UNIVERSITE DE FIANARANTSOA

ECOLE NORMALE SUPERIEURE

Filière : MATHEMATIQUES

Memoire

Thème :

METHODES DE RESOLUTION DES EQUATIONS AUX DERIVEES PARTIELLES APPLIQUEES A L'ETUDE DES MOUVEMENTS DES OSCILLATEURS MECANIQUES ET ELECTRIQUES ET A LA DETERMINATION DE L'EQUATION DE LA CHALEUR ET DES ONDES

POUR L'OBTENTION DU CAPEN

(Certificat d'Aptitude Pédagogique de l'Ecole Normale)

Présenté par : RATSIFOINARIVO Joseph Marie

Président de Jury : RASOLOARIJAON Madison, Maître de conférences en Electronique, Enseignant à l'Ecole Nationale d'Informatique de l'Université de Fianarantsoa

Rapporteur : RATSIMBAZAFY, Enseignant-chercheur à l'Ecole Normale Supérieure de l'Université de Fianarantsoa

Examinateur : RANIVONANDRASANA Florentine, Enseignant- chercheur à l'Ecole Normale Supérieure de l'Université de Fianarantsoa

2010

UNIVERSITE DE FIANARANTSOA

ECOLE NORMALE SUPERIEURE

Filière : MATHEMATIQUES

Memoire

Thème :

METHODES DE RESOLUTION DES EQUATIONS AUX DERIVEES PARTIELLES APPLIQUEES A L'ETUDE DES MOUVEMENTS DES OSCILLATEURS MECANIQUES ET ELECTRIQUES ET A LA DETERMINATION DE L'EQUATION DE LA CHALEUR ET DES ONDES

POUR L'OBTENTION DU CAPEN

(Certificat d'Aptitude Pédagogique de l'Ecole Normale)

Présenté par : RATSIFOINARIVO Joseph Marie

2010

RATSIFOINARIVOZANATSOA Nikita Melissa Maria Florinda

Ma petite fille de cinq ans

Saint Joseph de Cluny TAMBOHOBE

REMERCIEMENTS

A l'occasion de la présentation de ce mémoire de fin d'étude, filière : MATHEMATIQUES, j'adresse mes vifs remerciements à :

- Monsieur RATSIMBAZAFY, Enseignant Chercheur à l'ECOLE NORMALE SUPERIEURE de Fianarantsoa, de bien vouloir encadrer ce mémoire de recherche
- Monsieur RASOLOARIJAONA Madison, Maître de conférences en Electronique, Enseignant à l'Ecole Nationale d'Informatique de l'Université de Fianarantsoa, de bien vouloir accepter la présentation de la soutenance de ce mémoire de recherche
- Madame RANIVONANDRASANA Florentine, Enseignant-chercheur à l'Ecole Normale Supérieure de l'Université de Fianarantsoa, de bien vouloir être l'examinateur de ce mémoire de recherche.

Je remercie également ma petite fille de cinq ans qui ne cesse pas de prier à notre PERE, par l'intermédiaire de la Sainte Vierge MARIE, pour la réussite de mes études ainsi que ce mémoire de fin d'étude.

.

CURRICULUM VITAE

I- ETAT CIVIL

NOM : RATSIFOINARIVO

Prénoms : Joseph Marie

Date de naissance : 12 Janvier 1955

Lieu de Naissance : Antananambony Anosizato Antananarivo

Situation de famille : Marié, père d'une fillette de 5ans

Adresse actuelle : Ambohidramasy – Andrainjato

II- ETUDES ET DIPLOMES OBTENUS

Année	ETABLISSEMENTS FREQUENTES	DIPLOMES OBTENUS
1965 – 1966	Ecole Sacré Cœur de Jésus ANOSIZATO	
1967 – 1970	Ecole Primaire Publique ANOSIZATO	CEPE
1971 1974	Sainte Thérèse Ilanivato Antananarivo	BEPC
1975 – 1976	Ecole Normale d'Instituteur Mahamasina	PRE BACC Série C
1976 – 1977	Lycée JJ Rabearivelo Antananarivo	BACC Série C
1978 – 1979	Centre Universitaire Régional Fianarantsoa	DUES I
1979 – 1980	Centre Universitaire Régional Fianarantsoa	DUES II
1980 – 1981	Etablissement d'Enseignement Supérieure des Sciences Ankatso	Licence ès Sciences Mathématiques
2007 – 2008	Faculté des Sciences Ankatso	Maîtrise ES MATHS
2008 – 2009	Ecole Normale Supérieure- Formation Adulte	M.S.F.D (Maitrise spécialisée en Formation et Développement)

III- FORMATION PROFESSIONNELLE

ANNEE	ETABLISSEMENTS	FONCTION
1986 – 1996	Lycée Rakotoarisoa Ambositra	Professeur de MATHS
1996 – 1997	Lycée Mampikony	———/———
1997 – 2003	Lycée Kianjandrakefina Ambositra	———/———
2003 – 2006	CEG Ambatofitorahana Ambositra	Professeur de - Mathématiques - Physique Chimie - Anglais - Français

IV- LANGUES

Malagasy – Français – Anglais

V- ACTIVITES SPORTIVES

Année	Arts Martiaux	Grade	Style
1971 – 1974	Jiu Ju Tsiu		
1971 – 1974	Judo		
1979 – 1981	Kung – Fu		
1979 – 2007	Karaté	CN du deuxième degré	Shoto – Kan

Année	DOJO	SENSEI
1979 – 1982	Centre Universitaire Régional Andrainjato	Sensei JEAN PIERRE CN 2e Dan Sensei HARIELD TANING CN 4e Dan
1982 – 1986	FIHEZAMA KARATE – DO Anosizato FALDA ANTANIMENA	Sensei JEAN PIERRE CN 4e Dan Sensei Joseph Marie CN 1e Dan
1996 – 1997	LYCEE MAMPIKONY	Sensei Joseph Marie CN 2e Degré
1996 – 2003	LYCEE KIANJANDRAKEFINA AMBOSITRA	
2003 – 2006	CEG Ambatofitorahana Ambositra	Sensei Joseph Marie CN 2e Degré

VI- AUTRES ECOLES FREQUENTEES

ANNEE	ETABLISSEMENT FREQUENTE	FONCTION : Prof. de :	CLASSE
1975 – 1976	Collège Saint Etienne Ambanidia Nouvelle Vague Anosy	Mathématiques – Sciences Naturelles	6e à 3ème
1977 – 1978	CEG Analalava Mahajanga	Physique Chimie	4ème
1978 – 1982	Collège Privé Andrianarisoa Lycée Ramamonjy Fianarantsoa	PC Mathématiques	1ère D 2nde
1975 – 1976	Collège Privé Ambohimamory Ampitatafika Antananarivo	PC	6ème – 5ème
1982 – 1986	Saint François Xavier Antanimena Saint Michel Amparibe	Mathématiques Physique Chimie Mathématiques	TC 2nde 5ème

INTRODUCTION

L’étude des différents types d’équations aux dérivées partielles permet de maîtriser la résolution des équations différentielles aux classes terminales du Lycée. Elle est indispensable à l’étude des mouvements des oscillateurs mécaniques et électriques et à la détermination des équations de la chaleur et des ondes.

Il est donc souhaitable aux futurs enseignants du Lycée de l’Ecole Normale Supérieure de Fianarantsoa de se familiariser aux méthodes de résolution des équations aux dérivées partielles ou du moins, de se contenter aux mécanismes de résolution, pour améliorer la qualité de l’enseignement des sciences physiques et des mathématiques aux Lycées.

La joie et le goût du perfectionnement nous poussent à choisir alors le thème :

METHODES DE RESOLUTION DES EQUATIONS AUX DERIVEES PARTIELLES APPLIQUEES A L’ETUDE DES MOUVEMENTS DES OSCILLATEURS MECANIQUES ET ELECTRIQUES

Elles permettent aussi de déterminer les équations de la chaleur et des ondes sur IR. Les notions des différentes méthodes de résolution exigent la maîtrise des notions mathématiques nouvelles :

- Les transformations de LAPLACE, de FOURIER
- La diagonalisation et l’exponentielle d’une matrice.

Il est vrai sans dire que maîtriser c’est mieux transmettre. On essayera donc de donner les différentes méthodes par ordre croissant de difficulté, c'est-à-dire on entamera l’étude, de la plus facile à la plus compliquée en illustrant par divers exemples concrets.

Les questions de recherche paraissent évidentes : est-ce qu’on peut éviter de retenir tout le temps la solution générale d’une équation différentielle aux classes terminales ?

N’est-il pas préférable d’aiguiser la mémoire des élèves pour d’autres notions de matières scientifiques que l’on admet sans démonstration ?

Si on arrive à maîtriser les diverses méthodes de résolution des équations aux dérivées partielles, la réponse aux questions posées semble vraie sans dire.

Mais il ne faut pas imaginer que l'unique fonction des mathématiques cette « servante des sciences » est de servir la science. Les mathématiques au-dessus de leur application possible aux sciences possèdent une lumière et une sagesse propre et elles récompensent richement tout être humain intelligent qui arrive à saisir une lueur de ce qu'elles représentent par elles-mêmes[1].

Le contenu de la recherche est donc constitué de :

i- Équations différentielles
ii- Équations aux dérivées partielles
iii- Applications à la résolution des équations différentielles utilisées aux classes terminales du lycée.

[1] D'après E.T. BELL

PREMIERE PARTIE

Dans cette première partie on va voir :

- Le Rappel des notions relatives aux espaces de Banach ;
- Les applications linéaires continues
- Les applications différentielles
- Les applications différentielles

Ces notions préliminaires permettent de mieux comprendre les méthodes de résolutions des équations aux dérivées partielles.

ETUDIANTS DE LA CINQUIEME ANNEE MATHEMATIQUES

ENS FIANARANTSOA

2010

CHAPITRE 1 : RAPPEL DE NOTIONS RELATIVES AUX ESPACES DE BANACH – APPLICATIONS LINEAIRES CONTINUES – APPLICATIONS DIFFERENTIABLES

I- ESPACES DE BANACH

I-1- Espace vectoriel

Désignons par IK le corps réel IR ou le corps complexe C. Un espace vectoriel IE sur le corps de base IK est un ensemble muni de deux opérations avec les propriétés suivantes :

I-1-1- Addition :

$\forall\, x, y \in IE$ on peut faire correspondre x + y $\in IE$

La loi + est une loi de composition interne

Tel que :

i) $\forall$ x, y $\in \mathbb{E}$, x + y = y + x (Commutativité de +)

ii) $\forall$ x, y, z $\in \mathbb{E}$, x+ (y + z) = (x + y) + z ;(Associativité de +)

iii) $\exists$ 0 $\in \mathbb{E}$ tel que $\forall\, x \in \mathbb{E}\ \ x + 0 = x$; (existence de l'élément neutre pour +)

iv) $\forall$ x $\in \mathbb{E}$ $\exists\,(-x) \in \mathbb{E}$ tel que $x + (-x) = 0$ (existence de l'élément neutre pour +)

I-1-2- Multiplication par un scalaire

$\forall$ a $\in$ IK, $\forall$ x $\in$ IK on peut faire correspondre a.x $\in$ IE

ie la loi **.** est une loi de composition externe

Tel que : i) 1 . x = x $\forall$ x $\in$ IE

ii) $\forall$ a, b $\in$ IK, $\forall$ x $\in$ IE , a (b . x) = (ab) . x ; (Associativité mixte)

iii) $\forall$ a $\in$ IK, $\forall$ x , y $\in$ IE , a (x + y) = ax + ay ; (Distributive mixte)

iv) $\forall$ a, b $\in$ IK, $\forall$ x $\in$ IE, (a + b)) . x = a . x + b . x. (Distributive mixte)

I-2- NORME SUR UN ESPACE VECTORIEL IE

C'est une application N : IE $\rightarrow$ IR^+ ayant les propriétés suivantes :

i) N (0) = 0 ;

ii) $(N(x) = 0 \Rightarrow (x = 0)$; $\forall x \in IE$

iii) $N(x + y) \leq N(x) + N(y)$, $\forall x, y \in IE$; (Inégalité triangulaire)

iv) $N(a x) \leq |a| . N(x)$, $\forall a \in IK$, $\forall x \in IE$.

Le couple (IE, N) est un espace vectoriel normé (e. v. n.)

I-3- DISTANCE DE DEUX POINTS x, y ∈ IE

C'est l'application $d : IE \times IE \rightarrow IR^+$

$(x, y) \rightarrow d(x, y) = N(x - y)$

d est une distance sur IE. En effet

Soient $x, y \in IE$ °$d(x, y) \geq 0$ car $N(x - y) \in IR^+$

°$d(x, y) = N(x - y) = |-1| N(x - y)$

$= N(y, x)$

$= d(y, x)$

Soient $x, y, z \in IE$

$d(x, z) = N(x - z) = N(x - y + y - z)$

$\leq N(x - y) + N(y - z) = d(x, y) + d(y, z)$

Soient $x, y \in IE$ tels que $d(x, y) = 0$

$d(x, y) = N((x - y) = 0 \Rightarrow x - y = 0 \Rightarrow x = y$

Conclusion :

$\forall x, y \in IE$ i) $d(x, y) \geq 0$

ii) $d(x, y) = 0 \Rightarrow x = y$

$\forall x, y, z \in IE$ iii) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$

d est effectivement, une distance sur IE et le couple (IE, d) est appelé : espace métrique.

