. (1984). Achievement in mathematics : results from the national assessment. *Elementary School Journal*, *84*, 485–495.

Carpenter, T. P. et Moser, J. M. (1983). The acquisition of addition and subtraction concepts. Dans R. Lesh et M. Landau (dir.), *Acquisition of mathematical concepts and processes* (p. 7–44). London : Academic Press.

Carraher, T. N., Carraher, D. W. et Schliemann, A. D. (1985). Mathematics in the streets and in schools. *British Journal of Developmental Psychology*, *3*, 21–29.

Carraher, T. N., Carraher, D. W. et Schliemann, A. D. (1987). Written and oral mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, *18*, 83–97.

Carroll, W. M. (1996). Mental computational skills of students in a reform mathematics curriculum. *Paper presented at the Annual Meeting of the American Educational Research Association, New York, NY*.

Case, R. et Sowder, J. T. (1990). The development of computational estimation : a neo-piagetian analysis. *Cognition and Instruction*, *7*(2), 79–104.

Chalmers, R. P. (2012). Mirt : a multidimensional item response theory package for the R environment. *Journal of Statistical Software*, *48*(6), 1–29. Récupéré de http://www.jstatsoft.org/v48/i06

Champlain, D. D., Mathieu, P., Patenaude, P. et Tessier, H. (1996). *Lexique mathématique, enseignement secondaire* (2ème). Beauport, Québec : Les Éditions du triangles d'Or inc.

Chernyshenko, O. S., Stark, S., Chan, K.-Y., Drasgow, F. et Williams, B. (2001). Fitting item response theory models to two personality inventories : issues and insights. *Multivariate Behavioral Research*, *36*, 523–562.

Chesné, J.-F. (2014). *D'une évaluation à l'autre : des acquis des élèves sur les nombres en sixième à l'élaboration et à l'analyse d'une formation d'enseignants centrée sur le calcul mental* (Thèse de doctorat, Université Paris 7 - Denis DIDEROT).

Cobb, P. et Merkel, G. (1989). Thinking strategies : teaching arithmetic through problem solving. Dans P. R. Trafton et A. P. Shulte (dir.), *New directions for elementary school mathematics* (p. 70–81). Reston : National Council of Teachers of Mathematics.

Cockcroft, W. H. (1982). Mathematics counts : report of the committee of inquiry into the teaching of mathematics in schools. Dans L. Cohen et L. Mannion (dir.), *Research methods in education* (2nd). 1994. London : Croom Helm.

Cooper, T. J., Haralampou, C. et Irons, C. J. (1992). Mental computation : what can children do ? what should teachers do ? Dans C. J. Irons (dir.), *Challenging children to think when they compute* (p. 99–118). Conference papers. Brisbane : The Centre for Mathematics et Science Education.

Cooper, T. J., Heirdsfield, A. M. et Irons, C. J. (1996). Children's mental strategies for addition and subtraction word problems. Dans J. Mulligan et M. Mitchelmore (dir.), *Children's number learning (a research monograph of merga/aamt)* (p. 147–162). Adelaide : The Australian Association of Mathematics Teachers.

Costa, J. D. (2014). *Bpmn 2.0 pour la modélisation et l'implémentation de dispositifs pédagogiques orientés processus* (Thèse de doctorat, University of Geneva).

Côté, R., Gagnon, M., Perreault, N. et Roegiers, X. (2002). *Leximath, lexique mathématique de base* (2ème). Laval, Québec : Beauchemin.

Council, N. R. (1989). *Everybody counts : a report to the nation on the future of mathematics education*. Washington : National Academy Press.

Council, N. R. (2001). *Adding it up : helping children learn mathematics*. Washington, DC : National Academy Press.

Couturier, R. (2008). Statistical implicative analysis, CHIC : Cohesive Hierarchical Implicative Classification. *Studies in Computational Intelligence*, *127*, 41–52.

Crozat, S. (2002). *Éléments pour la conception industrialisée des supports pédagogiques numériques* (Thèse de doctorat, Université de Technologie de Compiègne).

De Champlain, D., Mathieu, P. et Tessier, H. (1999). *Petit lexique mathématique* (Rev. et corr.). Mont-Royal, Québec : Modulo.

De Ketele, J. M. et Gérard, F. M. (2005). La validation des épreuves d'évaluation selon l'approche par les compétences. *Mesure et évaluation en éducation*, *28*(3), 2.

DeMars, C. (2010). *Item response theory. Understanding statistics measurement*. New York 10016 : Oxford University Press, Inc.

De Serres, M. et Groleau, J.-D. (1997). *Mathématiques et langages*. Bibliothèque nationale du Québec : Collège Jean-de-Brébeuf.

Doolittle, P. E. (1999). *Constructivism and online education*. Virginia : Polytechnic Institute et State University.

Dowker, A. (1992). Computational estimation strategies of professional mathematicians. *Journal for Research in Mathematics Education*, *23*(1), 545–558.

Driscoll, M. J. (1981). *Research within reach : elementary school in mathematics*. Reston, Va : National Council of Teachers of Mathematics.

Durkheim, E. (1938). *L'évolution pédagogique en france (cours pour les candidats à l'agrégation dispensé en 1904-1905)*. Paris : P. U. F.

Education, M. et Training. (1997). *Senior I mathematics : A foundation for implementation*. Winnipeg MB : Author.

Ellis, J. L. et Van den Wollenberg, A. L. (1993). Local homogeneity in latent trait models : A characterization of the homogeneous monotone latent trait model. *Psychometrika*, *58*(3), 417–429.

Feno, D. R. (2007). *Mesure de qualité des règles d'association : normalisation et caracterisation des règles d'association des bases* (Thèse de doctorat, Université de La Réunion spécialité : Mathématiques Informatique).

Flournoy, F. (1954). The effectiveness of instruction in mental arithmetic. *Elementary School Journal*, *55*, 148–153.

Flournoy, F. (1957). Developing ability in mental arithmetic. *Arithmetic Teacher*, *4*, 147–150.

French, D. (1987). Mental methods in mathematics. *Mathematics in School*, *16*(2), 39–41.

Fuson, K. C., Wearne, D., Hiebert, J. C., Murray, H. G., Human, P. G., Olivier, A. I., ... Fennema, E. (1997). Children's conceptual structures for multidigit numbers and methods of multidigit addition and subtraction. *Journal for Research in Mathematics Education*, *28*(2), 130–162.

Ginsburg, H. P., Posner, J. K. et Russell, R. L. (1981). The development of mental addition as a function of schooling and culture. *Journal of Cross-Cultural Psychology*, *12*(2), 163–178.

Glas, C. A. (2008). Item response theory in educational assessment and evaluation. Dans *Mesure et évaluation en éducation* (vol. 31, *2*, p. 19–34). Érudit.

Good, T. et Brophy, J. (1995). *Educational psychology : a realistic approach* (4ème). New York, NY : Longman.

Gouvernment, A. (2015). La numératie. Récupéré de https://education.alberta.ca/litteratie-et-numeratie/numeratie

Gras, R. (1992). L'analyse des données : une méthodologie de traitement de questions de didactique. Recherches en didactique des mathématiques. *La Pensée Sauvage*, *12*(1), 59–72.

Gras, R., Almouloud, S. A., Bailleul, M., Lahrer, A., Polo, M., Ratsimba-Rajohn, H. et Totohasina, A. (1996). L'implication statistique : Nouvelle méthode exploratoire de données. *La Pensée Sauvage*.

Grayson, D. A. (1988). Two-group classification in latent trait theory : scores with monotone likelihood ratio. *Psychometrika*, *53*(3), 383–392.

Greeno, J. G. (1991). Number sense as situated knowing in a conceptual domain. *Journal for Research in Mathematics Education*, *22*(3), 170–218.

Guttman, L. (1944). A basis for scaling qualitative data. *American Sociological Review*, *9*, 39–150.

Guttman, L. (1950). The basis for scalogram analysis. Dans S. A. Stouffer, L. Guttman, E. A. Suchman, P. F. L. and S A Star et J. A. Clausen (dir.), *Measurement and prediction* (vol. IVth edition, p. 60–90). The American Soldier. New York, NY : Wiley.

Hall, J. V. (1947). Solving verbal arithmetic problems without pencil and paper. *The Elementary School Journal*, *12*, 212–217.

Hall, J. V. (1954). Mental arithmetic : misunderstood terms and meanings. *The Elementary School Journal*, *54*, 349–353.

Hamann, M. S. et Ashcraft, M. H. (1985). Simple and complex mental addition across development. *Journal of Experimental Child Psychology*, *40*, 49–72.

Hambleton, R. K., H.Swaminathan et Rogers, D. J. (1991). *Fundamentals of item response theory*. Newbury Park. California 91320 : SAGE Publications.

Harries, T. et Spooner, M. (2000). *Mental mathematics for the numeracy hour*. London : David Fulton Publishers.

Hartnett, J. (2007). Categorization of mental computation strategies to support teaching and to encourage classroom dialogue. Dans J. Watson et K. Beswick (dir.), *Proceedings 30th annual conference of the mathematics education research group of australasia - mathematics : essential research, essential practice* (p. 345–352). Hobart, Tasmania.

Hazekamp, D. W. (1986). Components of mental multiplying. Dans H. L. Schoen et M. J. Zweng (dir.), *Estimation and mental computation* (p. 116–126). Reston : National Council of Teachers of Mathematics.

Heirdsfield, A. (1996). *Mental computation, computational estimation, and number fact knowledge for addition and subtraction in year four children* (Thèse de Master, Queensland University of Technology, Brisbane).

Heirdsfield, A. et Cooper, T. (2004). Inaccurate mental addition and subtraction : causes and compensation. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, *26*(3), 43–65.

Heirdsfield, A. et Lamb, J. (2005). Mental computation : the benefits of informed teacher instruction. Dans P. Clarkson, A. Downtown, D. Gronn, M. Horne, A. McDonough, R. Pierce et A. Roche (dir.), *Proceedings merga 28 - 2005 building connections : theory, research and practice* (vol. 2, p. 419–426). Melbourne.

Hemker, B. T., Sijtsma, K. et Molenaar, I. W. (1995). Selection of unidimensional scales from a multidimensional item bank in the polytomous Mokken IRT model. *Applied Psychological Measurement*, *19(4)*, 337–352.

Hemker, B. T., Sijtsma, K., Molenaar, I. W. et Junker, B. W. (1997). Stochastic ordering using the latent trait and the sum score in polytomous IRT models. *Psychometrika*, *62*, 331–347.

Hiebert, J. (1989). Reflections after the conference on number sense. Dans J. T. Sowder et B. P. Schappelle (dir.), *Establishing foundations for research on number sense and related topics : report of a conference* (p. 82–84). San Diego : San Diego State University for Research in Mathematics et Science Education.

Hitch, G. J. (1977). Mental arithmetic : short-term storage and information processing in a cognitive skill. Dans A. M. Lesgold, J. W. Pellegrino, S. Fokkema et R. Glaser (dir.), *Cognitive psychology and instruction* (p. 331–338). New York, NY : Plenum Press.

Hitch, G. J. (1978). The role of short-term memory in mental arithmetic. *Cognitive Psychology*, *10*, 302–323.

Holland, P. W. et Rosenbaum, P. R. (1986). Conditional association and unidimensionality in monotone latent variable models. *The Annals of Statistics*, *14*, 1523–1543.

Hope, J. (1990). *Chartering the course. a guide for revising the mathematics program in the province of saskatchewan*. Faculty of Education, University of Regina : Regina, SK : Saskatchewan lnstructional Development et Research Unit.

Hope, J. A. (1985). Unravelling the mysteries of expert mental calculation. *Educational Studies in Mathematics*, *16*(4), 355–374.

Hope, J. A. (1986). Mental calculation : anachronism or basic skill ? Dans H. L. Schoen et M. J. Zweng (dir.), *Estimation and mental computation* (p. 45–54). Reston : National Council of Teachers of Mathematics.

Hope, J. A. (1987). A case study of a highly skilled mental calculator. *Journal for Research in Mathematics Education*, *18*(5), 331–342.

Hope, J. A. (1989). Promoting number sense in school. *Arithmetic Teacher*, *36*(6), 12–16.

Hope, J. A. et Sherrill, J. M. (1987). Characteristics of unskilled and skilled mental calculators. *Journal for Research in Mathematics Education*, *18*(2), 98–111.

Hope, J., Reys, R. E. et Reys, B. J. (1988). *Mental math in junior high*. Palo Alto, CA : Dale Seymour Publications.

Howden, H. (1989). Teaching number sense. *Arithmetic Teacher*, *36*(6), 6–11.

Howson, G. et Wilson, B. (1986). *School mathematics in the 1990s*. Cambridge : Cambridge University Press.

Hughes, M. (1986). *Children and number : difficulties in learning mathematics*. Oxford : Blackwell Publishers Limited.

Hunter, I. M. L. (1977). Mental calculation : two additional comments. Dans P. N. Johnson-Laird et P. C. Watson (dir.), *Thinking : readings in cognitive science* (p. 35–42). Cambridge : Cambridge University Press.

Hunter, I. M. L. (1978). The role of memory in expert mental calculation. Dans M. M. Gruneberg, P. E. Morris et R. N. Sykes (dir.), *Practical aspects of memory* (p. 339–345). London : Academic Press.

Irvine, R. et Walker, K. (1996). *Smarl arithmetic grades 4-6 : a thinking approach to computation*. Mountain View, CA : Creative Publications.

Jacobi, D. (1993). Les terminologies et leur devenir dans les textes de vulgarisation scientifique. *Didaskalia*, *1*, 69–83.

Josephina, S. (1960). Mental arithmetic in today's classroom. *Arithmetic Teacher*, *7*, 199–200, 207.

Junker, B. W. et Sijtsma, K. (2000). Latent and manifest monotonicity in item response models. *Applied Psychological Measurement*, *24*, 65–81.

Kritzer, H. M. (1977). Analyzing measures of association derived from contingency tables. *Sociological Methods and Research*, *5*, 35–50.

Krutetski, V. A. (2004). The psychology of mathematical abilities in school children. *Science@direct, Elsevier, Psychologie français*, *49*, 321–336.

Kuijpers, R. E., Van der Ark, L. A. et Croon, M. A. (2013). Standard errors and confidence intervals for scalability coefficients in mokken scale analysis using marginal models. *Sociological Methodology*, *43*(1), 42–69.

Laborde, C. et Vergnaud, G. (1994). L'apprentissage et l'enseignement des mathématiques. Dans *Apprentissages et didactiques, « où en est-on ? former, organiser pour enseigner »* (p. 63–93). Hachette Éducation.

Lalande, A. (1960). *Vocabulaire technique et critique de la philosophie* (8ème). Paris : Presse universitaires de France.

Lave, J. (1985). Introduction : situationally specific practice. *Anthropology and Education Quarterly*, *16*(3), 171–176.

Le, D.-T. (2013). *Applying item response theory modeling in educational research* (Thèse de doctorat, Iowa State University).

Lewkowicz, M. L. (2003). The use of intrigue to enhance mathematical thinking and motivation in beginning algebra. *Mathematics Teacher*, *96*(2), 92–95.

Lingani, O. (2015). *Transferts d'apprentissage et domaines de connaissances dans les écoles bilingues dioula-français au burkina faso : les mathématiques au primaire* (Thèse de doctorat, Université Paris Ouest Nanterre la Défense).

Literacy et Project, N. D. A. (1991). *Managing mathematics : assessing for planning, learning and teaching*. Brisbane : Department of Education.

Loevinger, J. (1948). The technic of homogeneous tests compared with some aspects of scale analysis and factor analysis. *Psychological Bulletin*, *45*, 507–529.

Lowe, R. (1996). Les nouvelles technologies - voie royale pour améliorer l'apprentissage des sciences par l'image ? Dans *Images et activités scientifiques* (p. 173–194). INRP, 29, rue d'Ulm, 75230 Paris Cedex 05 : ASTER N° 22.

Lucangeli, D., Tressoldi, P., Bendotti, M., Bonanomi, M. et Siegel, L. (2003). Effective strategies for mental and written arithmetic calculation from the third to the fifth grade. *Educational Psychology*, *23*(5), 507–520.

Macintyre, T. et Forrester, R. (2003). Strategies for mental calculation. Dans J. Williams (dir.), *Proceedings of the british society for research into learning mathematics* (vol. 23, *2*, p. 49–54).

Maclellan, E. (2001). Mental calculation : its place in the development of numeracy. *Westminster Studies in Education*, *24*(2), 145–154.

Maier, E. (1980). Folk mathematics. *Mathematics Teaching*, *93*, 21–23.

Mansour, A. (2013, janvier). Calcul mental à l'école élémentaire : observations pédagogiques. Récupéré de http://www.radisma.info/document.php?id=1323

Markovits, Z. (1989). Reactions to the number sense conference. Dans J. T. Sowder et B. P. Schappelle (dir.), *Establishing foundations for research on number sense and related topics : report of a conference* (p. 78–81). San Diego : San Diego State University for Research in Mathematics et Science Education.

Markovits, Z. et J. Sowder, J. (1994). Developing number sense : an intervention study in grade 7. *Journal for Research in Mathematics Education*, *25*(1), 4–29.

McIntosh, A. (1988). Mental arithmetic. Dans C. Lovitt et D. M. Clarke (dir.), *The mathematics curriculum and teaching program activity book* (vol. 1, p. 239–297). Canberra : Curriculum Development Centre.

McIntosh, A. (1990a). Analyzing and classifying children's mental arithmetic strategies. *Paper presented at the thirteenth annual Conference of Mathematics Education Research Group of Australasia, Hobart, Tasmania*.

McIntosh, A. (1990b). Becoming numerate : developing number sense. Dans S. Willis (dir.), *Being numerate : what counts ?* (p. 24–42). Melbourne : Australian Council for Educational Research.

McIntosh, A. (1991). Less and more competent primary school mental calculators. *Paper presented at the fourteenth Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia, Perth, Western Australia*.

McIntosh, A. (1998). Teaching mental algorithms constructively : the teaching and learning of algorithms in school mathematics. Dans L. Morrow et M. Kenny (dir.), *The teaching and learning of algorithms in school mathematics : 1998 yearbook* (p. 44–48). Reston, VA : National Council of Teachers of Mathematics.

McIntosh, A. (2004). Mental computation of school-aged students : assessment, performance levels and common errors. Récupéré de http://www.mai.liu.se/SMDF/madif5/papers/McIntosh.pdf

McIntosh, A., Nohda, N., Reys, B. et Reys, R. (1995). Mental computation performance in australia, japan and the united states. *Educational Studies in Mathematics*, *29*, 237–258.

Meijer, R. R. et Baneke, J. (2004). Analyzing psychopathology items : a case for nonparametric item response theory modeling. *Psychological Methods*, *9*, 354–368.

Meijer, R. R., Sijtsma, K. et Smid, N. G. (1990). Theoretical and empirical comparison of the Mokken and the Rasch approach to IRT. *Applied Psychological Measurement*, *14*, 283–298.

Meijer, R. R., Tendeiro, J. N. et Wanders, R. B. K. (2015). The use of nonparametric item response theory to explore data quality. Dans S. P. Reise et D. A. Revick (dir.), *Handbook of item response theory modeling : applications to typical performance assessment* (p. 85–110). New York, NY : Routledge.

Menon, R. (2003). Using number relationships for estimation and mental computation. *Mathematics Teaching in the Middle School*, *8*(9), 476–479.

Ministère de l'éducation nationale française et de l'Enseignement supérieur (dir.). (2015). Évaluation des acquis : principes, méthodologie,résultats, Les presses de l'imprimerie Ovation 4, rue du Docteur Leray - 95880 Enghien-les-Bains, *N° 86-87*. Récupéré de www.education.gouv.fr

Mokken, R. J. (1971). *A theory and procedure of scale analysis, with applications in political research*. New York, NY : Walter de Gruyter-Mouton.

Mokken, R. J. (1997). Nonparametric models for dichotomous responses, chapter 20. Dans W. J. Van der Linden et R. K. Hambleton (dir.), *Handbook of modern item response theory* (p. 351–368). New York, NY : Springer Verlag.

Molenaar, I. W. (1991). A weighted Loevinger H-coefficient extending Mokken scaling to multicategory items. *Kwantitatieve Methoden*, *12(37)*, 97–117.

Molenaar, I. W. (1997). Nonparametric models for polytomous responses. Dans W. J. Van der Linden et R. K. Hambleton (dir.), *Handbook of modern item response theory* (p. 369–380). New York, NY : Springer Verlag.

Molenaar, I. W., Sijtsma, K. et Boer, P. (2000). MSP5 for Windows : a program for Mokken scale analysis for polytomous items - version 5.0. iec proGAMMA. *Groningen, The Netherlands*.

Morgan, G. R. (1999). *An analysis of the nature and function of mental computation in primary mathematics curricula* (Thèse de doctorat, Queensland University of Technology, Brisbane).

Murray, H. et Olivier, A. (1989). A model of understanding two-digit numeration and computation. Dans G. Vergnaud, J. Rogalski et M. Artique (dir.), *Proceedings of the thirteenth* *annual conference of the international group for the psychology of mathematics education* (vol. 3, p. 3–10). Paris, France.

Murtaugh, M. (1985). The practice of arithmetic by american grocery shoppers. *Anthropology and Education Quarterly*, *16*(3), 186–192.

National Council of Teachers of Mathematics. (1989). *Curriculum and evaluation standards for school mathematics*. Reston : The Council.

National Council of Teachers of Mathematics. (1991). *Professional standards for teaching mathematics*. Reston : The Council.

Nelson, N. Z. (1967). *The effect of the teaching of estimation on arithmetic achievement in the fourth and sixth grades* (Thèse de doctorat, University of Pittsburgh).

Noyau, C. (2004). Appropriation de la langue et construction des connaissances dans l'école de base en pays francophone : du diagnostic aux actions. Dans AUF : Penser la francophonie (dir.), *Concepts, actions et outils linguistiques* (vol. Actes des Premières Journées scientifiques communes des réseaux de chercheurs concernant la langue, p. 473–486). Paris : Eds des Archives Contemporaines / AUF.

Nunes, T. et Bryant, P. (1996). *Children doing mathematics*. Oxford : Blackwell Publishers Limited.

Payne, J. N. (1990). New directions in mathematics education. Dans J. N. Payne (dir.), *Mathematics for the young child* (p. 1–15). Reston : National Council of Teachers of Mathematics.

Perrin-Glorian, M.-J. (1994). Contraintes de fonctionnement des enseignants au collège : ce que nous apprend l'étude de « classes faibles ». *Petit x, 35,* 5–40.

Perrin, L. (2009). *Le rôle des connaissances sémantiques dans la mémorisation de l'ordre en mémoire à court terme* (Thèse de doctorat, Université de Poitiers).

Petitto, A. L. et Ginsburg, H. P. (1982). Mental arithmetic in Africa and America : strategies, principles, and explanations. *International Journal of Psychology*, *17,* 81–102.

Piaget, J. (1975). *L'équilibration des structures cognitives*. Paris : PUF.