I-4- ESPACE DE BANACH

I-4-1- Suite de Cauchy

Une suite $(x_n)_{n\in IN}$ d'éléments de IE est une suite Cauchy si :

$(\forall \varepsilon > 0)$ $(\exists$ A tel que) $(m \geq A$ et $n \geq A \Rightarrow N(x_m - x_n) \leq \varepsilon$

I-4-2- Espace métrique complet

(IE, d) est un espace métrique complet si toute suite de Cauchy de IE est convergente dans IE.

I-4-3- Espace de Banach

On appelle espace de Banach un espace vectoriel normé qui est complet pour la distance déduite de la norme.

II- APPLICATIONS LINEAIRES CONTINUES

II-1- APPLICATIONS LINEAIRES

II-1-1- Espaces vectoriels topologiques (E.V.T.)

Désignons par τ une famille d'ensembles appelés ouverts ayant les propriétés suivantes :

i- IE $\in \tau$;

ii- $\emptyset \in \tau$;

iii- $\forall\, 0_1, 0_2 \in \tau\ 0_1 \cap 0_2 \in \tau$

iv- $\forall\, 0n \in \tau$, $\cup\, 0_n \in \tau\ n \in IN$

Le couple (IE, τ) est appelé espace vectoriel topologique (e. v. t)

II-1-2- Application linéaire

Soient IE, IF deux espaces vectoriels topologiques (e. v. t.) et f une application : IE $\longrightarrow$ IF.

f est une application linéaire si :

$f(ax + by) = af(x) + b f(y)\ \forall\, a, b \in IK, \forall x, y \in IE$

II-2- APPLICATIONS CONTINUES

Soit f une application linéaire : IE$\rightarrow$ IF

On dit que f est continue en tout point de IE si et seulement si f est continue à l'origine.

Notons par $\mathcal{L}$ (IE, IF) l'ensemble des applications linéaires continues de IE dans IF.

Rappelons que si IF est un espace de Banach alors l'espace vectoriel normé de toutes les applications linéaires continues $\mathcal{L}$ (IE, IF) est un espace de Banach en posant

$$\|f\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|f(x)\|$$

On a la relation fondamentale suivante

$\|f(x)\| \leq \|f\| \; \|x\| \; \forall \; x \in IE$

III- APPLICATIONS DIFFERENTIABLES

Soient IE et IF deux espaces de Banach sur le même corps de base IK

III-1- Définition

Soit U un ouvert de IE, soit a ∈ U. On dit que f et g sont tangentes en a si :

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} \frac{\|f(x) - g(x)\|}{\|x - a\|} = 0$$

III-2- Notations

- $\|f(x) - g(x)\| = 0\,(\|x - a\|)$ au voisinage de a ou 0 désigne le « petit 0 »
- F(x) – g(x) = $\|x - a\|\, \varphi\,(x - a)$ avec lim $\varphi\,(x - a) = 0$

III-3- Définition : application différentiable

Soit U un ouvert de E, soit a ∈ U

On dit que l'application $f : U \to F$ est différentiable en $a \in U$ si i) f est continue en a ii) les applications $x \mapsto f(x) - f(a)$ et x et $x \mapsto u(x - a)$, avec u une application linéaire, sont tangentes en a. On note u = f'(a) et f'(a) est appelée dérivée de f en a.

Une autre écriture de ii) est donnée par : $\|f(x) - f(a) - f'(x)\,(x - a)\| = 0\,(\|x - a\|)$

On va retenu une proportion usuelle :

f est différentiable en a si f'(a) existe et f'(a) ∈ $\mathcal{L}$ (IE, IF)

Chapitre II : EQUATIONS DIFFERENTIELLES

I. Définition

Soient $\mathbb{E}$ un espace de Banach et $U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{E}$

$f : U \longrightarrow \mathbb{E}$ application continue

$\frac{dx}{dt} = f(t\,, x)$ (1) est une équation différentielle

L'application $\varphi : I \longrightarrow \mathbb{E}$ de classe φ^1, avec I un intervalle de $\mathbb{R}$ est une solution de l'équation différentielle (1) ayant les propriétés suivantes :

i. $\big(t\,, \varphi(t)\big) \in U$ pour tout $t \in I$

ii. $\varphi'(t) = f\big(t\,, \varphi(t)\big)$ pour tout $t \in I$

Remarquons qu'on peut supposer seulement φ différentiable, φ est alors automatiquement de classe φ^1

Si $\mathbb{E} = \mathbb{E}_1 \text{ x } \ldots\ldots \text{x } \mathbb{E}_\text{n}$ un espace de Banach.

$U \subset \mathbb{R} \text{ x } \mathbb{E}_1 \text{ x } \ldots\ldots \text{x } \mathbb{E}_\text{n}$

$(t\,, x_1, \ldots, x_n) \longmapsto f(t\,, x_1, \ldots, x_n) \in \prod_{i=1}^{n} E_i$ [2]

Cette application est détermine par n fonctions $f_1, f_2\,, \ldots, f_n$ définie sur U. Une solution φ de (1) est alors définie par n fonctions φ_i ; $i \in [1\,, n]$ de classe φ^1ayant les propriétés suivantes :

$\varphi_i : I \longrightarrow E_i \quad ; 1 \leq i \leq n$

i. $\big(t\,, \varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t)\big) \in U\,, \forall\, t \in I$

ii. $\varphi'_i(t) = f_i\big(t\,, \varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t)\big) \;\; ; 1 \leq i \leq n$

On obtient alors un système d'équations différentielles

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(t\,, x_1, \ldots . x_n)\ ;\ 1 \leq i \leq n$$

[2] $\prod_{i=1}^{n} E_i = E_1 x\ E_2\ x \ldots\ldots x\ E_n$

II. EQUATIONS DIFFERENTIELLES LINEAIRES DU PREMIER ORDRE

II.1. Définition

Une équation différentielle linéaire du premier ordre est de la forme :

$$\frac{dx}{dt} = a(t).x + b(t)$$

Avec $a : I \longrightarrow \mathfrak{X}(\mathbb{E}, \mathbb{E})$[3] $\quad et \;\; a : I \longrightarrow \mathbb{E}$ continues sur l'intervalle $I \in \mathbb{R}$

On a :

II.2. Solution de l'équation différentielle :

$$\frac{dx}{dt} = a(t).x \qquad (2)$$

Notons $r(t, t_0)$. la solution de l'équation différentielle

$\frac{dr}{dt} = a(t).r(t)$. La solution de l'équation différentielle

$\frac{dx}{dt} = a(t).x$ qui prend la valeur x_0 pour $t = t_0$ est égale à

$r(t, t_0).x_0$. avec $r(t, t_0)$ une solution de (2)

telle que $(t_0, t_0) = \mathfrak{Y}_E$[4] . En effet posons $x(t) = r(t_1, t_0).x_0$

$$\frac{dx}{dt} = r'(t_1, t_0).x_0 = a(t).r(t, t_0).x_0$$

$= a(t).x(t)$ d'une part

D'autre part $x(t_0) = r(t_0, t_0).x = \mathfrak{Y}_E.x_0 = x_0$

$r(t, t_0)$ s'appelle la résolvante (ou le noyau résolvant) de (2)

[3] Ensemble des applications linéaires continues

[4] $\mathfrak{Y}_E : Id_E$:Application identique

III. EQUATIONS DIFFERENTIELLES LINIAIRES AVEC SECOND MEMBRE

C'est l'équation différentielle linéaire de la forme :

(3) $\frac{dx}{dt} = a(t\ ).x + b(t)$

III.1. Méthode de variation de la constante

Soient t , $t_0 , t_1 \ \in \ I$. Posons $x(t) = r\ (t\ , t_0)$. Y(t) (4) à la relation suivante :

$r\ (t\ , t_0) = r^{'}\ (t_1\ , t_0)\ \ or\ \ (t_1\ , t_0)$

En effet, posons $s(t) = r\ (t\ , t_0)\ \ or\ \ (t_1\ , t_0)$

On a $s^{'}(t) = r\ (t\ , t_0)\ \ or\ \ (t_1\ , t_0)$

$=\ a(t\ )\ o\ [r(t\ , t_1)\ o\ r\ (t_1\ , t_0)] = a(t\ )\ o\ s(t)$

Donc $s(t)$ est la solution de $\frac{dr}{dt} =\ a(t\ )\ o\ r$ (4) qui prend pour $t =\ t_1$ la valeur $r(t\ , t_1)\ o\ r\ (t_1\ , t_0) =\ \mathfrak{Y}_E\ o\ r\ (t_1\ , t_0)$

$=\ r\ (t_1\ , t_0)$

Mais $r\ (t\ , t_0)$ est la solution de (4) prenant la valeur $r\ (t_1\ , t_0)$ pour $t =\ t_1$ donc $r\ (t\ , t_0) =\ r\ (t\ , t_1)\ o\ \ r\ (t_1\ , t_0)$

Comme $r\ (t\ , t_0)\ o\ \ r\ (t_0\ , t) = r\ (t\ , t\ ) = \mathfrak{Y}_E$

$r\ (t_0\ , t)\ o\ r\ (t\ , t_0)\ \ =\ \ r\ (t_0\ , t_0\ ) = \mathfrak{Y}_E$

On en déduit que $r\ (t\ , t_0) \in Isom\ (\mathbb{E}\ ; \mathbb{E}\ )$ [5] et

$r\ (t\ , t_0)^{-1} = r\ (t_0\ , t)$

[5] Ensemble des applications linéaires bijectives de $\mathbb{E}$ sur $\mathbb{E}$

A propos de la méthode de variation de la constante, posons $x(t) = r\,(t\,,t_0)\,.y(t)$

et prenons comme inconnue $y(t)$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dr}{dt}\,y + r\frac{dy}{dt}$$

$$= a(t).r\,(t\,,t_0)\,.y + r\frac{dy}{dt}$$

$$= a(t).x\,(t\,)\,+ r\frac{dy}{dt}$$

Donc $b(t) = r\,(t\,,t_0)\frac{dy}{dt}$

$\frac{dy}{dt} = r\,(t\,,t_0)$. b(t)

($r\,(t\,,t_0) = r\,(t\,,t_0)^{-1}$) est la nouvelle équation à résoudre.

Soit $x_0 = x(t_o) = r\,(t_o\,,t_0)\,.y(t_0) = y(t_0)$.

Donc $y(t) = x_0 + \int_{t_o}^{t} r\,(t\,,t_0)\,b(\tau)d\tau$

$$x(t) = r\,(t\,,t_0)\,.y(t)$$

$$= r\,(t\,,t_0)\,.x_0 + \int_{t_o}^{t} r\,(t\,,t_0)\,b(\tau)d\tau$$

est la solution générale de $\frac{dx}{dt} = a(t).x + b(t)$ *(4)*

passant par $(t_o\,,x_0)$. Elle n'est autre que la solution générale de $\frac{dx}{dt} = a(t).x$ passant par $(t_o\,,x_0)$ ajoutée de la solution particulière de *(4)* s'annulant pour $t = t_0$

IV. EQUATION DIFFERENTIELLE LINEAIRE A COEFFICIENTS CONSTANTES

L'application $a : \mathrm{I} \longrightarrow \mathcal{L}\,(\mathbb{E}\,;\mathbb{E}\,)$[6]

$$\frac{dx}{dt} = ax + b(t)$$

$\frac{dx}{dt} = ax$ On prend $\mathrm{I} = \mathbb{R}$

Comme $Exp\ a = \sum_{n\geq 0} \frac{a^n}{n!}$ avec $a^0 = \mathfrak{Y}_E$

Notons $r\,(t\,,o) = r(t)$ la résolvante telle que $r(0) = \mathfrak{Y}_E$

On a $r(t) = Exp\ a$. En effet posons $s(t) = Exp\ ta$

$s^{'}(t) = \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!}\ t^n . a^{n+1}. = a. \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!}\ t^n . a^n.$ [7]

$$= \left(\sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!}\ t^n . a^n \right) . a = a\ . s(t)$$

d'où la solution générale

$$x(t) = [Exp\ (t - t_0)a]. x_0 + \int_{t_0}^{t} [Exp\ (t - \tau)\ a]\ b(\tau)d\tau$$

V. RÉSOLUTION PRATIQUE D'UNE EQUATION DIFFERENTIELLE

V.1. Définition intuitive

Une équation différentielle est définie pratiquement par une relation entre une fonction, certaines de ses dérivées et la variable, c'est-à-dire $f\,(x\,,y\,,y'\,,y'') = 0$ [8]

---

[6] $a : \mathrm{I} \longrightarrow \mathcal{L}\,(\mathbb{E}\,;\mathbb{E}\,)$

$a(t) \longmapsto a(t)\alpha$ est une application linéaire en α de $\mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{E},\ t \longmapsto a(t)$

[7] On tient compte de $0! = 1$

[8] Par extension on peut avoir :

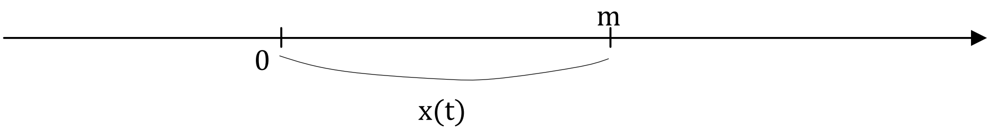
$f\,(x\,,y\,,y'\,,y'') = 0$

Où $x \longrightarrow y$ est une fonction de la variable réelle x

et $x \longrightarrow y^n$ sa dérivée d'ordre n

V.2. Exemple concret en mécanique

Un mobile de masse *m* se déplace sur un axe



Désignons par *x* l'abscisse de *m* au point *t* et v_o sa vitesse initiale.