Plunkett, S. (1979). Decomposition and all that rot. *Mathematics in School*, *8*(3), 2–5.

Pòlya, G. (1973). *How to solve it : a new aspect of mathematical method*. Stanford University : Princeton University Press, New Jersey.

Poulter, J. G. et Haylock, D. W. (1988). Teaching computational estimation. *Mathematics in School*, *17*(2), 27–29.

Ramsay, J. O. (1991). Kernel smoothing approaches to nonparametric item characteristic curve estimation. *Psychometrika*, *56*(4), 611–630.

Randriantsaralaza, S. R. et Totohasina, A. (2018). Learning and teaching of mental computation : using a schematization of mental multiplication and analysis of learners' productions using IRM. *International Journal of Innovative Science and Research Technology*, *3*(10), 382–391.

Rathmell, E. et Trafton, P. R. (1990). Whole number computation. Dans J. N. Payne (dir.), *Mathematics for the young child* (p. 153–172). Reston : National Council of Teachers of Mathematics.

Reckase, M. D. (2009). *Multidimensional item response theory*. New York, NY : Springer-Verlag.

Reise, S. P. et Waller, N. G. (2009). Item response theory and clinical measurement. *Annual Review of Clinical Psychology*, *5*, 27–48.

Resnick, L. B. (1983). A developmental theory of number understanding. Dans H. P. Ginsburg (dir.), *The development of mathematical thinking* (p. 109–151). New York, NY : Academic Press.

Resnick, L. B. (1989a). Defining, assessing, and teaching number sense. Dans J. T. Sowder et B. P. Schappelle (dir.), *Establishing foundations for research on number sense and related topics : report of a conference* (p. 35–39). San Diego : San Diego Sate University for Research in Mathematics et Science Education.

Resnick, L. B. (1989b). Introduction. Dans L. B. Resnick (dir.), *Knowing, learning, and instruction : essays in honor of robert glaser* (p. 1–16). Hillsdale : Lawrence Erlbaum.

Resnick, L. B. et Omanson, S. F. (1987). Learning to understand arithmetic. Dans R. Glaser (dir.), *Advances in instructional psychology* (vol. 3, p. 41–95). Hillsdale, NJ : Lawrence Erlbaum.

Reys, B. J. (1985). Mental computation. *Arithmetic Teacher*, *32*(6), 43–46.

Reys, B. J. (1986a). Estimation and mental computation : it's « about » time. *Arithmetic Teacher*, *34*(1), 22–23.

Reys, B. J. (1986b). Identification and characterization of mental computation algorithms used by seventh and eighth grade students on visually and orally presented mental computation exercises. (doctoral dissertation, university of Missouri, 1985). *Dissertation Abstracts International*, *46*(11), 3279–A.

Reys, B. J. (1989). Conference on number sense : reflections. Dans J. T. Sowder et B. J. Schappelle (dir.), *Establishing foundations for research on number sense and related topics : re-*

port of a conference (p. 70–73). San Diego : San Diego State University for Research in Mathematics et Science Education.

Reys, B. J. et Barger, R. S. (1994). Mental computation : issues from a united states perspective. Dans R. E. Reys et N. Nohda (dir.), *Computational alternatives for the twenty-first century : cross-cultural perspectives from japan and the united states* (p. 31–47). Reston : National Council of Teachers of Mathematics.

Reys, B. J., Reys, R. E. et Hope, J. A. (1993). Mental computation : a snapshot of second, fifth and seventh grade student performance. *School Science and Mathematics*, *93*(6), 306–315.

Reys, R. E. (1984). Mental computation and estimation : past, present and future. *The Elementary School Journal*, *84*(5), 547–557.

Reys, R. E. (1985). Testing mental-computation skills. *Arithmetic Teacher*, *33*(3), 14–16.

Reys, R. E. (1992). Mental computation : some ideas for teachers and directions for teaching. Dans C. J. Irons (dir.), *Challenging children to think when they compute : conference papers* (p. 63–72). Brisbane : The Centre for Mathematics et Science Education.

Reys, R. E., Bestgen, B. J., Rebolt, F. et Wyatt, J. W. (1982). Process used by good computational estimators. *Journal for Research in Mathematics Education*, *13*(3), 183–201.

Reys, R. E., Reys, B. J., Nohda, N. et Emori, H. (1995). Mental computation performance and strategy use of japanese students in grades 2, 4, 6, and 8. *Journal for Research in Mathematics Education*, *26*(4), 304–326.

Reys, R. E., Reys, B. J., Nohda, N., Ishida, J., Yoshikawa, S. et Shimizu, K. (1991). Computational estimation performance and strategies used by fifth and eighth-grade japanese students. *Journal for Research in Mathematics Education*, *22*(1), 39–58.

Rocher, T. (2015a). Mesure des compétence ; méthodes psychométriques utilisées dans le cadre des évaluations des élèves. Dans Ministère de l'éducation nationale française et de l'Enseignement supérieur (dir.), *Éducation et formation* : vol. 86-87. *Évaluation des acquis : principes, méthodologie,résultats* (p. 37–60). Les presses de l'imprimerie Ovation 4, rue du Docteur Leray - 95880 Enghien-les-Bains. Récupéré de www.education.gouv.fr

Rocher, T. (2015b). Quelles méthodes pour l'évaluation standardisée des compétences des élèves ? Dans Bureau de l'évaluation des élèves, DEPP1 et Ministère de l'Education nationale (dir.), *Statistique et société* (vol. 3, *2*, p. 59–66). Société Française de Statistique.

Rosnick, P. et Clement, J. (1980). Learning without understanding : the effect of tutoring strategies on algebra misconceptions. *Journal of Mathematical Behavior*, *3*(1), 3–27.

Ross, S. H. (1989). Parts, wholes, and place value. *Arithmetic Teacher*, *36*(6), 47–51.

Rubenstein, R. N. (1985). Computational estimation and related mathematical skills. *Journal for Research in Mathematics Education*, *16*(2), 106–119.

Rubenstein, R. N. (2001). Mental mathematics beyond the middle school : Why ? What ? How ? *Mathematics Teacher*, *94*(6), 442–446.

Sauble, I. (1955). Development of ability to estimate and to compute mentally. *Arithmetic Teacher*, *2*, 33–39.

Scheiblechner, H. (2007). A unified nonparametric IRT model for d-dimensional psychological test data (d-ISOP). *Psychometrika*, *72*, 43–67.

Sijtsma, K. et Meijer, R. R. (2007). Nonparametric item response theory and special topics. Dans C. R. Rao et S. Sinharay (dir.), *Handbook of statistics : psychometrics* (vol. 26, p. 719–747). Amsterdam, The Netherlands : Elsevier.

Sijtsma, K. et Molenaar, I. W. (2002). *Introduction to nonparametric item response theory*. London : Sage Publications.

Silver, E. A. (1987). Foundations of cognitive theory and research for mathematics problem-solving instruction. Dans A. H. Schoenfeld (dir.), *Cognitive science and mathematics education* (p. 33–60). Hillsdale, NJ : Lawrence Erlbaum.

Sowder, J. T. (1989). Research into practice : developing understanding of computational estimation. *Arithmetic Teacher*, *36*(3), 25–27.

Sowder, J. T. (1992). Making sense of number in school mathematics. Dans G. Leinhardt, R. Putnam et R. Hattrup (dir.), *Analysis of arithmetic for mathematics* (p. 1–51). Hillsdale, NJ : Lawrence Erlbaum.

Sowder, J. T. et Wheeler, M. M. (1989). The development of concepts and strategies used in computational estimation. *Journal for Research in Mathematics Education*, *20*(2), 130–146.

Sowder, J. (2007). Estimation and number sense. Dans J. Frank K. Lester (dir.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning a project of the national council of teachers of mathematics* (p. 371–382). San Diego State University : Information Age Publishing.

Stout, W. F. (1990). A new item response modelling approach with applications to unidimensionality assessment and ability estimation. *Psychometrika*, *55*, 293–325.

Suggate, J. (1995). How do they do it : children's informal methods of addition and subtraction. *Mathematics in School*, *24*(1), 43–45.

Tannery, J. (1940). Sur l'enseignement de l'arithmétique à l'école primaire. Dans C. Savard (dir.), *Pages choisies de pédagogie contemporaine* (p. 381–385). Delagrave. Récupéré de www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/history/Mathematicians/Tannery_Jules.html

Thompson, I. (1994). Young children's idiosyncratic written algorithms for addition. *Educational Studies in Mathematics*, *26*, 323–345.

Thompson, I. (1999). Mental calculation strategies for addition and subtraction : part 1. *Mathematics in School*, *28*(5), 23–27.

Thompson, I. (2010a). Getting your head around mental calculation. Dans I. Thompson (dir.), *Issues in teaching numeracy in primary schools, second edition* (p. 161–173). Berkshire, England : The Open University Press.

Thompson, I. (2010b). Written calculation : addition and subtraction. Dans I. Thompson (dir.), *Issues in teaching numeracy in primary schools, second edition* (p. 188–198). Berkshire, England : The Open University Press.

Thornton, C. (1985). Mental. *Rhombus*, *19*(4), 9–12.

Thornton, C. A., Jones, G. A. et Neal, J. L. (1995). The 100s chart : a stepping stone to mental mathematics. *Teaching Children Mathematics*, *1*(8), 480–483.

Threadgill-Sowder, J. (1988). Mental computation and number comparison : their roles in the development of number sense and computational estimation. Dans J. Hiebert et M. Behr (dir.), *Number concepts and operations in the middle grades* (p. 182–197). Hillsdale, NJ : Lawrence Erlbaum et National Council of Teachers of Mathematics.

Threlfall, J. (2000). Mental calculation strategies. Dans T. Rowland et C. Morgan (dir.), *Research in mathematics education* (vol. 2, p. 77–90). Papers of the British Society for Research into Learning Mathematics. London : British Society for Research into Learning Mathematics.

Threlfall, J. (2002). Flexible mental calculation. *Educational Studies in Mathematics*, *50*, 29–47.

Totohasina, A. (2008). *Contribution à l'étude des mesures de qualité des règles d'associations : normalisation sous cinq contraintes et cas de M_{GK} : propriétés, bases composites des règles et extension en vue d'applications en statistique et en sciences physiques* (HDR, Université d'Antsiranana, Madagascar : Mathématiques et Informatique).

Trafton, P. R. (1978). Estimation and mental arithmetic : important components of computation. Dans M. Suydam et R. E. Reys (dir.), *Developing computational skills* (p. 196–213). Reston : National Council of Teachers of Mathematics.

Trafton, P. R. (1986). Teaching computational estimation : establishing an estimation mindset. Dans H. L. Schoen (dir.), *Estimation and mental computation* (p. 16–30). Reston : National Council of Teachers of Mathematics.

Trafton, P. R. (1989). Reflections on the number sense conference. Dans J. T. Sowder et B. P. Schappelee (dir.), *Establishing foundations for research on number sense and related topics : report of a conference* (p. 74–77). San Diego : San Diego State University for Research in Mathematics et Science Education.

Tsao, Y. (2004). Exploring the connections among number sense, mental computation performance, and the written computation performance of elementary preservice school teachers. *Journal of College Teaching and Learning*, *1*(12), 71–90.

Une équipe d'auteurs malgache. (2002a). *Calcul 7*[e]. Madagascar : MINESEB.

Une équipe d'auteurs malgache. (2002b). *Calcul 8*[e]. Madagascar : MINESEB.

Une équipe d'auteurs malgache. (2002c). *Calcul 9*[e]. Madagascar : MINESEB.

Vakali, M. (1985). Children's thinking in arithmetic word problem solving. *Journal of Experimental Education*, *53*(2), 106–113.

Van der Ark, L. A. (2007). Mokken scale analysis in R. *Journal of Statistical Software*, *20*(11), 1–19.

Van der Ark, L. A. (2012). New developments in Mokken scale analysis in R. *Journal of Statistical Software*, *48*(5), 1–27.

Van der Ark, L. A., Croon, A. M. et Sijtsma, K. (2008). Mokken scale analysis for dichotomous items using marginal models. *Psychometrika*, *73*, 183–208.

Van der Linden, W. et Hambleton, R. (1997). *Handbook of modem item response theory*. New York, NY : Springer-Verlag.

Van de Walle, J. A. et Folk, S. (2008). *Elementary and middle school mathematics : teaching developmentally (2*[nd] *canadian ed.)* Toronto, ON : Pearson Canada.

Van Schuur, W. H. (2003). Mokken scale analysis : between the Guttman scale and Parametric Item Response Theory. *Political Analysis*, *11*(2), 139–163.

Van Schuur, W. H. (2011). *Ordinal item response theory : Mokken scale analysis*. Los Angeles, CA : Sage.

Varol, F. et Farran, D. (2007). Elementary school students' mental computation proficiencies. *Early Childhood Education Journal*, *35*(1), 89–94.

Vincent, J.-F. (1994). *Lexique mathématique. à l'usage des étudiants*. Montréal : Guérin.

Vrignaud, P. (2002). Psychométrie et validation de la mesure. Dans A. Vallet, G. Bonnet, J. Emin, J. Levasseur, T. Rocher, A. Blum, ... F. Murat (dir.), *Enquète méthodologique « information et vie quotidienne »* (p. 35–49). Collection Méthodologie Statistique de l'INSEE, 0202. Paris, Institut National de la Statistique et des Etudes Economiques.

Vrignaud, P. (2008). La mesure de la littératie dans pisa : la méthodologie est la réponse, mais quelle était la question ? Dans Ministère de l'éducation nationale,de l'Enseignement supérieur et de la Recherche, République Française (dir.), *Comparaisons internationales* (vol. 78, p. 69–81). Éducation et Formation.

Vygotsky, L. S. (1980). Mind in society : the development of higher psychological processes. *Harvard university press*.

Watson, J. (1972). *Le béhaviorisme*. Paris : Editions Cepi.

Willis, S. (1990). Numeracy and society : the shifting ground. Dans S. Willis (dir.), *Being numerate : what counts ?* (p. 1–23). Melbourne : Australian Council for Educational Research.

Wind, S. A. (2017). An instructional module on Mokken scale analysis. *Educational Measurement : Issues and Practice xxxx*, *00*, 1–17.

Wollman, W. (1983). Determining the sources of error in a translation from sentence to equation. *Journal for Research in Mathematics Education*, *14*(3), 169–181.

Yackel, E., Cobb, P., Wood, T., Wheatley, G. et Merkel, G. (1990). The importance of social interaction in children's construction of mathematical knowledge. Dans T. J. Cooney (dir.), *Teaching mathematics in the 1990s* (p. 12–21). Reston : National Council of Teachers of Mathematics.

Yackel, E., Underwood, D. et Elias, N. (2007). Mathematical tasks designed to foster a reconceptualized view of early arithmetic. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *10*(4-6), 351–367.

Zepp, R. (1976). Algorithms and mental computation. Dans M. Suydam et A. R. Osborne (dir.), *Algorithmic learning* (p. 97–104). Educational Resources Information Centre Document, Microfiche Edition.

Annexes

ANNEXE A

Questionnaires

Test sur les multiplications mentales à référence

TEST(Tableau A.1)
Effectuer mentalement les multiplications de deux facteurs entiers selon la technique schématique basée sur une référence judicieusement choisie.

TABLEAU A.1 – 10 items de multiplications mentales

*Item*_13×17	:	13×17
*Item*_19×17	:	19×17
Item _23×29	:	23×29
Item _97×127	:	97×127
*Item*_47×53	:	47×53
Item _97×98	:	97×98
Item _97×107	:	97×107
Item _13×79	:	13×79
*Item*_989×997	:	989×997
*Item*_103×797	:	103×797

ANNEXE B

Extrait de la Loi n° 2008-011

LOI n° 2008-011

modifiant certaines dispositions de la Loi n°2004-004 du 26 juillet 2004

portant orientation générale du Système d'Education,

d'Enseignement et de Formation à Madagascar

(...)

TITRE V

DE L'EVALUATION, DES RECHERCHES

ET DU CONTROLE

Art. 66 : Dans le cadre du développement rapide et durable de l'éducation et de la formation et, dans l'unique souci de l'intérêt général, les instances d'évaluation et de contrôle, de conseil et de planification sont au regard de la Nation, parmi les garantes de l'efficacité et de la rentabilité du système d'éducation et de formation, ainsi que de sa fidélité aux principes fondamentaux définis par la présente loi. Toutes les composantes du système éducatif font l'objet d'une évaluation périodique et régulière. Les différentes évaluations ont pour but de mesurer objectivement le rendement du système scolaire, celui des établissements qui en relèvent et des personnels qui y exercent, ainsi que les acquis des élèves, de manière à pouvoir introduire les correctifs et les aménagements nécessaires pour la réalisation des objectifs fixés.

Art. 67 : La recherche pédagogique constitue un puissant facteur d'amélioration de la qualité de l'apprentissage, du rendement de l'école et de sa mise à niveau en vue de répondre aux normes internationales dans le domaine de l'éducation.

Art. 68 : La recherche en éducation couvre le domaine de la pédagogie, les méthodes d'enseignement, les programmes, les moyens didactiques, les pratiques des enseignants, la vie scolaire, l'évaluation, ainsi que les études comparées dans l'éducation et l'enseignement.

Art. 69 : La recherche en éducation est organisée au sein d'institutions spécialisées et en collaboration avec les centres de recherche et les institutions universitaires.

Art. 70 : Dans le cadre de la politique nationale de lutte contre la corruption et eu égard aux principes de la bonne gouvernance, de la justice et de la transparence exigées pour le développement rapide et durable, il s'avère indispensable que la fonction de contrôle ait une place primordiale dans la gestion des affaires de l'Etat. Le Ministère chargé de l'Education et de la Formation ne déroge pas à ces principes. Il veille scrupuleusement à la gestion stricte de son personnel, des fonds qui lui sont alloués, des matériels mis à sa disposition et, de l'efficacité de l'éducation et de la formation des apprenants.

Art. 71 : Les contrôles hiérarchiques sont réalisés au niveau des différents organes du Ministère chargé de l'éducation et de la formation. Ils sont assurés par toutes les autorités responsables d'unités éducatives ou formatives, et par leurs supérieurs hiérarchiques. Les contrôles hiérarchiques doivent se faire aussi au sein des services centraux et déconcentrés.

Art. 72 : Les contrôles-inspections comme les contrôles hiérarchiques, sont internes, sauf s'ils sont ordonnés directement par le Ministre responsable.

Art. 73 : L'organe d'inspection est inscrit dans l'organigramme du Ministère chargé de l'Education et de la Formation. Il est représenté jusqu'au niveau déconcentré.
Sa mission consiste à veiller à la bonne exécution de la politique nationale déducation et de formation en matière de contrôle de lexcellence du travail du personnel de ce secteur et des organes rattachés ou sous tutelle, indépendamment des audits externes.

Art. 74 : Les performances de chaque agent sont évaluées au regard des référentiels professionnels qui le concernent dune part et, comparativement aux indicateurs de qualité, defficacité et de résultats du travail de lunité où il exerce, dautre part.
Les référentiels et les indicateurs sont portés à la connaissance de tous par voie réglementaire. Ils sont vérifiés lors des contrôles et des inspections. A part les contrôles hiérarchiques, les contrôles - inspections sont assurés par les spécialistes en la matière.

Art. 75 : La mise en oeuvre des actions contrôles - inspections définies par la présente loi dorientation exige la présence des moyens humains, financiers et matériels adéquats.
(...)

ANNEXE C

Des fiches de calcul mental

Fiche de calcul mental N° 1 (Classe de 2$^{\text{nde}}$)

Consigne : Sans calculatrice, et en essayant de ne pas utiliser de brouillon, répondre aux questions posées, sans dépasser un temps de 10 ou 15 minutes par série, avec réponses sans rature.

Série n° 1

1. Simplifier l'expression $A = \dfrac{-9-\sqrt{45}}{-3}$
2. Déterminer le coefficient directeur de la droite passant par $A(2;7)$ et $B(4;-3)$.
3. Developper $B = (2x-3)^2$.
4. Dresser le tableau de signe de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \alpha - 7x$.
5. Dresser le tableau de signe de l'expression $C = x^2 - 3x$.
6. Donner la forme canonique de l'expression $D = x^2 + 10x + 2$.
7. Si $u(x) = 3x + 1$ et $v(x) = \sqrt{x}$ alors $u \circ v(x) = ...$
8. Factoriser l'expression $E = x^2 - 8x + 7$.
9. On donne ci-dessous le tableau de variation de la fonction f. Dresser celui de la fonction g définie par $g(x) = f(x+3) + 1$.

x	1		4		7
Variations de f(x)			5		
		$\nearrow$		$\searrow$	
	-2				3

10. Soit $f(x) = -\dfrac{1}{x+2}$. Déduire de la courbe représentative de $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ celle de la fonction f.

Correction de la série n° 1

1. $\boxed{3+\sqrt{5}}$.

2. Le coefficient directeur est $\boxed{-5}$.

3. $\boxed{B = 4x^2 - 12x + 9}$.

4.

x	$-\infty$	$\dfrac{\alpha}{7}$	$+\infty$
signe de $\alpha - 7x$	$+$	0	$-$

5.

x		0		3	
signe de $x^2 - 3x$	$+$	0	$-$	0	$+$

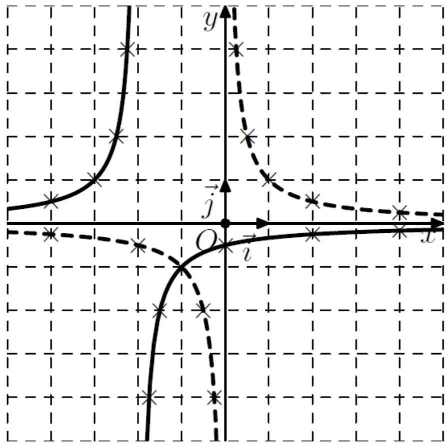
6. $\boxed{D = (x+5)^2 - 23}$.

7. $u \circ v(x) = \boxed{3\sqrt{x}+1}$.

8. $\boxed{E = (x-1)(x-7)}$.

9.

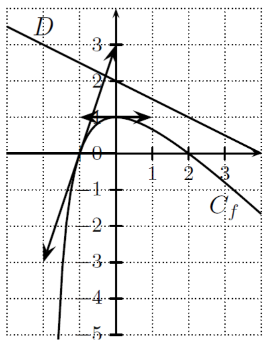
x	-2		1		4
Variations de f(x)			6		
		$\nearrow$		$\searrow$	
	-1				4

10. 

Fiche de calcul mental N$^{\text{o}}$ 2 (Classe de 1$^{\text{ère}}$S)

Série n$^{\text{o}}$ 1

1. Dresser le tableau de signes de $4x - 7$;
2. Dresser le tableau de signes de $3 - x$;
3. Encadrer $h(x) = x^2$ sachant que $-1 < x \leq 2$;
4. Encadrer $g(x) = \dfrac{1}{x}$ sachant que $x \geq 3$;
5. Donner une équation de la droite (D) ;
6. Quelle est l'image de 2 par la fonction f ?
7. Quel est le nombre dérivé de f en -1 ?
8. Quel est le nombre dérivé de f en 0 ?
9. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.
10. Dresser le tableau de signes de $f(x)$.