A l'instant $t = 0$ sa position $x_o = 0$, Supposons qu'à chaque instant *t* le mobile est soumis à deux forces :

i. $f_1(t) = -k_1 x'(t)$ avec $k_1 > 0$;

ii. $f_2(t) = -k_2 x'(t)$ avec $k_2 > 0$;

Essayons de déterminer la fonction $x(t)$ en fonction du temps *t*

En appliquant le principe fondamental de la dynamique :

$$\sum \vec{F} = m\vec{\gamma} \text{ ; en projetant sur l'axe (Ox)}$$

On obtient : $-k_1 x'(t) - k_2 x'(t) = mx''(t)$

C'est-à-dire $mx''(t) + k_1 x'(t) + k_2 x'(t) = 0$ (1)

C'est bien une équation différentielle avec

$$f(t, x, x', x'') = \mathrm{m}x(t) + k_1 x'(t) + k_2 x'(t)$$

Et (1) signifie $f(t, x, x', x'') = 0$

V.3. Cas particuliers d'équations différentielles

C$_1$. Équation différentielles linéaires du premier ordre de la forme : $\boldsymbol{a(x)y' + b(x)y = C(x)}$ (1)

où *a, b, c* sont 3 fonctions numériques définies sur un même intervalle *I*. on supposera que pour tout *x* élément de *I*, $a(x) \neq 0$

C$_2$. Équation différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants de la forme : $\boldsymbol{ay'' + by' + Cy = f(x)}$

où *a, b, c* sont des constantes ; $a \neq 0$

$\boldsymbol{f}$ étant la fonction numérique définie sur un intervalle. Dans tout ce qui suit, on supposera $a(x), b(x), C(x)$ et $f(x)$ soient des fonctions continues.

V.3.1. Détermination de toutes les solutions de l'équation (1)

1er Cas $C(x) = 0$ (second membre)

(1) dévient :

$a(x)y' + b(x)y = 0$

Désignons par *E* l'ensemble de solution. On peut dire que *E* est non vide car la fonction nulle est une solution.

E est un espace vectoriel sur *IR* de dimension 1, si f et g sont des éléments de *E*, $\lambda f + \mu g$ est aussi un élément de E avec λ et μ des scalaires.

En effet si on a :

$\lambda a(x)f'(x) + \lambda\, b(x)f(x) = 0$

$\mu a(x)g'(x) + \mu\, b(x)g(x) = 0$

alors $a(x)\left[\lambda f'(x) + \mu g'(x)\right] + b(x)[\lambda + \mu\, g(x)] = 0$

posons $h(x) = \lambda\, f(x) + \mu\, g(x)$, on a :

$a(x)h'^{(x)} + b(x)h(x) = 0$

Remarquons que tout autre solution f_1 est telle que

$f = \lambda f_1 \quad (dim_{IR}E = 1)$

Détermination de la solution

$a(x)y' + b(x)y = 0$ (2)

(2) $\Leftrightarrow \quad y' = -\frac{b(x)}{a(x)}\, y$

On va déterminer les solutions non nulles *ie* pour tout *x* de *I*, $y(x) \neq 0$

$\Leftrightarrow \quad \frac{y'}{y} = -\frac{b(x)}{a(x)}$

$\Leftrightarrow \quad (\ln |y|)' = -\frac{b(x)}{a(x)}$ (*ln* : logarithme népérien)

$\Leftrightarrow \quad \ln |y| = \int -\frac{b(x)}{a(x)}\, dx$

Soit $s(x)$ une primitive de $-\frac{b(x)}{a(x)}$

La continuité est nécessaire pour l'existence de $s(x)$

$= s(x) + k$

$\ln |y| = s(x) + k$

$\Leftrightarrow \quad |y| = e^{s(x)+k}$

$\Leftrightarrow \quad |y| = e^{k} \,.\, e^{s(x)} \qquad (k' = e^{k})$

$|y| = k'.e^{s(x)} \qquad k' > 0$

Remarquons que *y* est, pour tout *x* élément de *I* soit toujours négative, soit toujours positive

En effet, *y* est une fonction continue par définition même car elle est dérivable. De plus on a fait l'hypothèse que y(x) est non nulle, elle garde donc un signe constant du fait du théorème des valeurs intermédiaires donc :

Ou bien $\quad y = k'.e^{s(x)} \qquad k' > 0$

Ou bien $\quad y = -k'.e^{s(x)} \qquad k' > 0$

On peut vérifier que ces solutions sont les solutions de l'équation différentielle considérée.

Les solutions non nulles sont :

$y = \alpha.e^{s(x)} \quad \alpha > 0$

Existe-t-il d'autres solutions *ie* des solutions autres que la solution nulle ou des solutions qui ne s'annulent jamais ?

Soit *y* une solution quelconque de l'équation considérée

Considérons l'équation : $f_1(x) = e^{s(x)}$ est solution de l'équation différentielle.

Posons $\frac{y}{f_1} = \mathrm{Z} \qquad ; f_1 \not\equiv 0$

On a $\quad y = f_1\,\mathrm{Z}$

$y' = f'_1\,\mathrm{Z} + f_1\,\mathrm{Z}'$

D'autre part on sait que : $a(x)y' + b(x)y = 0$

$a(x)\left(f'_1\,\mathrm{Z} + f_1\,\mathrm{Z}'\right) + b(x)f_1\,\mathrm{Z} = 0$

$Z\left(a(x)f'_1 + b(x)f_1\right) + a(x)f_1\,\mathrm{Z}' = 0$

$a(x)f'_1 + b(x)f_1 = 0$ car f_1 est une solution

donc pour tout x élément de I $\qquad a(x)f_1\,Z' = 0$

comme $a(x) \neq 0$; $f_1 \neq 0$

$f_1\,Z' = 0$ entraine que $Z' = 0$ d'où $\mathrm{Z} = \lambda$ et $y = \lambda f_1$

Toutes les solutions de l'équation différentielle sont donc de la forme $y = \lambda f_1$

L'ensemble des solutions de l'équation différentielle

$a(x)y' + b(x)y = 0$ est

λf_1 , $\lambda . e^{s(x)} = \lambda\, e^{-\int \frac{b(x)}{a(x)} dx}$

Il en résulte que si une solution s'annule en un point, elle est identiquement nulle.

ie $\lambda = 0$ *dès que* $\lambda . e^{s(x)} = 0$

À part la solution nulle on est sûr que toute autre solution ne s'annule jamais.

Il résulte de ce qui vient d'être démontré que l'ensemble de solution est un espace vectoriel de dimension 1, une base est constituée par la solution f_1

VI. 3.2. __Exemple__ : Résolution de l'équation différentielle : $(\mathbf{1} + \boldsymbol{x^2})\boldsymbol{y}' + \boldsymbol{x^3 y} = \mathbf{0}$

Toutes les solutions sont données par :

$\boldsymbol{y = \lambda\, e^{-\int \frac{b(x)}{a(x)} dx}}$

On voit que $a(x) = 1 + x^2 \neq 0$ pour tout s de $\mathbb{R}$ et $b(x) = x^3$

On est alors dans l'application du théorème qui vient d'être démontré

$\int \frac{b(x)}{a(x)} \mathrm{d}\, x = \int \frac{x^3}{x^2 + 1} \mathrm{dx}$

Or $x^3 = (x^2 + 1)x - x$

Donc $\int \frac{x^3}{x^2+1} \mathrm{dx} = \int [\frac{(x^2+1)x}{x^2+1} - \frac{x}{x^2+1}]\ \mathrm{dx}$

$$= \int x\, dx - \int \frac{xdx}{x^2 + 1}$$

$$= \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1)$$

d'où $y = \lambda\, e^{-\frac{1}{2}\ln(x^2+1) - \frac{x^2}{2}}$

$$y = \lambda \sqrt{x^2 + 1}\, e^{-\frac{x^2}{2}}$$

VI. 4. __Cas général__

$a(x)y' + b(x)y = c(x)$ (2)

VI. 4. 1. Etude de la structure de l'ensemble des solutions

Supposons que $\boldsymbol{y}$ est une solution quelconque

Et $\boldsymbol{y_s}$ une solution particulière

On a : $\boldsymbol{a(x)y'_1 + b(x)y_1 = c(x)}$

$$\boldsymbol{a(x)[y' - y'_1] + b(x)[y - y_1] = 0}$$

$$\boldsymbol{a(x)[y - y_1]' + b(x)[y - y_1] = 0}$$

Donc la fonction $\boldsymbol{y - y_1}$est la solution de l'équation différentielle que l'on notera

$\boldsymbol{a(x)y' + b(x)y = 0}$ (3)

L'équation (3) s'appelle équation sans second membre de l'équation différentielle (2)

En résumé on a : $\boldsymbol{y - y_1 = Y}$ $\quad$ $\boldsymbol{ie}$ $\quad$ $\boldsymbol{y = y_1 + Y}$

Où Y est une solution de l'équation (3)

Toute solution de l'équation (2) s'obtient en ajoutant aux solutions de (3) une solution particulière.

Désignons par E l'ensemble des solutions de (2)

E n'est pas un espace vectoriel (sinon il contient 0) $C(x) \neq 0$

On se donne $\mathbb{F}$ ensemble des solutions de (3) et y_1 solution particulière

Pour tout y appartenant à , il existe Y élément de $\mathbb{F}$ telle que $y = y_1 + Y$

Réciproquement si Z est une solution quelconque de (3) alors $z = y_1 + Z$ est une solution de (2)

Autrement dit :

Pour tout Z élément de $\mathbb{F}$: $y_1 + Z$ est élément de $\mathbb{E}$

En résumé on a le théorème suivant :

VI. 4. 2. Théorème

L'ensemble des solutions de l'équation (2) est l'ensemble de fonction y de la forme :

$$y = y_1 + Y$$

Où Y est une solution quelconque de l'équation (3) *ie* de l'équation sans second membre (e.s.s.m.) associée à l'équation différentielle (2)

VI. 4. 3. Exemple : Résolution de l'équation différentielle :

$y' + y = x$ (1)

$y_1 = ax + b$; $y_1' = a$

$a + ax + b = x$

$ax + (a + b) = x$ pour tout x

$a = 1$

$a + b = 0$ d'où $b = -1$

$y_1 = x - 1$ est une solution particulière de l'équation $Y' + Y = 0$ (2)

$ax = 1$; $bx = 1$

$\int -\frac{b(x)}{a(x)} dx = -x$

λe^{-x} est une solution générale de (2).

Par suite $y = (x - 1) + \lambda e^{-x}$ est une solution générale de (1)

L'ensemble des solutions moyennant les conditions de départ n'est pas vide.

VI. 5. Méthode de recherche de solutions particulières dans des cas particuliers

$\boldsymbol{a(x)y' + b(x)y = c(x)}$

$\boldsymbol{a(x) = a \neq 0;}$ $\boldsymbol{b(x) = b}$

Donc $\boldsymbol{aY' + bY = 0}$

En général

- ✓ Cas usuel : $C(x) = \boldsymbol{e^{s(x)} P(x)}$

Où *s* élément de $\mathbb{R}$ et $\boldsymbol{P(x)}$ un polynôme

- ✓ Autres cas usuels :

$C(x) = \boldsymbol{\cos \alpha x}$ ou $C(x) = \boldsymbol{\sin \alpha x}$

On a donc à résoudre :

VI. 5. 1. $\boldsymbol{ay' + by = e^{s(x)} p(x)}$

s élément de $\boldsymbol{IR}$

$\boldsymbol{P}$ un polynôme de degré n, élément de $\mathbb{N}$

La solution générale de l'équation sans second membre est : $Y = \lambda e^{-\frac{b}{a}x}$

Remarquons que $Y = \lambda e^{-\frac{b}{a}x} = \lambda e^{rx} (r = -\frac{b}{a})$

$r$est la racine de l'équation : $au + b = \mathbf{0}$

appelée équation caractéristique de (2)

Tandis que la solution particulière est :

$y_1 = \boldsymbol{e^{s(x)}Q(x)}$

Elle doit vérifier donc :

$ay'_1 + by_1 = \boldsymbol{e^{s(x)}P(x)}$

$y'_1 = s\boldsymbol{e^{s(x)}Q(x) + e^{s(x)}Q'(x)}$

$$ay'_1 + by_1 = \boldsymbol{ae^{s(x)}\left[sQ(x) + Q'(x)\right] + be^{s(x)}Q(x) = e^{s(x)}P(x)}$$

alors $\boldsymbol{a\left[sQ(x) + Q'(x)\right] + bQ(x) = Q(x)[as + b] + aQ'(x) = P(x)}$ (4)

Il y a deux cas à envisager :

- ✓ $\boldsymbol{as + b \neq 0}$ **é**quivalent à $\boldsymbol{s}$ n(est pas racine de l'équation caractéristique :
  $au + b = \mathbf{0}$ degré de $Q = n = degré\ de\ P$
- ✓ $\boldsymbol{as + b = 0}$ ***i.e.*** $\boldsymbol{s}$ racine de l'équation caractéristique : on a $\boldsymbol{aQ'(x) = P(x)}$alors dégré de $\boldsymbol{Q}$ est égale à n+1 et $\boldsymbol{Q(x) = \int \frac{P(x)}{a} dx}$

Revenons maintenant au premier cas :

$\boldsymbol{as + b \neq 0}$

Pour déterminer $\boldsymbol{Q}$ on procède par identification [9]

$$\boldsymbol{Q(x) = q_n x^n + q_{n-1}x^{n-1} + \dots\dots + q_p}$$

On remplace $\boldsymbol{Q(x)}$et $\boldsymbol{Q'(x)}$ par ses expressions dans (4) et on identifie:

VI. 5. 2. <u>Exemples : Résolution de l'équation différentielle avec second membres $\boldsymbol{y' + y = e^x(x^2 + x + 1)}$)</u>

$\boldsymbol{s = 1}$ $\boldsymbol{r = -1}$ $\boldsymbol{s \neq r}$

$\boldsymbol{Q(x) = q_2x^2 + q_1x + q_0}$

$\boldsymbol{Q'(x) = 2q_2x + q_1}$

$\boldsymbol{y'_1 = se^{sx} + Q(x) + e^{sx}Q'(x)}$

$\boldsymbol{as + b = 2}$

$\boldsymbol{2(\, q_2x^2 + q_1x + q_0) + 2q_2x + q_1 = x^2 + x + 1}$

D'après l'équation (4)

---

[9] il s'agit de déterminer les coefficients q_k ; $k = 0, \dots, n$ en remarquant que $Q'(x) = nq_n\, x^{n-1} + \dots . + q_1$

$2q_2x^2 + 2(q_1 + q_2)x + 2q_0 + q_1 = x^2 + x + 1$

$2q_2 = 1$ entraine que $q_2 = \frac{1}{2}$

$2(q_1 + q_2) = 1$ alors $q_1 = \frac{1}{2} - \frac{2q_2}{2}$

$2q_0 + q_1 = 1$ alors $q_0 = \frac{1-q_1}{2}$

$q_1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$ **et** $q_0 = \frac{1}{2}$

$Q(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x$

- Solution particulière : $y_1 = e^x Q(x)$
$$= \frac{1}{2}e^x(x^2 + 1)$$

- La solution générale va être :

$y = \frac{1}{2}e^x(x^2 + 1) + \lambda e^{-x}$

VI. 5. 3. Résolution de l'équation différentielle du 1er ordre avec second membre : $ay' + by = k_1\cos\alpha x + k_2\sin\alpha x$

On cherche une solution de la forme :

$y_1 = q_1\cos\alpha x + q_2\sin\alpha x$

$y'_1 = -\alpha q_1\sin\alpha x + \alpha q_2\cos\alpha x$

$\alpha\,[-\alpha q_1\sin\alpha x + \alpha q_2\cos\alpha x\,] + b[q_1\cos\alpha x + q_2\sin\alpha x\,] = 0$

$a\alpha q_2\cos\alpha x + bq_1\cos\alpha x - a\alpha q_1\sin\alpha x + bq_2\sin\alpha x =$

$(a\alpha q_2 + bq_1)\cos\alpha x + (a\alpha q_1 + bq_2)\sin\alpha x =$

$k_1\cos\alpha x + k_2\sin\alpha x$

avec $\begin{cases} a\alpha q_2 + bq_1 = k_1 \\ a\alpha q_1 + bq_2 = k_2 \end{cases}$

Supposons qu'on a :

$ay' + by = k_1\cos\alpha x + k_2\sin\beta x$

VI. 5. 4. Remarque générale

Lorsqu'on a :

$\mathbf{a}y' + \boldsymbol{by} = \boldsymbol{C_1}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{C_2}(\boldsymbol{x})$ **(3),** on obtient une solution particulière en déterminant les solutions particulières des équations différentielles suivantes :

$\boldsymbol{ay}' + \boldsymbol{by} = \boldsymbol{C_1}\,(\boldsymbol{x})$ **(1)**

$\boldsymbol{ay}' + \boldsymbol{by} = \boldsymbol{C_2}\,(\boldsymbol{x})$ **(2)**

Et on ajoute les solutions particulières obtenues

Si f_1 est la solution particulière de (1) et si f_2 celle de (2)

Alors $f_3 = f_1 + f_2$ est une solution de (3)

Donc :

$\boldsymbol{ay}' + \boldsymbol{by} = \boldsymbol{k_1 cos\ \alpha x}$

$\boldsymbol{ay}' + \boldsymbol{by} = \ \boldsymbol{k_2\, sin\ \beta x}$

Cette méthode permet en particulier de résoudre l'équation : $\boldsymbol{ay}' + \boldsymbol{by} = \ \boldsymbol{e^x\, x^2} + \boldsymbol{sin\ 3x}$

VI. 6. Equations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants

$ay" + by' + cy = f(x)$ (1)

Où *a, b* et *c* sont des constantes réelles avec *a ≠ 0*

$f\,:I \longrightarrow\ \mathbb{R}$ continue

1er cas : $f(x)\ \equiv 0$

$ay" + by' + cy = 0$

Désignons par $\mathbb{E}$ l'ensemble des solutions de (1)

$\mathbb{E}$ est un espace vectoriel sur IR. On admettre que IE est de dimension 2.

VI. 6. 1. Détermination d'une base de IE

On cherche les solutions de la forme $y = \ e^{rx}$

$x\ \rightarrow e^{rx}$; $r\ \in IR$

Tout revient à déterminer le nombre réel *r*

$y' = re^{rx}$; $y'' = r^2e^{rx}$

(1) dévient

$a.r^2e^{rx} + bre^{rx} + ce^{rx} = 0$

Equivaut à : $a.r^2 + br + c = 0$

C'est l'équation caractéristique de l'équation différentielle (1')

$a.r^2 + br + c$ est le polynôme caractéristique

VI. 6. 2. Etude de $ar^2 + br + c = 0$

1^er Cas Δ positif avec $\mathbf{\Delta = b^2 - 4ac}$

On a deux racines r_1 et r_2

e^{r_1x} et e^{r_2x} sont des solutions de (1)

Montrons que e^{r_1x} et e^{r_2x} forment une base de IE

Comme $dim_{IR}\ IE = 2$, il suffit de démontrer que e^{r_1x} et e^{r_2x} sont linéairement indépendants

Posons $f_1 = e^{r_1x}$ et $f_2 = e^{r_2x}$

Pour tout réels λ et μ

$\lambda = \mu = 0$ dès que $\lambda f_1 + \mu f_2 = 0$

$$\lambda e^{r_1x} + \mu e^{r_2x} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda + \mu = 0 \ \ pour\ x = 0 \\ \\ \lambda e^{r_1} + \mu e^{r_2} = 0\ pour\ x = 1 \end{cases}$$

$\lambda = -\mu$

$\lambda e^{r_1} + \mu e^{r_2} = 0$ entraîne que : $\lambda\ (e^{r_1} - e^{r_2}) = 0$

r_1 étant différent de r_2 donc $e^{r_1} \neq e^{r_2}$

Et par suite $e^{r_1} - e^{r_2} \neq 0$

On en déduit que $\lambda = 0$

A cause de $\lambda + \mu = 0$ on a $\mu = 0$

On vient de montrer qu'effectivement e^{r_1x} et e^{r_2x} forment une base

L'ensemble des solutions de (1') est donc donné par :$\{y = \lambda e^{r_1x} + \mu e^{r_2x}\ ;\ \lambda , \mu \in IR$

2^ème Cas $\Delta = 0$

Soit *s* la racine double de l'équation

$f_\alpha(x) = e^{sx}$ est une solution de (1')

Montrons que la fonction

$f'_\alpha(x) = xe^{sx} \ = xf_\alpha(x)$ est également une solution de (1')

$f'_2(x) = e^{sx} + \ se^{sx} = e^{sx}\ (s + sx)$

$f''_2(x) = se^{sx} + s(1 + sx)e^{sx} = e^{sx}\ (2s + s^2x)$

Comme $ay" + by' + cy = 0$ on a :

$e^{sx}\ [a(2s + s^2) + b(1 + sx) + cx] =$

$e^{sx}\ [(as^2 + bs + c)x + 2as + b] = \ 0$

Car $(as^2 + bs + c = 0$ et $2as + b$ $(\mathbf{\Delta = 0})$

On a donc prouvé que $f_2(x)$ est une solution

Par suite on a deux solutions

$f_1(x) = e^{sx}$ et $f_2(x) = xe^{sx}$

$\lambda f_1 + \ \mu f_2 = 0$ ou $\lambda e^{sx} + \mu xe^{sx} = 0$

Pour tout nombre réel *x*

Pour $x\ =\ 0$ on a $\lambda = 0$

Pour $x\ =\ 1$ $\lambda e^{sx} + \mu e^0 = 0$ entraine $\mu = 0$

L'ensemble des solutions est donc :

$$\{y = \ \lambda e^{sx} + \mu xe^{sx} = e^{sx}(\mu x + \lambda);\ \mu, \lambda\ \in IR\}$$

<u>3ème Cas Δ < 0</u>

Comme *a*, *b* et *c* étant des réels, on a deux racines complexes conjuguées

$r_1 = \ \alpha + i\beta$

$r_2 = \ \alpha - i\beta$

$\alpha\ et\ \beta$ des réels

On vérifie que :

$f_1(x) = e^{\alpha x}cos\beta x$ et $f_2(x) = e^{\alpha x}sin\beta x$ sont des solutions de (1')

Reste à savoir si elles sont linéairement indépendantes

$0 = \lambda f_1(x) \ \ +\ \mu f_2(x) = e^{\alpha x}[\lambda\cos(\beta x) + \mu\sin\,(\beta x)]$

Pour $x\ =\ 0$ on a $\lambda = 0$

$\mu e^{\alpha x}\sin\,(\beta x) = \ 0$

Or β est différent de zéro sinon **Δ** ne serait pas négatif

$\sin\,(\beta x) \neq\ 0$; $e^{\alpha x} \neq 0$ donc $\mu = 0$

par conséquent on a une base de IE

L'ensemble des solutions est donc :

$$\{y = e^{\alpha x}(\lambda \cos \beta x + \mu \sin \beta x)\}$$

VI. 6. 3. Exemple : Résolution de l'équation différentielle du second ordre

$$\boldsymbol{y'' + w^2 y = 0 \qquad w \neq 0}$$

L'équation caractéristique est $\boldsymbol{r^2 + w^2 y = 0}$

Les racines sont :

$r_1 = iw$

$r_2 = -iw$

Donc la partie réelle de r_1, α est égale à zéro et $\beta = w$

Donc $\quad y = e^0(\lambda \cos wx + \mu \sin wx)$

$\qquad y = \lambda \cos wx + \mu \sin wx$

VI. 7. Cas général :

Désignons par $\mathbb{F}$ l'ensemble de solutions de (1)

$\mathbb{F} \neq 0$ et on va étudier sa structure

Soit y_1 une solution particulière de (1)

on a $ay''_1 + by'_1 + cy_1 = f(x)$ (2)

En soustrayant membre à membre (1) et (2)

on obtient

$a(y'' - y''_1) + b(y' - y'_1) + (y - y_1)C = 0$

Posons $Y = y - y_1$

on obtient : $aY'' + bY' + CY = 0$ (3)

On peut dire que Y est une solution de l'équation sans second membre associée à l'équation (1)

Par un raisonnement analogue à celui déjà fait pour le 1er ordre, l'ensemble de solution de (1) est $y = Y + y_1$

Où $\quad y_1$ est la solution particulière de (1)

Et Y une solution quelconque de (3)

VI. 8. Détermination d'une solution particulière dans certains cas particuliers

Si $f(x) = e^{kx} P(x)$ k élément de IR

P polynôme de degré $n \in IN$

Cherchons une solution particulière de la forme :

$y_1 = e^{kx} Q(x)$ Calculons ses dérivées premières et secondes y'_1 et y''_1

On a

$y'_1 = ke^{kx} Q(x) + e^{kx} Q(x)$

$y''_1 = x^2 e^{kx} Q(x) + ke^{kx} Q'^{(x)} + ke^{kx} Q'(x) + e^{kx} Q''(x)$

$y'_1 = e^{kx} \; [kQ(x) + Q'(x)]$

$y''_1 = e^{kx}[k^2 Q(x) + 2k\, Q'^{(x)} + Q''(x)\,]$

On a :

$a[k^2 Q(x) + 2k\, Q'^{(x)} + Q''(x)\,] + b[kQ(x) + Q'(x)] + cQ(x)) = P(x)$

On a :