Série n$^{\text{o}}$ 2

1. Dresser le tableau de signes de $2x + 3$;
2. Dresser le tableau de signes de $4 + x$;
3. Encadrer $h(x) = \dfrac{1}{x}$ sachant que $x \leq -4$;
4. Encadrer $g(x) = |x|$ sachant que $-2 < x \leq 1$;
5. Donner une équation de la droite (Δ) ;

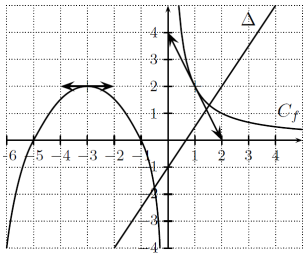
6. Quelle est l'image de -3 par la fonction f ?

7. Quel est le nombre dérivé de f en -3 ?

8. Quel est le nombre dérivé de f en 1 ?

9. Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

10. Dresser le tableau de signes de $f(x)$.



Correction de la série n° 1

1.

x	$-\infty$	$\frac{7}{4}$	$+\infty$
signe de $4x-7$	$-$	0	$+$

2.

x	$-\infty$	3	$+\infty$
signe de $3-x$	$+$	0	$-$

3. $0 \leq h(x) \leq 4$;

4. $0 < g(x) \leq \dfrac{1}{3}$.

5. (D) a pour équation $y = -\dfrac{1}{2}x + 2$.

6. $f(2) = 0$.

7. Le nombre dérivé de f en -1 est 3.

8. Le nombre dérivé de f en 0 est 0.

9. $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$

10.

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Correction de la série n° 2

1.

x	$-\infty$	$\frac{3}{2}$	$+\infty$
signe de $-2x+3$	$+$	0	$-$

2.

x	$-\infty$	-4	$+\infty$
signe de $x+4$	$-$	0	$+$

3. $-\frac{1}{4} \leq h(x) \leq 0$;

4. $0 < g(x) \leq 2$.

5. (Δ) a pour équation $y = \dfrac{3}{2}x - 1$.

6. $f(-3) = 2$.

7. Le nombre dérivé de f en -3 est 0.

8. Le nombre dérivé de f en 1 est -2.

9. $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$

10.

x	$-\infty$		-5		-1		0		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	$\|\|$	$+$	

ANNEXE D

Fonction homogène et méthode delta

Fonction homogène

Définition 1

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}^n$ et à valeur dans $\mathbb{R}$. La fonction f est dite homogène de degré m, avec m un entier, si pour tout $\lambda > 0$,

$$f(\lambda x_1; \lambda x_2; ...; \lambda x_n) = \lambda^m f(x_1; x_2; ...; x_n) \tag{D.1}$$

Exemple 2

○ La fonction $M_{GK}(X_i \to X_j) = f(n_{ij}^{00}; n_{ij}^{01}; n_{ij}^{10}; n_{ij}^{11})$ définie sur $\mathbb{R}^4$ et à valeur dans $[-1; 1]$ est une fonction homogène de degré zéro, car
$f(\lambda n_{ij}^{00}; \lambda n_{ij}^{01}; \lambda n_{ij}^{10}; \lambda n_{ij}^{11}) = f(n_{ij}^{00}; n_{ij}^{01}; n_{ij}^{10}; n_{ij}^{11})$

○ Soit la fonction g définie par $g(x_1; ...; x_n) = a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n$ avec $a_i \in \mathbb{R}$. Alors, on a :

$$\begin{aligned} g(\lambda x_1; \lambda x_2; ...; \lambda x_n) &= \lambda a_1 x_1 + \lambda a_2 x_2 + ... + \lambda a_n x_n \\ &= \lambda(a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n) \\ &= \lambda g(x_1; ...; x_n) \end{aligned}$$

ce qui implique que g est homogène de degré 1.

Théorème 3 : ***Théorème d'Euler***

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}^n$ et à valeur dans $\mathbb{R}$, que l'on suppose différentiable en tout point. Si la fonction f est homogène de degré m, avec m un entier, alors on a :

$$mf(x_1; x_2; ...; x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1; x_2; ...; x_n) \tag{D.2}$$

pour tout $(x_1; x_2; ...; x_n) \in \mathbb{R}^n$.

Preuve :
Comme f est homogène de degré m et différentiable, on dérive par rapport à λ les deux membres de l'égalité (D.1) et on pose $\lambda = 1$. Pour le premier membre de l'égalité (D.1), on a :

$$\begin{aligned}
\left.\frac{df(\lambda x_1; \lambda x_2; ...; \lambda x_n)}{d\lambda}\right|_{\lambda=1} &= \left.\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(\lambda x_1; \lambda x_2; ...; \lambda x_n)}{\partial(\lambda x_i)} \times \frac{(\partial \lambda x_i)}{\partial \lambda}\right|_{\lambda=1} \\
&= \left.\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(\lambda x_1; \lambda x_2; ...; \lambda x_n)}{\partial(\lambda x_i)} \times x_i\right|_{\lambda=1} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(x_1; x_2; ...; x_n)}{\partial(x_i)} \times x_i
\end{aligned}$$

Ensuite, pour le second membre de l'égalité (D.1), on a :

$$\begin{aligned}
\left.\frac{d(\lambda^m f(x_1; x_2; ...; x_n))}{d\lambda}\right|_{\lambda=1} &= \left. m\lambda^{m-1} f(x_1; x_2; ...; x_n)\right|_{\lambda=1} \\
&= m f(x_1; x_2; ...; x_n)
\end{aligned}$$

□

Corollaire 4 :
Si f est une fonction définie sur $\mathbb{R}^n$ et à valeur dans $\mathbb{R}$, différentiable en tout point et homogène de degré 0, alors on a :

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1; x_2; ...; x_n) = 0 \qquad \text{(D.3)}$$

pour tout $(x_1; x_2; ...; x_n) \in \mathbb{R}^n$ et $n \in \mathbb{N}^*$.
Autrement dit, **G.X** $= 0$, où **G** est la matrice jacobienne de f et **X** $= (x_1; x_2; ...; x_n)^T$.

Méthode delta

Théorème 5 : ***Cas univarié***
Soit une suite de variables aléatoires $X_1, \ldots, X_n$ d'espérance θ et de variance σ^2.
Si $\sqrt{n}[X_n - \theta] \xrightarrow{L} \mathcal{N}(0, \sigma^2)$, avec $\xrightarrow{L}$ la notation pour la convergence en loi, d'après la *méthode delta*, pour toute fonction g dérivable et telle que $g'(\theta) \neq 0$:
$\sqrt{n}[g(X_n) - g(\theta)] \xrightarrow{L} \mathcal{N}(0, \sigma^2[g'(\theta)]^2)$.

Théorème 6 : ***Cas multivarié***

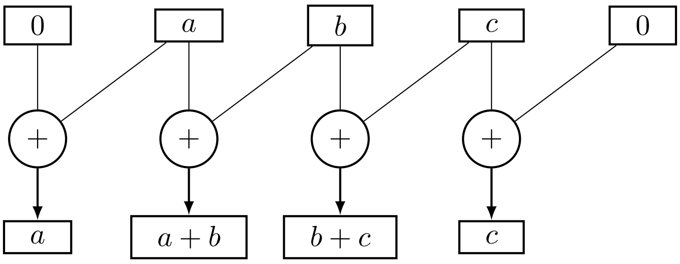
Soit $X_1, \ldots, X_n$ une suite de vecteurs aléatoires de $\mathbb{R}^d$, $g : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^s$ une fonction différentiable en θ. Supposons que $\sqrt{n}[X_n - \theta] \xrightarrow{L} \mathcal{N}_d(0, \Sigma)$, où $\mathcal{N}_d(0, \Sigma)$ désigne la loi normale d-dimensionnelle centrée de matrice de variance-covariance Σ. Dans ce cas la *méthode delta* s'écrit : $\sqrt{n}[g(X_n) - g(\theta)] \xrightarrow{L} \mathcal{N}_s\left(0, Dg(\theta)\Sigma Dg(\theta)^T\right)$,
avec $Dg(\theta)$ la matrice jacobienne de g en θ .

ANNEXE E

Des stratégies schématisées

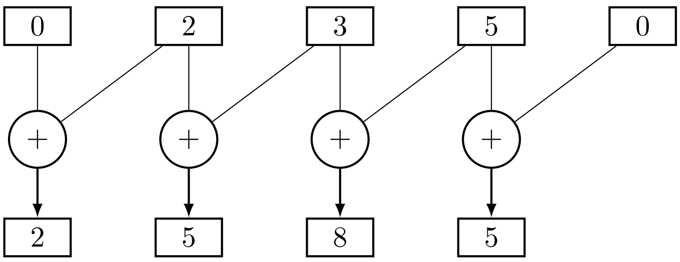
Multiplication par 11

Soit un entiers x d'écriture décimale abc. On a : $x \times 11 = 1000a + 100(a+b) + 10(b+c) + c$.
Méthode de calcul



On ajoute un 0 de chaque côté du nombre x. Chaque chiffre résultat est la somme de celui du dessus et de celui de droite.

Exemple : **235** $\times$ **11**



Donc **235** $\times$ **11=2585**

Autres exemples :

$\mathbf{23 \times 11 = 253}$	$3+0=\mathbf{3}$ $2+3=\mathbf{5}$ $0+2=\mathbf{2}$

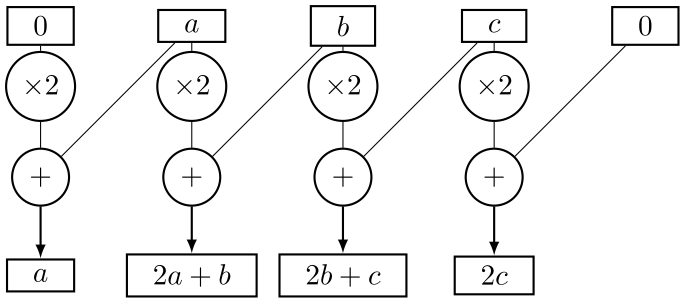
$\mathbf{12549 \times 11 = 138039}$	$9+0=\mathbf{9}$ $4+9=13$, on écrit **3** et on retient 1 $5+4+1=10$, on écrit **0** et on retient 1 $2+5+1=\mathbf{8}$ $1+2=\mathbf{3}$ $0+1=\mathbf{1}$

Multiplication par 12

Soit un entiers x d'écriture décimale abc. On a :

$x \times 12 = 1000a + 100(2a+b) + 10(2b+c) + 2c$.

Méthode de calcul



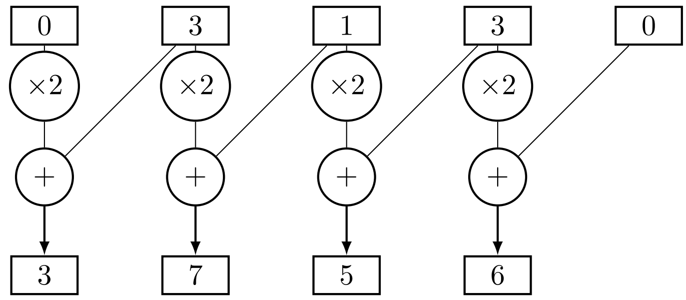
On ajoute un 0 de chaque côté du nombre x. Chaque chiffre résultat est la somme de 2 fois de celui du dessus et de celui de droite.