$(ak^2 + bk + c)Q(x) + (2ak + b)Q'(x) + aQ''(x) + aQ''(x) = \mathrm{P(x)}$ $\qquad a \neq 0$

Distinguons 2 cas :

1er Cas :

i. Si k n'est pas racine de l'équation caractéristique, dans ce cas on cherche un polynôme *Q* de degré, tel que degré de *Q* est égale à degré de *P* = *n*

ii. Si k est racine simple de l'équation caractéristique

   On a $(2ak + b)Q'(x) + aQ''(x) = \mathrm{P(x)}$

   Et $d°Q = 1 + d°P$

2ème Cas :

Si k est racine double de l'équation caractéristique

On a $d°Q = 2 + d°P$

VI. 8. 1. Exemple : Résolution de l'équation différentielle du second ordre avec second membre $y'' + y' = x$

1) **Solution générale e.s.s.m.**[10] $\boldsymbol{y'' + y' = 0}$

L'équation caractéristique associé est :

$\boldsymbol{r^2 + r = 0}$ d'où $\boldsymbol{r_1 = 0}$ et $\boldsymbol{r_2 = -1}$

Donc $Y = \lambda e^{r_1 x} + \mu e^{r_2 x}$

$Y = \lambda + \mu e^{-x}$

2) **Solution particulière**

$\boldsymbol{y'' + y' = x = e^{kx}.P(x)}$ pour $\boldsymbol{k = 0}$ et $\boldsymbol{P(x) = x}$

$\boldsymbol{e^{kx} Q(x) = P(x)}$

On constate que *k* est une racine simple de l'équation caractéristique par conséquent :

$$d°Q = 1 + d°P$$

Et donc $d°Q = 2$

$\boldsymbol{Q(x) = a_1 x^2 + b_1 x + C_1}$

$\boldsymbol{Q'(x) = 2a_1 x + b_1}$

$\boldsymbol{Q''(x) = 2a_1}$

$\boldsymbol{2a_1 + (2a_1 x + b_1)} = x \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{2a_1 + 2a_1 x + b_1} = x$

On en déduit par identification :

$\boldsymbol{2a_1 = 1} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{a_1 = \frac{1}{2}}$

$\boldsymbol{2a_1 + b_1 = 0} \quad \boldsymbol{b_1 = -2a_1}$ **d'où** $\boldsymbol{b_1 = -1}$

Donc $\boldsymbol{Q(x) = \frac{1}{2} x^2 - x}$

La solution générale est donc :

$$Y = \frac{1}{2} x^2 - x + \lambda + \mu e^{x}$$

[10] Equation sans second membre

VI. 8. 2. Le problème de Cauchy :

Déterminer les solutions de l'équation différentielle qui vérifie certaines conditions initiales du type suivant :

a) Si l'équation est du premier ordre, on cherche les solutions pour $y(x_0) = \alpha$ $x_0 \; et \; \alpha$ étant des réels

b) Si l'équation est du second ordre, on cherche les solutions pour $y(x_0) = \alpha$ et $y'(x_0) = \beta$ où $x_0, \beta \; et \; \alpha$ sont des réels donnés

On peut démontrer que le problème de Cauchy admet une solution unique.

VI. 8. 2.1. Exemple : Résolution de l'équation différentielle du 2nd degré sans second membre : $\boldsymbol{ay" + by + c = 0}$

Supposons que le polynôme caractéristique admet 2 racines distinctes réelles

Par conséquent l'ensemble de solution est :

$$\boldsymbol{y = \lambda e^{r_1 x} + \mu e^{r_2 x}}$$

Prénoms comme cas particulier $x_0 = 0$

$$\alpha = y(0) = \lambda + \mu$$

$$y' = \lambda r_1 e^{r_1 x} + \mu r_2 e^{r_2 x}$$

$$\beta = y'(0) = r_1 \lambda + r_2 \mu$$

On a $\begin{cases} \lambda + \mu = \alpha \\ \\ r_1 \lambda + r_2 \mu = \beta \end{cases}$ (I)

Ce système d'équation à deux inconnus admet comme déterminant principal :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ r_1 & r_2 \end{vmatrix} = r_2 - r_1$$

Comme $r_2 \neq r_1$ on a $r_2 - r_1 \neq 0$

Par suite il existe unique λ et μ vérifiant le système (I)

VI. 9. Exercices résolus

VI. 9. 1. Résolution de l'équation différentielle $\boldsymbol{y' - 2y = e^x \cos x}$

Il s'agit de résoudre une équation différentielle linéaire du 1er ordre avec second membre à coefficients constants.

Pour la commodité de l'écriture, posons :

y_G : La solution générale de l'équation différentielle sans second membre

y_P : La solution particulière de l'équation (1)

On va déterminer la solution y de (1) donné

par $y = y_G + y_P$

VI. 9. 1.1. Résolution de l'e.s.s.m[11]

$$y' - 2y = 0 \quad \Rightarrow \quad y' = 2y$$

$$\Rightarrow \quad \frac{y'}{y} = 2$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{y} = 2dx \qquad \text{avec} \quad y' = \frac{dy}{dx}$$

$$\Rightarrow \quad \int \frac{dy}{y} = \int 2dx$$

dd'où $y_G = Ce^{2x}$

Avec C une constate

VI. 9. 1.2. Détermination de y_P

Une solution particulière

$$y_P = e^x(\mathrm{a}\cos x + b\sin x)$$

$$y'_P = e^x(-\mathrm{a}\,\mathrm{Sin}\, x + bCos\, x) + e^x(\mathrm{a}\cos x + b\sin x)$$

$$= e^x[(a+b)\cos x + (b-a)Sin\, x]$$

$$y'_P - 2y_P = e^x[(a+b)\cos x + (b-a)Sin\, x] - 2e^x(\mathrm{a}\cos x + b\sin x)$$

$$= e^x[(a+b-2a)\cos x + (b-a-2b)Sin\, x]$$

$$= e^x[(b-a)\cos x + (-b-a)Sin\, x]$$

En identifiant avec $e^x \cos x$, on obtient :

---

[11] Equation sans second membre

$$\begin{cases} b - a \\ -a - b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a - b = -1 & (1) \\ a + b = 0 & (2) \end{cases}$$

$\Rightarrow 2a = -1 \qquad a = -\frac{1}{2}$ (par addition membre à membre)

Et (2) $\Rightarrow$ $b = -a$ *ie* $b = \frac{1}{2}$

D'où $y_P = e^x \left[-\frac{1}{2}\cos x + \frac{1}{2}Sin\, x\right]$

Et la solution finale est donnée par :

$Y = Ce^{2x} + e^x \left(-\frac{1}{2}\cos x + \frac{1}{2}Sin\, x\right)$

avec $C \in IR$

VI. 9. 2. Résolution de $xy' + 2y = \frac{x}{2}$

VI. 9. 2.1. e.s.s.m.

$xy' + 2y = 0 \quad \Rightarrow \quad xy' = -2y$

$\Rightarrow \quad \frac{y'}{y} = -\frac{2}{x}$

$\Rightarrow \quad \int \frac{y'}{y} = \int -\frac{2}{x}\, dx$

$\Rightarrow \quad ln(y) = -2ln|x| + c$

$\Rightarrow \quad |y| = e^{-2ln|x|+C}$

$= e^{ln|x|^{-2}}\, e^C$

$= C'e^{ln|x|^{-2}}$

$= C'\frac{1}{|x|^2} = \frac{C\prime}{x^2}$ d'où $Y = \frac{C"}{x^2}$ $\qquad C" \in IR$

ie $y_G = \frac{C"}{x^2}$ avec y_G : solution générale

VI. 9. 2.2. Solution particulière

Déterminons les réels *a* et *b* tels que :

$y_P = ax + b$ avec y_P solution particulière

$y_P = ax + b \qquad y'_P = a$

$$xy' + 2y = ax + 2(ax + b) = 3ax + 2b = \frac{x}{2}$$

On en déduit que $3a = \frac{1}{2} \quad a = \frac{1}{6}$ et $b = 0$

D'où $y_P = \frac{x}{6}$

VI. 9. 2.3. Solution finale

Comme la solution finale est donnée par :

$$Y = y_G + y_P$$

Par suite :

$$Y = \frac{C"}{x^2} + \frac{x}{6} \quad \text{avec } C" \in IR$$

VI. 10. Autre méthode : Méthode de variation des constants

Posons $\quad Y = \frac{k}{x^2}$

On a $\quad Y' = \frac{k'x^2 - 2xk}{x^4} = \frac{k'}{x^2} - \frac{2k}{x^3}$

Comme

$$xy' + 2y = \frac{x}{2}$$

On en déduit que :

$$\frac{k'}{x} - \frac{2k}{x^2} + \frac{2k}{x^2} = \frac{x}{2} \quad \Rightarrow \quad k' = \frac{x^2}{2}$$

En intégrant membre à membre on a :

$$\int dk = \int \frac{x^2}{2}\, dx \qquad \text{avec} \quad k' = \frac{dk}{dx}$$

D'où $k = \frac{x^3}{6} + C \quad ; \quad C \in IR$

On retrouve le même résultat

VI. 11. <u>Résolution de</u> : $\boldsymbol{y" - 4y' + 3y = x^2 + 1}$ (1)

Il s'agit de résoudre une *e.d.l.* à coefficients constants

VI. 11.1. <u>Résolution de</u> : $\boldsymbol{y" - 4y' + 3y = 0}$ e.s.s.m. (1)

$y" - 4y' + 3y = 0$

L'équation caractéristique est donné par :

$r^2 - 4r + 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad r_1 = 1$ ou $r_2 = 3$

$y_G = Ae^{r_1 x} + Be^{r_2 x}$

$= Ae^{x} + Be^{3x}$

$A, B \in IR$

VI. 11.2. <u>Détermination de $\boldsymbol{y_P}$</u>

Il s'agit de déterminer les réels *a*, *b* et *c* tels que

$y_P = ax^2 + bx + C \qquad a, b, c \in IR$

$y'_P = 2ax + b \qquad y''_P = 2a$

(1) dévient : $2a - 4(2ax + b) + 3(ax^2 + bx + C) = x^2 + 1$

$3ax^3 + (3b + 8a)x + C - 2a = x^2 + 1$

En identifiant terme à terme on obtient :

$3a = 1$; $3b + 8a = 0$ et $2a - 4b + 3c = 1$

On trouve $a = \frac{1}{3}$; $b = \frac{8}{9}$ $C = \frac{35}{27}$

d'où $y_P = \frac{1}{3}x^2 + \frac{8}{9}x + \frac{35}{27}$

VI.11.3. <u>Solution finale</u>

Elle est donnée par :

$Y = y_P + y_G$

d'où $Y = \frac{1}{3}x^2 + \frac{8}{9}x + \frac{35}{27} + Ae^{x} + Be^{3x}$

avec $A, B \in IR$

CONCLUSION PARTIELLE

On vient de voir les méthodes de résolution d'une équation différentielle qui vérifie certaines conditions initiales et avec second membre dans laquelle la solution finale est la somme d'une solution particulière et d'une solution générale de l'équation différentielle sans second membre.

DEUXIÈME PARTIE

Dans cette deuxième partie on va voir

- Les équations aux dérivées partielles
- Le système différentiel du premier ordre
- La transformée de Laplace

Ce sont des notions de mathématiques indispensables à la résolution des équations aux dérivées partielles

Chap 3. EQUATIONS AUX DERIVEES PARTIELLES

I. CHANGEMENT DE VARIABLES ET DERIVATION

I.1. Cas d'une variable

Soient *f* et *g* deux fonctions d'une variable réelle, et *u* la composée de *f* et *g* :

$f : IR \longrightarrow IR$; $y : IR \longrightarrow IR$

$u(x) = f[g(x)] = fog\ (x)$

Posons $t = g(x)$ on a $u(x) = f(t)$

$$\frac{du}{dx} = \frac{df}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{df}{dt}\,[g(x)] \cdot \frac{dt}{dx}\,(x)$$

C'est-à-dire

$$u'(x) = f'[g(x)]\ g'(x)$$

I.2. Cas de plusieurs variables

Soient Ω_1 Ω_2 Ω_3 trois parties de IR^n

$$\Omega_i \subset IR^n \text{ pour } 1 \leq i \leq 3$$

$u : \Omega_1 \longrightarrow IR$

$f : \Omega_2 \longrightarrow IR$

$g_j : \Omega_3 \longrightarrow IR$ $j = \overline{1\,,n}$

On pose $t_j = g_j\,(\mathrm{x}_1, \dots, \mathrm{x}_n)$ avec $j = \overline{1\,,n}$

La matrice Jacobienne *J* est donnée par :

$J = \begin{bmatrix} \frac{dg_1}{dx_1} & \cdots & \frac{dg_1}{dx_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{dg_n}{dx_1} & \cdots & \frac{dg_n}{dx_n} \end{bmatrix}$ elle doit être inversible, c'est-à-dire $det\,J \neq 0$

On la note par $\frac{D(t_1,\ldots\ldots\ldots\ldots t_n)}{D(x_1,\ldots\ldots\ldots\ldots x_n)}$

Et pour chaque *j* variant de *1* à *n* on a :

$$\frac{du}{dx_j} = \frac{\partial f}{\partial t_1} \cdot \frac{\partial t_1}{dx_j} + \frac{\partial f}{\partial t_2} \cdot \frac{\partial t_2}{dx_j} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \frac{\partial f}{\partial t_n} \cdot \frac{\partial t_n}{dx_j}$$

I.3. Exemples

EX 1 : Déterminons toutes les fonctions *f* de classe φ^1 sur IR vérifiant :

$\frac{df}{dx} - a\frac{\partial f}{\partial y} = bf$ **(1)** $a, b \in IR$

Effectuons un changement de variables

Pour cela posons $\begin{cases} u = ax + y \\ v = \quad x \end{cases}$

La matrice Jacobienne est donnée par :

$$J = \frac{D(u,v)}{D(x,y)} = \begin{bmatrix} a & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$\det \mathrm{J} = a.0 - 1.1 = -1$

$\det \mathrm{J} \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{J}$ est inversible *ie* J^{-1} existe (matrice inverse de J)

Posons $f(x, y) = \tilde{f}(u, v)$

On a :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial \tilde{f}}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{f}}{\partial V} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} \; ;$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial \tilde{f}}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial \tilde{f}}{\partial V} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} \; ;$$

Comme $\frac{\partial u}{\partial x} = a$ et $\frac{\partial v}{\partial x} = 1$ $\frac{\partial u}{\partial y} = 1$ $\frac{\partial v}{\partial y} = 0$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = a\frac{\partial \tilde{f}}{\partial u} + \frac{\partial \tilde{f}}{\partial V} \;; \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial \tilde{f}}{\partial u}$$

Par suite l'équation aux dérivées partielles (1) devient

$$a\frac{\partial \tilde{f}}{\partial u} + \frac{\partial \tilde{f}}{\partial V} - a\,\frac{\partial \tilde{f}}{\partial u} = bf$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \tilde{f}}{\partial V} = b\tilde{f}$$

$\Rightarrow \tilde{f} = Ce^{bv}$ où C est une constante

Par rapport à *v* mais en fonction de *u*

Posons $C = g(u)$ $g \in \varphi^1(IR)$

Par suite $\tilde{f}\,(u\,,v) = g(u).\,e^{bv}$

D'où $f(x\,,y) = g(ax + y)e^{bx}$ où $g \in \varphi^1(IR)$

Remarque :

$f\,:\, IR^2 \longrightarrow IR$; $(x\,,y) \longmapsto x^2 - y^2$

Si $f(x\,,y) = x^2 - y^2$

En posant $u = x - y$ et $v = x + y$

On a $u\,.\,v = \left(x - y\right)(\,x + y)$

$$= x^2 - y^2$$

Donc $f(x\,,y) = u\,.\,v = \tilde{f}\,(u\,,v)$

$$\tilde{f}\,: \quad IR^2 \longrightarrow IR$$

$$(u\,,v) \longmapsto u\,.\,v$$

$f\ (u\ ,v) = u^2 - v^2$ alors que $\tilde{f}\ (u\ ,v) = u\,.\,v$

Déterminons par exemple une solution $f(x\ ,y)$ telle que $f(x\ ,0) = x^2 e^{bx}$

On en déduit que : $g(ax) = x^2$

Posons $t = ax$ on a $x =$

$g(t) = \frac{t}{a^2}^{2}$; $g \in \varphi^{\mathbf{1}}(IR)$

Par suite

$f(x\ ,y) = \frac{(ax+y)^2}{a^2} e^{bx}$; $a \neq 0$

II. ÉQUATION AUX DÉRIVÉES PARTIELLES LINÉAIRES À COEFFICIENTS CONSTANTS

Nous allons essayer de résoudre une équation de la forme :

$$a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} + C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + d\frac{\partial u}{\partial x} + e\frac{\partial u}{\partial y} = V\ (x\ ,y)$$

Avec $a, b, c, d, e \in IR$

Où $u(x\ ,y)$ est la fonction à déterminer et $v(x\ ,y)$ une fonction donnée.

II.1. Étude préliminaire

Résolution de : $a\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + Cu = 0$ (1)

$a, b, c \in IR$

L'équation (1) admet comme équation caractéristique :

$\frac{dx}{a} = \frac{dy}{b} = \frac{du}{-Cu}$ (2)

Une intégrale première de (2) est donnée par :

$U_1(x, y, u) = bx - ay$

Et l'autre intégrale première est donnée par :

$-\frac{c}{b}dy = \frac{du}{u}$ avec $b \neq 0$

$\Rightarrow -\frac{c}{b}y = ln|u| + K$ (3)

$\Rightarrow e^{-\frac{c}{b}y} = K'u$

$\Rightarrow ue^{-\frac{c}{b}y} = K'$

D'où $U_2\,(x, y, u) = u\,e^{-\frac{c}{b}y}$

Où $U_2\,(x, y, u) = u\,e^{\frac{c}{a}x}$

La solution de $F\,(U_1\,, U_2\,) = 0$; en prenant

$F(\alpha\,, \beta) = \beta\,G(\alpha) - 1$ donne

$u(x, y) = f(bx - ay)\,e^{-\frac{c}{b}y}$ avec $f \in \varphi^1$

En effet posons $L = a\frac{\partial}{\partial x} + a\frac{\partial}{\partial y} + C$ (Opérateur différentiel linéaire)

Puis effectuons un changement de variables.

Posons : $\begin{cases} X_1 = bx - ay \\ X_2 = x \end{cases}$ avec $a \neq 0$

On a $\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial X_1}\frac{\partial X_1}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial X_2}\frac{\partial X_2}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial X_1}\,.b + \frac{\partial}{\partial X_2}$

$\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial X_1}\frac{\partial X_1}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial X_2}\frac{\partial X_2}{\partial y} = -a\frac{\partial}{\partial X_1}$

Comme $Lu = ab\frac{\partial u}{\partial X_1} + a\,\frac{\partial u}{\partial X_2} - ab\frac{\partial u}{\partial X_1} + Cu$

$= a\,\frac{\partial u}{\partial X_2} + Cu$

$Lu = 0 \quad \Rightarrow \quad a\,\frac{\partial u}{\partial X_2} = -Cu$

$\Rightarrow \quad \frac{\partial u}{\partial X_2} = -\frac{C}{a}u$

Par suite $u(X_1, X_2) = f(X_1)e^{-\frac{C}{a}X_2}$

Finalement $u(x,y) = f(bx - ay)e^{-\frac{c}{a}x} \quad f \in \varphi^1$

Rappelons une propriété importante :

Soient L_1 et L_2 deux opérateurs différentielles linéaires à coefficients constants.

Supposons que $L_1 o\, L_2 = L_2 o L_1 = L$ avec $L_2 \neq L_1$

Désignons par Q_1 et Q_2 les polynômes associés à L_1 et L_2

Alors

i. L est associé au polynôme $Q = Q_1 . Q_2$

ii. $\left.\begin{array}{l} u = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 \\ \quad \lambda_1, \lambda_2 \in IR \\ \text{Avec } L_1 u_1 = 0 \\ \quad L_2 u_2 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow Lu = 0$

En effet :

$$\begin{aligned} \lambda u = L(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2) &= \lambda_1 L u_1 + \lambda_2 L\, u_2 \\ &= \lambda_1 L_2 o L_1 u_1 + \lambda_2 L_1 o L_2 \; u_2 \\ &= \lambda_1 L_2 (L_1 u_1) + \lambda_2 L_1 (L_2 \; u_2) \\ &= \lambda_1 . 0 + \lambda_2 . 0 = 0 \end{aligned}$$

Réciproquement si L est un opérateur différentiel associé au polynôme Q et si $Q = Q_1\, Q_2$, $Q_1 \neq Q_2$

Supposons que L_1 soit associé à Q_1

L_2 soit associé à Q_2

alors

i. $L = L_1 o L_2 = L_2 o L_1$

ii. $L(u_1 + \lambda_2 u_2) = 0 \quad \forall \; \lambda_1 \, \lambda_2 \in IR$

dès que $L_1 u_1 = L_2 \; u_2 = 0$

II.2. Exemple

Résolution de :

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - 2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = x + y^2 e^y$$

Il s'agit d'une e.d.p. linéaire à coefficients constants avec second membre.

Le polynôme associé à l'équation sans second membre est :

$$Q(X\,,y) = X^2 + XY - 2Y^2$$

Essayons de factoriser Q

Pour cela posons $t = \frac{X}{Y}$

$$Q(X\,,y) = Y^2(\frac{X^2}{Y^2} - \frac{X}{Y} - 2)$$

$$\frac{X^2}{Y^2} - \frac{X}{Y} - 2 = t^2 + t - 2$$

$$= (t + \frac{1}{2})^2 + \frac{1}{4} - 2$$

$$= (t + \frac{1}{2})^2 - \frac{9}{4}$$

$$= (t + \frac{1}{2})^2 - (\frac{3}{2})^2$$

$$= (t + \frac{1}{2} - \frac{3}{2})\,(t + \frac{1}{2} + \frac{3}{2})$$

$= (t - 1)\,(t + 1)$ en remplaçant t par $\frac{X}{Y}$

$$= \left(\frac{X}{Y} - 1\right)\left(\frac{X}{Y} + 1\right)$$

$$Q(X\,,y) = Y^2\left(\frac{X}{Y} - 1\right)\left(\frac{X}{Y} + 2\right)$$

$$= Y^2\left(\frac{X - Y}{Y}\right)\left(\frac{X + 2Y}{Y}\right)$$

$$= (X - Y)\,(X + 2Y)$$

Comme $Q = Q_1 . Q_2$ on a $L = L_1 o L_2 = L_2 o L_1$

Avec $L_1 = \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y}$

$$L_2 = \frac{\partial}{\partial x} - 2\frac{\partial}{\partial y}$$

La solution générale est $u = u_1 + u_2$

Avec $L_1 u_1 = L_2 \ u_2 = 0$

Pour L_1 on a $a = 1$; $b = -1$; $c = 0$

Par suite $u_1 = f(bx - ay)e^{-\frac{c}{a}x}$ $g \in \mathcal{G}^2$

$$= g(2x - y)$$

Finalement

$$u(x , y) = f(x + y) + g(2x - y)$$

Avec $f, g \in \mathcal{G}^2$

Déterminons maintenant la solution particulière.

Pour cela cherchons la solution qui ne dépend que de x :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = x \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{x^2}{2} \quad \Rightarrow \quad u_1 = \frac{x^3}{6} = u_1$$

Et pour la solution qui ne dépend que de *y*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = y^2 \ e^y$$

On en déduit que :

$$u = (ay^4 + by^3 + C\ y^2 + dy + \alpha\ )e^y$$

Avec $a, b, c, d, \alpha \in IR$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = (4ay^3 + 3by^2 + 2C\ y + d)e^y + (ay^4 + by^3 + C\ y^2 + dy + \alpha\ )e^y$$

$$= [\ ay^4 + (4a + b)y^3 + (3b + C)y^2 + (2C + d)y + \alpha + d]e^y$$

Comme c'est trop grand, prenons $a = b = 0$

Donc $\frac{\partial u}{\partial y} = [Cy^2 + (2C + d)y + \alpha + d]e^y$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = [2Cy + (2C + d)e^y + [Cy^2 + (2\alpha + d)y + \alpha + d\ ]e^y$$

$$= [Cy^2 + (2C + 2C + d)y + 2C + d + \alpha + d]e^y$$

$= [Cy^2 + (4C + d)y + (2C + \alpha + 2d)]e^y$ (1)

Or $-\frac{2\partial^2 u}{\partial y^2} = y^2 e^y \Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{1}{2} y^2 e^y$ (2)

En identifiant (1) et (2) on obtient :

$C = -\frac{1}{2}$; $4C + d = 0$; $2C + \alpha + 2d = 0$

D'où $d = -4C = -4\left(-\frac{1}{2}\right) = 2$

$-1 + \alpha + 4 = 0 \quad \alpha = -3$

La solution particulière est donc :

$u_{2part} = u_2 = (-\frac{1}{2} y^2 + 2y - 3)e^y$

Comme $u_{part} = u_1 + u_2 = \left(-\frac{1}{2} y^2 + 2y - 3\right) e^y + \frac{x^3}{6}$

On en déduit la solution de l'équation différentielle partielle linéaire à coefficients constante avec second membre :

$$u(x, y) = f(x + y) + g(2x - y) + \frac{x^3}{6} + \left(-\frac{1}{2} y^2 + 2y - 3\right) e^y$$

Avec $f, g \in \mathcal{G}^2$

II.3. <u>Résolution de</u> : $y\frac{\partial f}{\partial x} - x\frac{\partial f}{\partial y} = 0$ (2)

Pour cela posons : $\begin{cases} u = x^2 + y^2 \\ v = x \end{cases}$

La matrice Jacobienne $J = \frac{D(u, v)}{D(x, y)} = \begin{bmatrix} 2x & 2y \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