Autres exemples :

$\mathbf{43 \times 12 = 516}$	$2\times 3+0=\mathbf{6}$ $2\times 4+3=11$, on écrit **1** et on retient 1 $0+4+1=\mathbf{5}$

$\mathbf{9715 \times 12 = 116580}$	$2\times 5+0=10$, on écrit **0** et on retient 1 $2\times 1+5+1=\mathbf{8}$ $2\times 7+1=15$, on écrit **5** et on retient 1 $2\times 9+7+1=26$, on écrit **6** et on retient 2 $2\times 0+9+2=\mathbf{11}$

Exemple : **313** $\times$ **12**



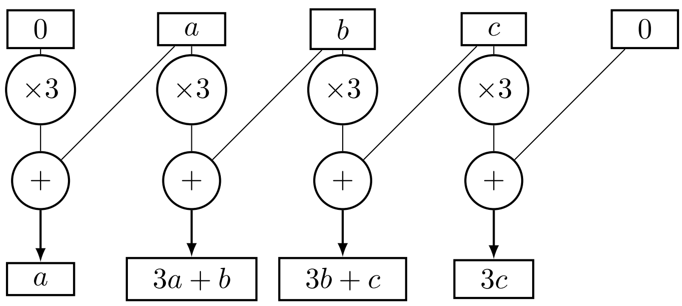
Donc **313** $\times$ **12=3756**

Multiplication par 13

Soit un entiers x d'écriture décimale abc. On a :

$x \times 13 = 1000a + 100(3a+b) + 10(3b+c) + 3c$.

Méthode de calcul



On ajoute un 0 de chaque côté du nombre x. Chaque chiffre résultat est la somme de 3 fois de celui du dessus et de celui de droite.

Autres exemples :

54 $\times$ **13** $=$ **702**

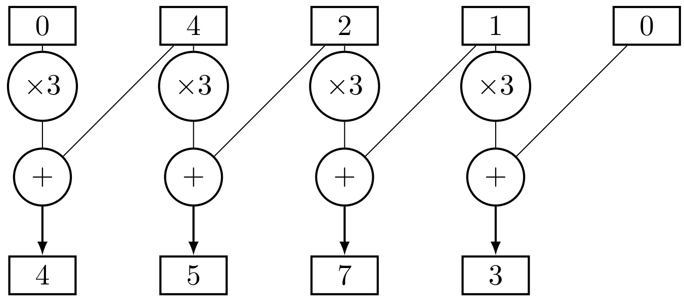
$3 \times 4 + 0 = 12$, on écrit **2** et on retient 1
$3 \times 5 + 4 + 1 = 20$, on écrit **0** et on retient 2
$0 + 5 + 2 =$ **7**

Multiplication par 5

Soit un entiers x d'écriture décimale abc.

Si a, b et c sont pairs, on a : $x \times 5 = 1000\dfrac{a}{2} + 100\dfrac{b}{2} + 10\dfrac{c}{2}$.

Exemple : **412** $\times$ **13**



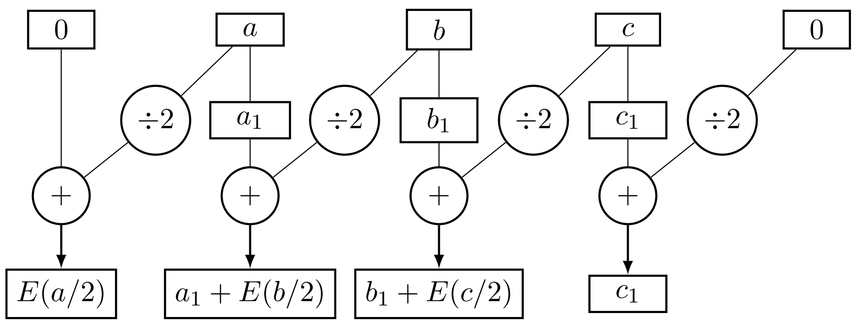
Donc **412** $\times$ **13=4573**

3476 $\times$ **13** $=$ **45188**

$3\times 6+0=18$, on écrit **8** et on retient 1
$3\times 1+5+1=$ **8**
$3\times 7+6+1=28$, on écrit **8** et on retient 2
$3\times 4+7+2=21$, on écrit **1** et on retient 2
$3\times 3+4+2=15$, on écrit **5** et on retient 1
$3\times 0+3+1=$ **4**

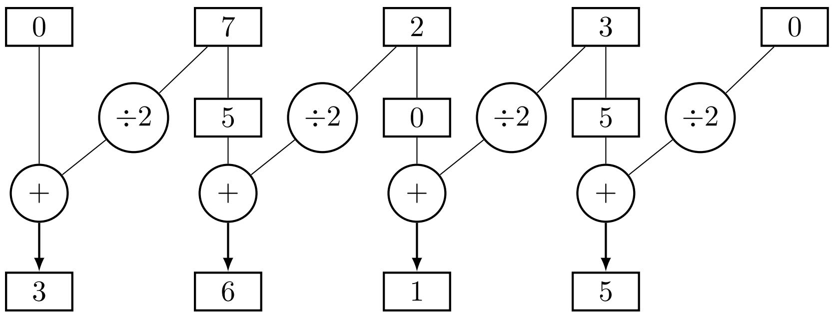
Si a, b et c sont impairs, on a : $x\times 5=1000\dfrac{a-1}{2}+100(5+\dfrac{b-1}{2})+10(5+\dfrac{c-1}{2})+5$.
En combinant les deux cas précédents, on a la méthode de calcul suivante :

Méthode de calcul



où $E(a/2)$ désigne la partie entière de $\dfrac{a}{2}$ et a_1, b_1 et c_1 sont respectivement égaux à 0 s'ils sont pairs et 5 sinon. On ajoute un 0 de chaque côté du nombre x. Chaque chiffre résultat est la somme de 5 (si le chiffre du dessus est impair) ou de 0 (si le chiffre du dessus est pair) et de la partie entière de la moitié du chiffre à droite.
Autres exemples :

Exemple : **725** $\times$ **5**



Donc **723** $\times$ **5=3615**

47 $\times$ **5** $=$ **235**

	4	**7**	$5+0/2=$ **5**
	0	**5**	$0+7/2=3,5$ et on écrit **3**
2	**3**	**5**	$0+4/2=$ **2**

34927 $\times$ **5** $=$ **174635**

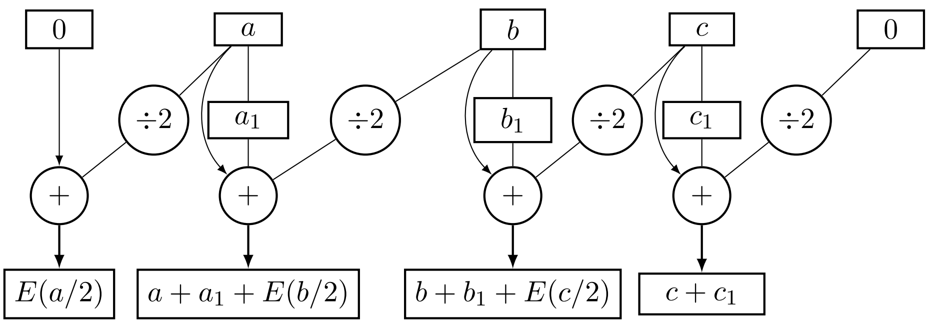
	3	**4**	**9**	**2**	**7**	$5+0/2=$ **5**
	5	**0**	**5**	**0**	**5**	$0+7/2=3,5$ et on écrit **3**
1	**7**	**4**	**6**	**3**	**5**	$5+2/2=$ **6**
						$0+9/2=4,5$ et on écrit **4**
						$5+4/2=$ **7**
						$0+3/2=1,5$ et on écrit **1**

Multiplication par 6

Soit un entiers x d'écriture décimale abc.

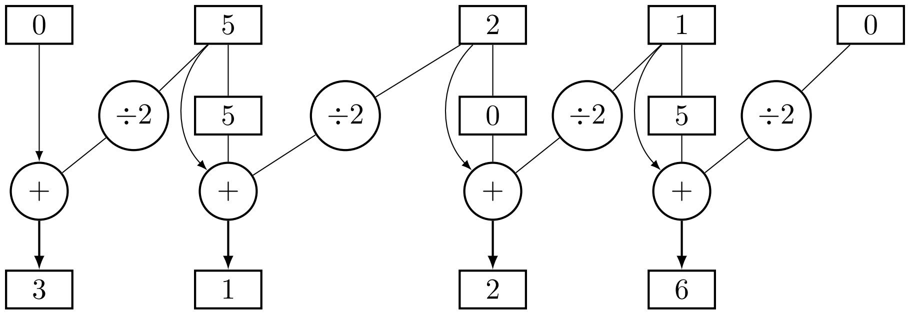
$x\times 6=x+x\times 5$.

Méthode de calcul



où $E(a/2)$ désigne la partie entière de $\dfrac{a}{2}$ et a_1, b_1 et c_1 sont respectivement égaux à 0 s'ils sont pairs et 5 sinon. On ajoute un 0 de chaque côté du nombre x. Chaque chiffre résultat est la somme de 5 (si le chiffre du dessus est impair) ou de 0 (si le chiffre du dessus est pair), de la partie entière de la moitié du chiffre à droite et du nombre du dessus.

Exemple : **521** $\times$ **6**



Donc **521** $\times$ **6=3126**

Autres exemples :

73 $\times$ **6** $=$ **438**

	7	**3**	$3+5+0/2=$ **8**
	5	**5**	$7+5+3/2=13,5$ et on écrit **3** et on retient 1
4	**3**	**8**	$0+7/2+1=4,5$ et on écrit **4**

5492 $\times$ **6** $=$ **12952**

	5	**4**	**9**	**2**	$2+0+0/2=$ **2**
	5	**0**	**5**	**0**	$9+5+2/2=15$ et on écrit **5** et on retient 1
1	**2**	**9**	**5**	**2**	$4+0+9/2=9,5$ et on écrit **9**
					$5+5+4/2=$ **12**

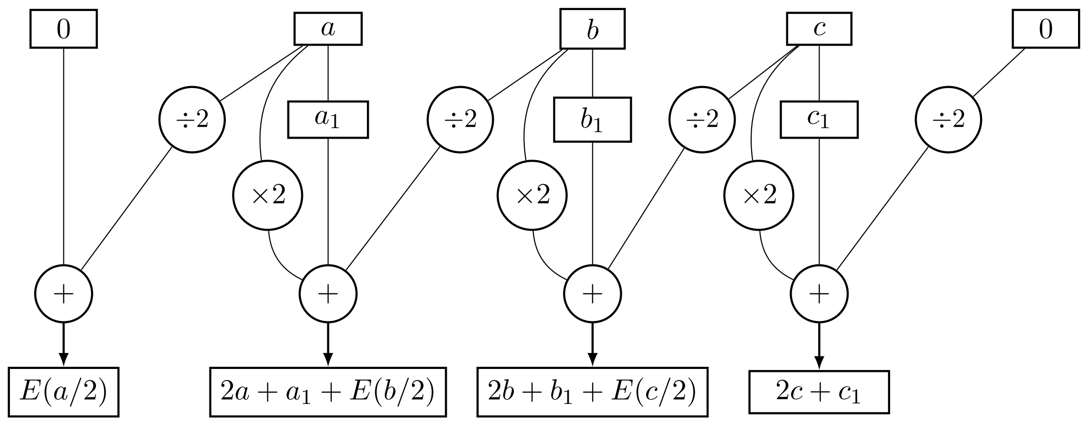
Multiplication par 7

Soit un entiers x d'écriture décimale abc.