Par suite le déterminant de cette matrice notée $det\, J$ est égale à $-2y \neq 0$ sur $IR^2\, \{(x, 0); x \in IR\}$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial \tilde{f}}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{f}}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x}$$

et

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial \tilde{f}}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial \tilde{f}}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y}$$

Comme $\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = 2x & \frac{\partial u}{\partial y} = 2y \\ \frac{\partial v}{\partial x} = 1 & \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \end{cases}$

On obtient le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 2x \frac{\partial \tilde{f}}{\partial u} + \frac{\partial \tilde{f}}{\partial v} \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 2y \frac{\partial \tilde{f}}{\partial u} \end{cases}$$

Soit :

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x & 1 \\ 0 & 2y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial u} \\ \frac{\partial \tilde{f}}{\partial v} \end{bmatrix}$$

L'équation aux dérivées partielles (2) devient

$$y \frac{\partial f}{\partial x} - x \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y\left[2x \frac{\partial \tilde{f}}{\partial u} + \frac{\partial \tilde{f}}{\partial v}\right] - 2xy \frac{\partial \tilde{f}}{\partial u} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 2xy \frac{\partial \tilde{f}}{\partial u} + y \frac{\partial \tilde{f}}{\partial v} - 2xy \frac{\partial \tilde{f}}{\partial u} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad y \frac{\partial \tilde{f}}{\partial v} = 0$$

Comme $y \neq 0$ on a $\frac{\partial \tilde{f}}{\partial v} = 0$

$\tilde{f}$ est alors une fonction de *u*. Posons $\tilde{f}(u, v) = g(u)$

$g \in \mathcal{G}^1$ [12]

Or $u = x^2 + y^2$ donc $g(u) = g(x^2 + y^2)$ $g \in \mathcal{G}^1(IR)$

On remarque que $f \in \mathcal{G}^1(IR^2)$

[12] g continue et dérivable une fois

II.4. Exemple :

Résolution de l'équation aux dérivées partielles avec $u^2 \in \mathcal{G}^2(IR^2)$

$$4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} - 2 = 0 \quad (3)$$

Pour résoudre cette équation, posons : $X_1 = y - x \quad et \;\; X_2 = y - \frac{x}{4}$

La matrice Jacobienne J est donné par :

$$J = \frac{D(X_1, X_2)}{D(x,y)} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -\frac{1}{4} & 1 \end{bmatrix} \quad \text{avec} \quad J = \begin{bmatrix} \frac{\partial X_1}{\partial x} & \frac{\partial X_1}{\partial y} \\ \frac{\partial X_2}{\partial x} & \frac{\partial X_2}{\partial y} \end{bmatrix}$$

$\det \mathrm{J} = -1 + \frac{1}{4} = \frac{-4+1}{4} = -\frac{3}{4} \neq 0$ J est inversible

Comme $X_1 = y - x \qquad \frac{\partial X_1}{\partial x} = -1 \quad ; \quad \frac{\partial X_1}{\partial y} = 1$

$X_2 = y - \frac{x}{4} \qquad \frac{\partial X_2}{\partial x} = -\frac{1}{4} \quad ; \quad \frac{\partial X_2}{\partial y} = 1$

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial \tilde{u}}{\partial X_1} \cdot \frac{\partial X_1}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{u}}{\partial X_2} \cdot \frac{\partial X_2}{\partial x} = -\frac{\partial \tilde{u}}{\partial X_1} - \frac{1}{4}\frac{\partial \tilde{u}}{\partial X_2} \\ \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial \tilde{u}}{\partial X_1} \cdot \frac{\partial X_1}{\partial y} + \frac{\partial \tilde{u}}{\partial X_2} \cdot \frac{\partial X_2}{\partial y} = -\frac{\partial \tilde{u}}{\partial X_1} - \frac{1}{4}\frac{\partial \tilde{u}}{\partial X_2} \end{cases} \quad \text{(a)}$$

Or $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial v}\right) = \frac{\partial v}{\partial x}$ avec $v = \frac{\partial u}{\partial x}$

Et $\tilde{v} = -\frac{\partial \tilde{u}}{\partial X_1} - \frac{1}{4}\frac{\partial \tilde{u}}{\partial X_2}$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial \tilde{v}}{\partial X_1} \cdot \frac{\partial X_1}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial X_2} \cdot \frac{\partial X_2}{\partial x} = -\frac{\partial \tilde{v}}{\partial X_1} - \frac{1}{4}\frac{\partial \tilde{v}}{\partial X_2}$$

Donc $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\frac{\partial}{\partial X_1}\left[-\frac{\partial \tilde{u}}{\partial X_1} - \frac{1}{4}\frac{\partial \tilde{u}}{\partial X_2}\right] - \frac{1}{4}\frac{\partial}{\partial X_2}\left[-\frac{\partial \tilde{u}}{\partial X_1} - \frac{1}{4}\frac{\partial \tilde{u}}{\partial X_2}\right]$

$$= \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial {X_1}^2} + \frac{1}{4}\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial X_1 \partial X_2} + \frac{1}{4}\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial X_2 \partial X_1} + \frac{1}{16}\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial {X_2}^2}$$

Comme $\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial X_1 \partial X_2} = \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial X_2 \partial X_1}$

On a $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial {X_1}^2} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial X_1 \partial X_2} + \frac{1}{16}\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial {X_2}^2}$ (a')

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial \tilde{v}}{\partial X_1}.\frac{\partial X_1}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial X_2}.\frac{\partial X_2}{\partial x}$$

$$= \frac{\partial \tilde{v}}{\partial X_1} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial X_2} \qquad \text{avec} \quad \frac{\partial X_1}{\partial y} = 1 \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial X_2}{\partial y} = 1$$

$$= \frac{\partial}{\partial X_1}\left[-\frac{\partial \tilde{v}}{\partial X_1} - \frac{1}{4}\frac{\partial \tilde{u}}{\partial X_2}\right] \quad \text{avec} \qquad \tilde{v} = -\frac{\partial \tilde{u}}{\partial X_1} - \frac{1}{4}\frac{\partial \tilde{u}}{\partial X_2} + \frac{\partial}{\partial X_2}\left[-\frac{\partial \tilde{u}}{\partial X_1} - \frac{1}{4}\frac{\partial \tilde{u}}{\partial X_2}\right]$$

$$= -\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial {X_1}^2} - \frac{1}{4}\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial X_1 \partial X_2} - \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial X_1 \partial X_2} - \frac{1}{4}\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial {X_2}^2}$$

$$= -\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial {X_1}^2} - \frac{5}{4}\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial X_1 \partial X_2} - \frac{1}{4}\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial {X_2}^2}$$

Donc $\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x \partial y} = -\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial {X_1}^2} - \frac{5}{4}\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial X_1 \partial X_2} - \frac{1}{4}\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial {X_2}^2}$ (b)

$$\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) = \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial \tilde{w}}{\partial X_1} + \frac{\partial \tilde{w}}{\partial X_2} \qquad \text{avec} \quad w = \frac{\partial u}{\partial y}$$

Or $\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial \tilde{w}}{\partial X_1}.\frac{\partial X_1}{\partial y} + \frac{\partial \tilde{w}}{\partial X_2}.\frac{\partial X_2}{\partial y}$

$$= \frac{\partial \tilde{w}}{\partial X_1} + \frac{\partial \tilde{w}}{\partial X_2} \qquad \text{car} \qquad \frac{\partial X_1}{\partial y} = \frac{\partial X_2}{\partial y} = 1$$

Comme $w = \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial \tilde{u}}{\partial X_1}.\frac{\partial X_1}{\partial y} + \frac{\partial \tilde{u}}{\partial X_2}.\frac{\partial X_2}{\partial y}$

$$\tilde{w} = \frac{\partial \tilde{u}}{\partial X_1} + \frac{\partial \tilde{u}}{\partial X_2}$$

$$\frac{\partial \tilde{w}}{\partial X_1} = \frac{\partial}{\partial X_1}\left[\frac{\partial \tilde{u}}{\partial X_1} + \frac{\partial \tilde{u}}{\partial X_2}\right] = \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial {X_1}^2} + \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial X_1 \partial X_2}$$

$$\frac{\partial \tilde{w}}{\partial X_2} = \frac{\partial}{\partial X_2}\left[\frac{\partial \tilde{u}}{\partial X_1} + \frac{\partial \tilde{u}}{\partial X_2}\right] = \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial {X_2}^2} + \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial X_1 \partial X_2}$$

Et donc

$$\frac{\partial \tilde{w}}{\partial X_1} + \frac{\partial \tilde{w}}{\partial X_2} = \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial {X_1}^2} + \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial X_1 \partial X_2} + \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial X_1 \partial X_2} + \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial {X_2}^2}$$

$$= \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial {X_1}^2} + 2\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial X_1 \partial X_2} + \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial {X_2}^2} = \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial y^2}$$

Par suite : $\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial {X_1}^2} + 2\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial X_1 \partial X_2} + \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial {X_2}^2}$

Compte tenue des relations (a), (a'), (b) et (c)

On obtient

$$(4-5+1)\frac{\partial^2\tilde{u}}{\partial {X_1}^2}+\left(2-\frac{25}{4}+2\right)\frac{\partial^2\tilde{u}}{\partial X_1\partial X_2}+\left(\frac{1}{4}-\frac{5}{4}+1\right)\frac{\partial^2\tilde{u}}{\partial {X_2}^2}+(-1+1)\frac{\partial^2\tilde{u}}{\partial X_2}-2=0$$

D'après (3)

$$-\frac{9}{4}\frac{\partial^2\tilde{u}}{\partial X_1\partial X_2}+\frac{3}{4}\frac{\partial\tilde{u}}{\partial X_2}=2$$

$$9\frac{\partial^2\tilde{u}}{\partial X_1\partial X_2}-3\frac{\partial\tilde{u}}{\partial X_2}=-8$$

$$\frac{\partial^2\tilde{u}}{\partial X_1\partial X_2}-\frac{1}{3}\frac{\partial\tilde{u}}{\partial X_2}=-\frac{8}{9}$$

Posons $\varphi(X_1,X_2)=\frac{\partial\tilde{u}}{\partial X_2}$ l'équation aux dérivées partielles devient :

$$\frac{\partial\varphi}{\partial X_1}-\frac{1}{3}\varphi=-\frac{8}{9}$$

L'équation sans second membre donne :

$$\frac{\partial\varphi}{\partial X_1}=\frac{1}{3}\varphi$$

$$\varphi(X_1,X_2)=\psi(X_2).e^{\frac{1}{3}X_1}$$

La solution particulière est $\varphi_p=\frac{8}{3}$

D'où $\varphi(X_1,X_2)=\frac{8}{3}+\psi(X_2).e^{\frac{1}{3}X_1}$

Comme $\frac{\partial\tilde{u}}{\partial X_2}=\varphi(X_1,X_2)$

On a $\tilde{u}(X_1,X_2)=\frac{8}{3}X_2+l(X_2)e^{\frac{1}{3}X_1}+\xi(X_1)$ avec $l \in C^{-2}$

D'où $u(x,y)=\frac{8}{3}\left(y-\frac{x}{4}\right)+l\left(y-\frac{x}{4}\right)e^{\frac{y-x}{3}}+\xi\left(\frac{y-x}{3}\right)$

Cherchons par exemple une solution $u(x,y)$ telle que :

$$u(x,x)=x^2 \quad \forall x \in IR$$

$$u(x,x) = \frac{8}{3}\,.\frac{3}{4}x + l\left(\frac{3x}{4}\right) + \xi(0)$$

$$x^2 = 2x + \ l\left(\frac{3x}{4}\right) + \xi(0)$$

$\Rightarrow l\left(\frac{3x}{4}\right) = \ x^2 - 2x + b$ avec $b \ = -\xi(0)$

On pose $t = \ \frac{3x}{4}$ donc $x = \frac{4}{3}t$

$l(t\ ) = (\frac{4}{3}t)^2 - \ 2\left(\frac{4}{3}t\right) = \frac{16}{9}t^2 - \frac{8}{3}t + b$

D'où $u(x,y) = \frac{8}{3}\left(y - \frac{x}{4}\right)\left[\frac{16}{9}\left(y - \frac{x}{4}\right)^2 - \frac{8}{3}\left(y - \frac{x}{4}\right)\right] e^{\frac{y-x}{3}} + \ b$

Avec $b \ = -\xi(0)$

On pose $t = \frac{3}{4}x$ donc $x = \ \frac{4}{3}t$

$\Rightarrow l(t) = (\frac{4}{3}t)^2 - \ 2\left(\frac{4}{3}t\right) = \ \frac{16}{9}t^2 - \frac{8}{3}t + b$

D'où $u(x,y) = \frac{8}{3}\,(y - \frac{x}{4}) + \left[\frac{16}{9}\left(y - \frac{x}{4}\right)^2 - \frac{8}{3}\left(y - \frac{x}{4}\right)\right] e^{\frac{y-x}{3}} + \ b$

avec $b \ = -\xi(0)$

Chapitre 4 : SYSTÈME DIFFÉRENTIEL DU 1er ORDRE

I. Généralité

Soit $t \in IR$, Considérons $x_i : IR \longrightarrow IR \quad i = \overline{1,n}$

$$t \longrightarrow x_i(t)$$

Une fonction dérivable pour chaque *i* variant de *1* à *n*

$$f_i : IR^{n+1} \longrightarrow IR$$

$$(t, x_1, \dots x_n) \longrightarrow f_i(t, x_1, \dots x_n)$$

Une fonction à $n+1$ variables

Le système différentiel du premier ordre est donné par

$$(\mathrm{I}) \qquad \begin{cases} x'_1(t) = f_1(t, x_1, \dots x_n) \\ x'_2(t) = f_2(t, x_1, \dots x_n) \\ \quad \vdots \\ x'_n(t) = f_n(t, x_1, \dots x_n) \end{cases}$$

Si (I) admet une solution alors elle représente une courbe paramétrée dans IR^{n+1}

(I) est un système différentiel linéaire si toutes les f_i sont linéaires $\quad i = \overline{1,n}$

(I) peut s'écrire :

$$\begin{bmatrix} x'_1(t) \\ \vdots \\ x'_n(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}(t) & \dots & a_{1n}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1}(t) & \dots & a_{nn}(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} = \Delta(t) \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}$$

Si la matrice $\Delta(t)$ ne dépend pas de *t*, alors on obtient un système différentiel linéaire à coefficients constants.