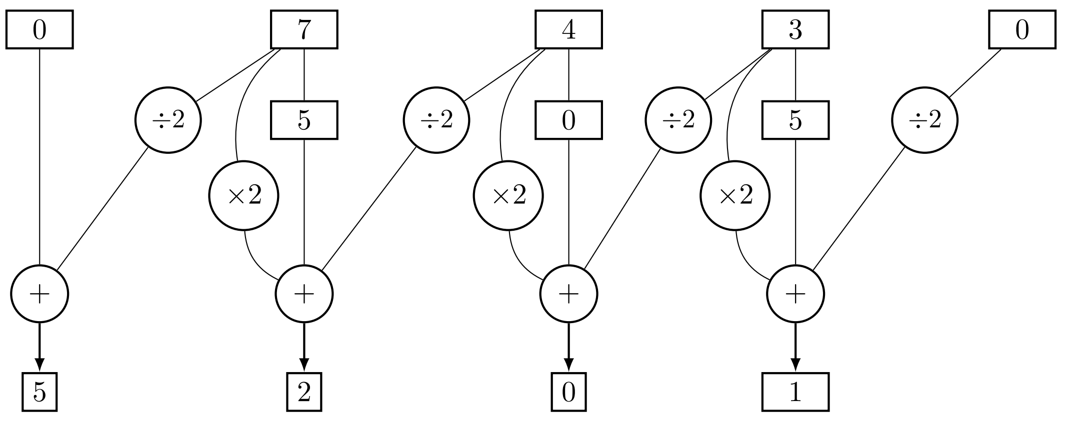
$x\times 7=2\times x+x\times 5$.

où $E(a/2)$ désigne la partie entière de $\dfrac{a}{2}$ et a_1, b_1 et c_1 sont respectivement égaux à 0 s'ils sont pairs et 5 sinon. On ajoute un 0 de chaque côté du nombre x. Chaque chiffre résultat est la somme de 5 (si le chiffre du dessus est impair) ou de 0 (si le chiffre du dessus est pair), de la partie entière de la moitié du chiffre à droite et de 2 fois du nombre du dessus.

Méthode de calcul



Exemple :$\mathbf{743} \times \mathbf{7}$



Donc $\mathbf{743} \times \mathbf{7=5201}$

Autres exemples :

83 $\times$ **7** $=$ **781**

	8	**3**	$2 \times 3 + 5 + 0/2 = 11$ et on écrit **1** et on retient 1
	0	**5**	$2 \times 8 + 0 + 3/2 = 18,5$ et on écrit **8** et on retient 1
5	**8**	**1**	$0 + 8/2 + 1 = 5$

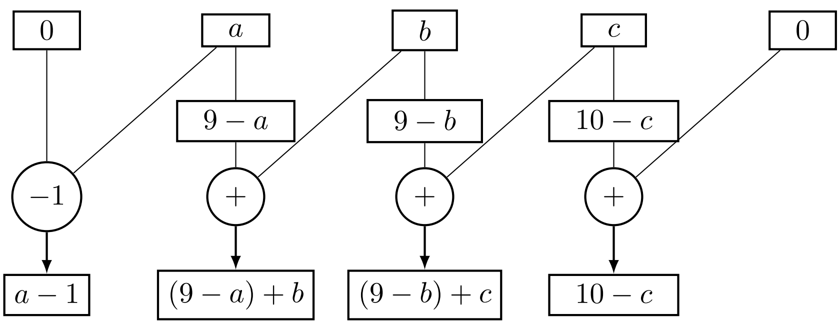
72456 $\times$ **7** $=$ **507192**

	7	**2**	**4**	**5**	**6**	$2 \times 6 + 0 + 0/2 = 12$ et on écrit **2** et on retient 1
	5	**0**	**0**	**5**	**0**	$2 \times 5 + 5 + 6/2 + 1 = 19$ et on écrit **6** et on retient 1
5	**0**	**7**	**1**	**9**	**2**	$2 \times 4 + 0 + 5/2 + 1 = 11,5$ et on écrit **1** et on retient 1
						$2 \times 2 + 0 + 4/2 + 1 = 7$
						$2 \times 7 + 5 + 2/2 = 20$ et on écrit **0** et on retient 2
						$0 + 7/2 + 2 = 5$

Multiplication par 9

Soit un entiers x d'écriture décimale abc. On a :
$x \times 9 = 1000(a-1) + 100[(9-a)+b] + 10[(9-b)+c] + (10-c)$.

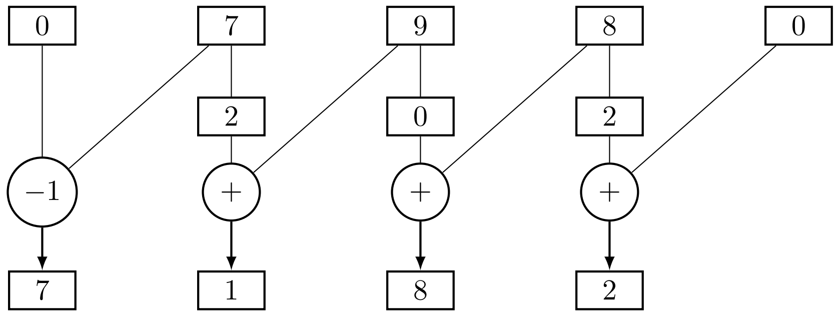
Méthode de calcul



On ajoute un 0 de chaque côté du nombre x et on prend le complément à 9 de chaque chiffre et à 10 pour les unités. Chaque chiffre résultat est la somme de chiffre du dessus et du chiffre précédent à droite. Au dernier chiffre à gauche, on retranche **1**.

Autres exemples :

Exemple : **798** $\times$ **9**



Donc **798** $\times$ **9=7182**

93 $\times$ **9** $=$ **837**	0	**9**	**3**	0			$10-3=7$ et $0+7=$ **7**
		0	**7**				$9-9=0$ et $0+3=$ **3**
	8	**3**	**7**				$9-1=$ **8**

5286 $\times$ **9** $=$ **47574**	0	**5**	**2**	**8**	**6**	0	$10-6=4$ et $0+4$**4**
		4	**7**	**1**	**4**		$9-8=1$ et $6+1=$ **7**
		4	**7**	**5**	**7**		$9-2=7$ et $7+8=15$, on écrit **5** et on retient 1
							$9-5=4$ et $2+4+1=$ **7**
							$5-1=$ **4**

Multiplication par 8

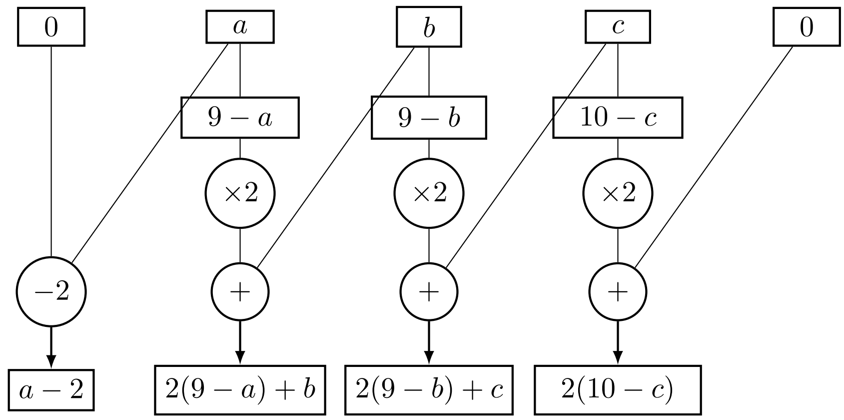
Soit un entiers x d'écriture décimale abc. On a :

$x \times 9 = 1000(a-2) + 100[2(9-a)+b] + 10[2(9-b)+c] + 2(10-c)$.

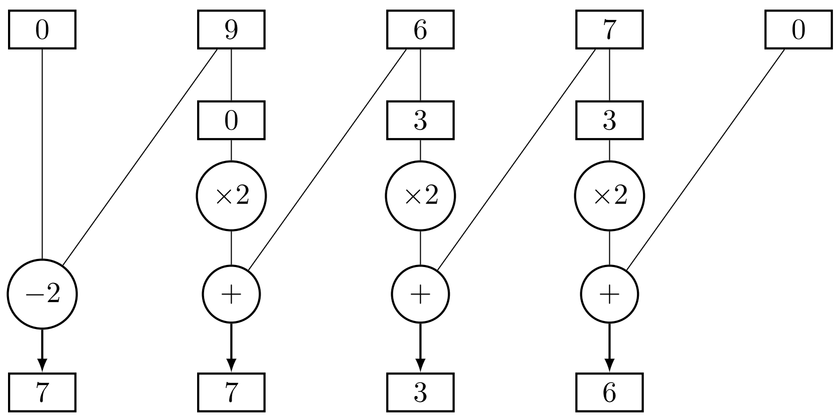
On ajoute un 0 de chaque côté du nombre x et on prend le complément à 9 de chaque chiffre et à 10 pour les unités. Chaque chiffre résultat est la somme de 2 fois du chiffre du dessus et du chiffre précédent à droite. Au dernier chiffre à gauche, on retranche **2**.

Autre exemple :

Méthode de calcul



Exemple : **967** $\times$ **8**



Donc **967** $\times$ **8=7736**

54 $\times$ **8** = **432**	0 **5** **4** 0	$10-4=6$ et $0+2\times 6=12$, on écrit **2** et on retient 1.
	4 **6**	$9-4=5$ et $4+2\times 4+1=13$, on écrit **3** et on retient 1.
	4 **3** **2**	$5-2+1=$ **4**

Intitulé : ***Enseignement-apprentissage du calcul mental dans le primaire et secondaire et analyse comparative des méthodes ASI-M_{GK} et TRI***

Résumé :
Le calcul mental, avec ses enjeux éducatifs non négligeables dont la formation d'un futur citoyen spontané et capable de participer à un débat de grande envergure, est une série d'opérations effectuées mentalement sans intervention d'une calculatrice, avec une possibilité de recourir aux supports écrits. Le calcul mental a besoin des techniques efficaces en apprentissage, des techniques efficaces en temps et une expérimentation pédagogique pour pouvoir rapidement répondre aux questions posées. L'opportunité vraiment facile de se procurer une calculette, un téléphone portable, voire un ordinateur, serait probablement à l'origine de cet évitement du calcul mental, voire d'un comportement de dépendance prégnante aux machines, même pour opérer à des petits calculs quotidiens. Depuis ma carrière dans l'enseignement et lors de quelques renforcements académiques des enseignants du primaire sur les mathématiques, nous avons constaté que le problème majeur de l'enseignement de mathématiques à Madagascar est basé sur le calcul mental et les stratégies d'enseignement de mathématiques.
Par ailleurs, il y a la Théorie de Réponse à Items (TRI) qui est déjà assez utilisée par les chercheurs anglo-saxon, notamment pour évaluer des tests et analyser des données d'enquêtes comme les techniques relatives à l'Analyse Statistique Implicative (ASI). Cependant, il n'existe pas des travaux qui étudient les liens éventuels entre TRI et l'indice M_{GK} qui s'utilise en ASI.

Suite à ce qui est développé ci-dessus, notre objectif est de mener de travaux de recherche en didactique de calcul mental parallèlement en l'identification de lien entre TRI et ASI-M_{GK}, avec validation effective sur les données collectées à l'issue des expérimentations sur l'enseignement-apprentissage de calcul mental au niveau primaire, au niveau collège et lycée.

Après avoir analysé les programmes scolaires de mathématiques en vigueur, en constatant que le calcul mental s'est effectué en primaire, de la classe de 9$^{\text{ème}}$ à la classe de 7$^{\text{ème}}$ et ne continue plus en secondaire, nous avons proposé des nouvelles formes de calcul mental en secondaire. En outre, convaincu de la facilité d'additionner par rapport à multiplier mentalement, nous allons utiliser une nouvelle procédure sur la multiplication de deux facteurs entiers, basée sur une schématisation et un choix judicieux de référence simple ou double, tout en facilitant le calcul de produit ; ainsi, le choix de référence doit se faire parmi les multiples de 10.
Certes, l'analyse d'échelle de Mokken en TRI non-paramétrique utilise une de composante de l'indice M_{GK}, puis pour mieux interpréter les résultats, nous avons étudié les erreurs-types de l'indice M_{GK}, en utilisant la méthode *delta*.

Au bout de nos travaux, nous produirons, entre autres, des prescriptions, guides pédagogiques sur le calcul mental et des fiches de calcul mental utilisé au secondaire ; ce qui sera certainement utile au formateur d'enseignant aussi bien du primaire que du secondaire.

Mots-clés : Calcul mental, schématisation, multiplication mentale, TRI, M_{GK}.

Abstract :
Mental calculation, with its significant educational stakes including the formation of a future spontaneous citizen and capable of participating in a large-scale debate, is a series of operations performed mentally without the intervention of a calculator, with the possibility of resorting to written supports. Mental calculation requires effective learning techniques, time-efficient techniques and pedagogical experimentation to quickly answer questions. The really easy opportunity to get a calculator, a mobile phone, or even a computer, would probably be the cause of this avoidance of mental arithmetic, or even a behavior of dependence pregnant machines, even to operate on small calculations daily. Since my teaching career and during some academic strengthening of primary school teachers of mathematics, we have found that the major problem of mathematics education in Madagascar is based on mental mathematics and teaching strategies. mathematics.
In addition, there is the Item Response Theory (IRT), which is already used quite a bit by Anglo-Saxon researchers, notably to evaluate tests and analyze survey data such as the techniques relating to Statistical Implicative Analysis (SIA). However, there is no work to study the possible links between IRT and the M_{GK} index that is used in SIA.

Following the above, our goal is to carry out research work in mental mathematics didactic paralleling in the identification of link between IRT and SIA-M_{GK}, with effective validation on the data collected. at the end of experiments on the teaching-learning of mental calculus at the primary level, at the college and high school level.

After analyzing the curricula of mathematics in force, by observing that the mental calculation was done in primary school, of the class of 9 $^{\text{th}}$ to the class of 7 $^{\text{th}}$ and does not continue any more in secondary, we have proposed new forms of mental calculation in secondary school. In addition, convinced of the ease of adding in relation to mentally multiplying, we will use a new procedure on the multiplication of two integer factors, based on a schematization and a judicious choice of single or double reference, while facilitating the calculation of product ; thus, the reference choice must be made among multiples of 10. While Mokken's non-parametric IRT scale analysis uses a component of the index M_{GK}, then to better interpret the results, we studied the standard errors of the index M_{GK}, using the delta method.

At the end of our work, we will produce, among other things, prescriptions, teaching guides on mental arithmetic and mental charts used in secondary school ; which will certainly be useful to the teacher trainer of both primary and secondary schools.

Keywords : Mental calculation, Schematization, Mental multiplication, IRT, M_{GK}.

Famintinana :
Ny kajy ankandrina dia andiana asamarika atao antsaina izay tsy ampiasaina fitaovana mpanao marika ary mety ilàna fitaovana fanoratana indraindray. Manana anjara toerana eo amin'ny fampianarana ny kajy ankandrina, eo amin'ny famolavolana ny olom-pirenena ho vonona hatrany ary afaka mandray anjara amin'ny adihevitra lehibe. Mitaky teknika fianarana mahomby, teknika mahomby sy fanandramana ara-pahalalana mba hamaliana haingana fanontaniana io kajy ankandrina io. Ny fahafahana mora mahazo ny fitaovana mpanao kajy, finday na ordinatera no mety mahatonga fandosirana ny kajy ankandrina, na dia manao asamarika kely isan 'andro aza. Hatramin'ny fotoana nampianarako sy nandritra ny fanamafisana ny fianarana amin'ny sekoly ambaratonga fototra amin'ny matematika dia hitanay fa ny olana goavana amin'ny fanabeazana matematika eto Madagasikara dia mifototra amin'ny kajy ankandrina sy ny paika amin'ny fampianarana matematika. Ankoatra izany, ny Fahalalana Mifototra amin'ny Valim-panontaniana (TRI) izay efa tena nampiasain'ny mpikaroka angilisy, mba ampiasaina indrindra amin'ny fanombanana fitsapana ary hadihadiana angona avy amin'ny fanadihadiana toy ny teknika ny Fanadihadiana ara-Pitarihana Statistika. Na izany aza, mbola tsy misy asa fikarohana tokony handinihana ny fifandraisan'ny TRI sy ny refin-kalitaon'ny fitsipipifandraisana M_{GK} izay ampiasaina amin'ny Fanadihadiana ara-Pitarihana Statistika.

Eo anatrehan'izay voalaza etsy ambony, ny tanjony dia ny hitondra ny asa fikarohana momba ny haifampianarana ny kajy ankandrina, sy fitadiavana ny fifandraisana misy eo TRI sy ny M_{GK}, miaraka amin'ny fankatoavana ny antontanisa nangonina avy amin'ny alalan'ny fanandramana momba ny sehom-pampianarana ny kajy ankandrina amin'ny Fanabeazana Fototra Ambaratonga Voalohany sy Faharoa.

Rehefa avy mandinika ny fandaharam-pianarana matematika manankery, izay nahatsapana fa kajy ankandrina dia atao manomboka amin'ny kilasy fahasivy ka hatramin'ny fahafito ary tsy mitohy intsony any amin'ny Ambaratonga Faharoa, dia nanolotra karazana kajy ankandrina amin'ny sekoly ambaratonga faharoa izahay. Ankoatra izany, resy lahatra ny mora ny fanampiana raha oharina fampitomboana ankandrina, dia hampiasa fomba vaovao ho an'ny fampitomboana, mifototra amin'ny seho an-tsary sy ny safidy tsara ny referansa, raha ny amin'ny fanamoràna ny kajy vokatra ; Noho izany, ny safidy amin'ny referansa dia tokony henenin'ny 10.
Raha ny marina dia mampiasa ny refin-kalitao M_{GK} ny fanadihadian'ny maridrefin'I Mokken, ary mba hahafahana mandika ny hevitry ny vokatra tsara kokoa, dia nikaroka erora-tipan' ny refin-kalitao M_{GK} izahay, amin'ny fampiasana ny fomba delta.

Teny manandanja : Kajy ankandrina, Seho an-tsary, Fampitomboana ankandrina, TRI , M_{GK}.

Nombre de tableaux : 8

Nombre de figures : 15

Nombre de pages : 245

Coordonnées de l'auteur :

Tél : 034 64 958 45, ou 033 20 634 77 **Email** : *rstephanrodin@gmail.com*

Directeur : Professeur titulaire **André TOTOHASINA**,

Co-Directeur : Professeur des universités **Dominique TOURNÈS**

Nom et prénoms: **RANDRIANTSARALAZA Stephan Rodin**
E-mail : ***rstephanrodin@gmail.com***

Intitulé : ***Enseignement-apprentissage du calcul mental en primaire et secondaire et analyse comparative des méthodes ASI-M_{GK} et TRI***

Résumé. — Le calcul mental, avec ses enjeux éducatifs non négligeables dont la formation d'un futur citoyen spontané et capable de participer à un débat de grande envergure, est une série d'opérations effectuées mentalement sans intervention d'une calculatrice, avec une possibilité de recourir aux supports écrits. Le calcul mental a besoin des techniques efficaces en apprentissage, des techniques efficaces en temps et une expérimentation pédagogique pour pouvoir rapidement répondre aux questions posées. L'opportunité vraiment facile de se procurer une calculette, un téléphone portable, voire un ordinateur, serait probablement à l'origine de cet évitement du calcul mental, voire d'un comportement de dépendance prégnante aux machines, même pour opérer à des petits calculs quotidiens. Depuis ma carrière dans l'enseignement et lors de quelques renforcements académiques des enseignants du primaire sur les mathématiques, nous avons constaté que le problème majeur de l'enseignement de mathématiques à Madagascar est basé sur le calcul mental et les stratégies d'enseignement de mathématiques.

Après avoir analysé les programmes scolaires de mathématiques en vigueur, en constatant que le calcul mental s'est effectué en primaire, de la classe de 9$^{\text{ème}}$ à la classe de 7$^{\text{ème}}$ et ne continue plus en secondaire, nous avons proposé des nouvelles formes de calcul mental en secondaire. En outre, convaincu de la facilité d'additionner par rapport à multiplier mentalement, nous allons utiliser une nouvelle procédure sur la multiplication de deux facteurs entiers, basée sur une schématisation et un choix judicieux de référence simple ou double, tout en facilitant le calcul de produit ; ainsi, le choix de référence doit se faire parmi les multiples de 10.

Par ailleurs, il y a la Théorie de Réponse à Items (TRI) qui est déjà assez utilisée par les chercheurs anglo-saxon, notamment pour évaluer des tests et analyser des données d'enquêtes comme les techniques relatives à l'Analyse Statistique Implicative (ASI). Cependant, il n'existe pas des travaux qui étudient les liens éventuels entre TRI et l'indice M_{GK} qui s'utilise en ASI. Certes, l'analyse d'échelle de Mokken en TRI non-paramétrique utilise une de composante de l'indice M_{GK}, puis pour mieux interpréter les résultats, nous avons étudié les erreurs-types de l'indice M_{GK}, en utilisant la méthode delta.

Mots-clés : Calcul mental, schématisation, multiplication mentale, TRI, M_{GK}.

Abstract. — Mental calculation, with its significant educational stakes including the formation of a future spontaneous citizen and capable of participating in a large-scale debate, is a series of operations performed mentally without the intervention of a calculator, with the possibility of resorting to written supports. Mental calculation requires effective learning techniques, time-efficient techniques and pedagogical experimentation to quickly answer questions. The really easy opportunity to get a calculator, a mobile phone, or even a computer, would probably be the cause of this avoidance of mental arithmetic, or even a behavior of dependence pregnant machines, even to operate on small calculations daily. Since my teaching career and during some academic strengthening of primary school teachers of mathematics, we have found that the major problem of mathematics education in Madagascar is based on mental mathematics and teaching strategies. mathematics.

After analyzing the curricula of mathematics in force, by observing that the mental calculation was done in primary school, of the class of 9 $^{\text{th}}$ to the class of 7 $^{\text{th}}$ and does not continue any more in secondary, we have proposed new forms of mental calculation in secondary school. In addition, convinced of the ease of adding in relation to mentally multiplying, we will use a new procedure on the multiplication of two integer factors, based on a schematization and a judicious choice of single or double reference, while facilitating the calculation of product; thus, the reference choice must be made among multiples of 10.

In addition, there is the Item Response Theory (IRT), which is already used quite a bit by Anglo-Saxon researchers, notably to evaluate tests and analyze survey data such as the techniques relating to Statistical Implicative Analysis (SIA). However, there is no work to study the possible links between IRT and the M_{GK} index that is used in SIA. While Mokken's non-parametric IRT scale analysis uses a component of the index M_{GK}, then to better interpret the results, we studied the standard errors of the index M_{GK}, using the delta method.

Keywords : Mental calculation, Schematization, Mental multiplication, IRT, M_{GK}.

Directeur : Professeur titulaire **André TOTOHASINA**
E-mail : ***andre.totohasina@gmail.com***
Co-Directeur : Professeur des universités **Dominique TOURNÈS**
E-mail : ***dominique.tournes@univ-reunion.fr***