On s'intéresse aux 2 cas suivants

- Système différentiel linéaire à coefficients constants
- Système différentiel non linéaire à coefficients constants

Dans ce cas les f_i ne dépendent que de x_i et non plus de *t*

Dans le cas linéaire : $X'(t) = \Delta X(t)$ où $X(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}$

Et le cas non linéaire

$$\begin{cases} x'_1(t) = f_1(t, x_1, \dots x_n) \\ x'_2(t) = f_2(t, x_1, \dots x_n) \\ \vdots \\ x'_n(t) = f_n(t, x_1, \dots x_n) \end{cases}$$

On pose $x'_i(t) = \frac{x_i}{dt} \quad 1 \leq i \leq n$

Le système (I) dévient :

$$\frac{dx_1}{f_1} = \frac{dx_2}{f_2} = \dots = \frac{dx_n}{f_n} = dt$$

I.1. Remarque

Si le système est avec second membre ; dans le cas linéaire, on a :

$$X'(t) = \Delta(t) + X(t) + B(t)$$

Où $\Delta(t)$ est une matrice n x n

$X(t)$, $B(t$ et $X'(t)$ sont des matrices n x 1

II. Système différentielle linéaire à coefficients constants

II.1. Sans second membre

$X'(t) = A\,X(t)$

Pour $n = 1$ on trouve $X(t) = C\,e^{tA}$, $t \in IR$

En généralisant $X(t) = e^{tA}C$,

Avec e^{tA} l'exponentielle de tA c'est une matrice n x n

Et C étant une matrice n x 1

II.2. Avec second membre

X'(t)=A(t).X(t)+B(t)

Désignons par X_g la solution de l'équation sans second membre

X'(t)=A(t).X(t)

$X_g = Ce^{tA}$ et par Xp la solution particulière, donc : $X(t)=Xp(t)+Ce^{tA}$

II.2.1. Détermination de C

On utilise la méthode dite : Variation des constantes

$$X(t) = C\, e^{tA}$$

En dérivant on obtient : $X'(t) \quad = AC\, e^{tA} +$

$X'^{(t)} = AX(t) + \ B(t) \qquad \Rightarrow \qquad C' e^{tA} = B(t)$

$\Rightarrow C' = \ e^{-tA}\, B(t)$

D'où $C = \ \int e^{-tA}\, B(t)\, dt$ c'est une matrice unicolonne à n lignes.

III. Exponentielle d'une matrice A

L'idée vient de $\quad e^{x} = \ \sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{n!} \ , \quad x \ \in IR$

Et donc $e^{A} = \ \sum_{n\geq 0} \frac{A^n}{n!}$ En général c'est difficile à calculer

Si $AB \ = \ BA$ on a $\quad e^{A+B} = e^{A} + e^{B}$

Et $\quad e^{0} = 0^{0} + \frac{0^1}{1} + \ ... = \ I_n + \ 0 + \cdots$

donc $\quad e^{0} = I_n$

si la matrice A est diagonalisable

Soit $\quad \lambda_i, \qquad i \ = \overline{1, \mathrm{n}}$ une valeur propre de A

On a $A = diag\ (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$

$$A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & & 0 \\ 0 & & & & \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ & & & & 0 \\ 0 & & \cdots & 0 & \lambda_n \end{bmatrix}$$

$$e^{A} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1} & 0 & \cdots & & 0 \\ 0 & & & & \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ & & & & 0 \\ 0 & & \cdots & 0 & e^{\lambda_1} \end{bmatrix}$$

Come $\ \frac{A^k}{k!} = diag\ (\frac{{\lambda_1}^k}{k!}, \dots., \frac{{\lambda_n}^k}{k!})$

$$\sum_{k\geq 0} \frac{A^k}{k!} = diag\ (\sum_{k\geq 0} \frac{{\lambda_1}^k}{k!}, \dots., \sum_{k\geq 0} \frac{{\lambda_n}^k}{k!})$$

Par suite $\quad e^{A} = (e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_n})$

Compte tenue de $\quad e^{\lambda_i} = \sum_{k\geq 0} \frac{{\lambda_i}^k}{k!} \qquad i \ = \overline{1, \mathrm{n}}$

III.1. Remarques

R₁. Si A est diagonalisable alors il existe une matrice P inversible tq $P^{-1}AP$ est diagonale. Notons D cette matrice $\qquad D = P^{-1}AP$

On en déduit que $\quad A = PDP^{-1}$ et $\qquad D = diag\ (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$

Calculons A^2

$A^2 = A \text{ x } A = (PDP^{-1})(PDP^{-1}) = PD^2P^{-1}$

Supposons que $A^k = PD^kP^{-1}$

Calculons A^{k+1}

$$A^{k+1} = A^k.A = PD^kP^{-1}.A \quad \text{par hypothèse}$$
$$= (PD^kP^{-1}).(PDP^{-1})$$
$$= PD^k(P^{-1}P)DP^{-1}$$
$$= PD^k(P^{-1}) \text{ avec } P^{-1}P = I \text{ matrice identité}$$

On vient de montrer par récurrence

Que $\quad A^k = PD^kP^{-1} \quad \forall\, p \in IN$

Et donc $\quad \sum_{k\geq 0} \frac{A^k}{k!} = P\left(\sum_{k\geq 0} \frac{A^k}{k!}\right) P^{-1}$

$$= P\; diag(e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_n})P^{-1}$$

d'où $e^A = P\; diag(e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_n})P^{-1}$

R$_2$. Si la matrice A est nilpotente c'est à dire

$\exists\, l \in IN$ tel que $\quad A^{l+1} = 0 \quad$ et $\quad A^l = 0$

Avec *O* la matrice nulle

$e^A = I + \frac{A}{1!} + \dots + \frac{A^l}{l!} \qquad l \in IN$

R$_3$. D'après une théorie il existe une matrice D diagonalisable et une matrice nilpotente N telles que : $\quad A = D + N \;, \quad DN = ND$

$$e^A = e^{D+N} = e^D + e^N$$

e^D est connue car D est diagonalisable

e^N l'est aussi car N est nilpotente

R$_4$. En général e^A est trop longue à calculer tant que possible on évite de la calculer.

III.2. <u>Autres méthodes</u>

Considérons l'équation différentielle

$$X'^{(t)} = A\,X(t)$$

III.2.1. A : diagonale

$$A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

Le système devient

$$\begin{cases} x'_1(t) = \lambda_1 x_1(t) \\ \vdots \\ x'_n(t) = \lambda_n x_n(t) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} \\ \vdots \\ x_n(t) = C_n e^{\lambda_n t} \end{cases}$$

III.2.2. A : triangulaire supérieure

Cette matrice est de la forme :

$$A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & * \\ 0 & \lambda_n \end{bmatrix}$$

On a

$$\begin{cases} x'_1(t) = \lambda_1 x_1(t) + b_2(x_2(t), \dots, x_n(t)) \\ \vdots \\ x'_{n-1}(t) = \lambda_{n-1} x_{n-1}(t) + b_{n-1}(t) \\ x'_n(t) = \lambda_n x_n(t) \end{cases}$$

On résout la dernière équation qui donne comme solution $x_n(t) = C_n\, e^{\lambda_n(t)}$, puis on remplace x_n dans l'avant dernière équation.

$$x'_{n-1}(t) = \lambda_{n-1} x_{n-1}(t) + b_{n-1}(t)$$

C'est une équation avec second membre. On peut trouver $x_{n-1}(t)$, et ainsi de suite, on remonte jusqu'à la première équation.

IV. Exemples

IV.1. Exemples Résolution d'un système de 3 équations différentielles

Résolution du système $\begin{cases} x'(t) = x(t) - y(t) + z(t) \\ y'(t) = 2y(t) + z(t) \\ z'(t) = -z(t) \end{cases}$

$$\begin{bmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix} \quad \text{donc } \Delta = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$z'(t) = -z(t) \quad \Rightarrow \quad z(t) = Ce^{-t}$$

La deuxième équation devient :

$$y'(t) = 2y(t) + Ce^{-t}$$

Résolution de l'équation sans second membre (*e.s.s.m*)

$$y'(t) - 2y(t) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad y'(t) = 2y(t)$$

$$\Rightarrow \frac{y'(t)}{y(t)} = 2 \qquad \Rightarrow \qquad y(t) = be^{2t}$$

Une solution $y_p(t)$ particulière est donnée par :

$$y_p(t) = \lambda e^{-t}$$

Par suite $y'(t) = 2y(t) + Ce^{-t}$

$$y_p(t) = \lambda e^{-t} \Rightarrow \qquad y'_p(t) = -\lambda e^{-t}$$

$$-\lambda e^{-t} = 2\lambda e^{-t} + Ce^{-t} \qquad \Rightarrow \qquad \lambda = -\frac{C}{3}$$

D'où $y_p(t) = -\frac{C}{3}\, e^{-t}$

Donc $y(t) = -\frac{C}{3}\, e^{-t} + be^{2t}$

$y(t)$ et $z(t)$ étant connus, l'équation

$$x'(t) = x(t) + y(t) + z(t)$$

devient $\qquad x'(t) = x(t) + \frac{4C}{3}\, e^{-t} - be^{2t}$

c'est une équation différentielle avec second membre qui permet certainement de déterminer $x(t)$

Remarque

Si $A = PSP^{-1}$, avec S diagonale ou triangulaire, la matrice P est inversible c'est-à-dire A est diagonalisable ou triangularisable.

$X' = \Delta X$

$\Rightarrow X' = PSP^{-1}X$

$\Rightarrow P^{-1}X' = SP^{-1}X$

On pose $\qquad Y = P^{-1}X$

$$Y' = (P^{-1}X)' = P^{-1}X' \quad \text{car } (P^{-1})' = 0$$

$X' = \Delta X$ devient

$$Y' = SY \text{ avec } S \text{ diagonale ou triangulaire.}$$

On trouve Y avec l'une des deux méthodes précédents

$Y = P^{-1}X \quad \Rightarrow \quad X = PY \qquad$ Remarquons qu'on n'a pas besoin de calculer P^{-1}

IV.2. Exemple

Résolution du système $\begin{cases} x'(t) = 2x(t) + 2y(t) \\ y'(t) = x(t) + y(t) \end{cases}$

avec *x(0) = 1* et *y(0) = 0*

IV.2.1. <u>Méthode 1</u> (passer par exponentielle)

$\begin{bmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}$

Posons $X(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}$ A = $\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

L'équation différentielle devient $X'(t)$ = A $X(t)$

- **<u>Calcul des valeurs propres de A</u>**

$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda\,(\lambda - 3)$

Il existe deux valeurs propres simples : $\lambda_1 = 0$ et $\lambda_2 = 3$

A est diagonalisable sur ℝ. Il existe donc une matrice inversible P tel que D = PAP^{-1}

D = $\begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{vmatrix}$

La première colonne de la matrice P étant le vecteur propre associé à λ_1.

La deuxième colonne par le vecteur propre associé à λ_2.

- **<u>Détermination des vecteurs propres</u>**

Soit $E\lambda_1$ le sous espace associé à $\lambda_1 = 0$

On a : $\begin{cases} 2x + 2y = 0 \\ x + y = 0 \end{cases} \Rightarrow y = -x$

donc $\vec{u}_1 = (1, -1)$ et $E\lambda_1 = < \vec{u}_1 >$ est le sous espace engendre par le vecteur $\vec{u}_1$.

Soit $E\lambda_2$ le sous espace associé à $\lambda_2 = 3$.

$\vec{u}_2 \in E\lambda_2 \Rightarrow A\vec{u}_2 = 3\vec{u}_2$

$\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3x \\ 3y \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2x + 2y = 3x \\ x + y = 3y \end{cases}$

$\Rightarrow x = 2y \Rightarrow \vec{u}_2 = (2,1)$

Le sous espace $E\lambda_2$ engendré par $\vec{u}_2$ est $E\lambda_2 = < \vec{u}_2 >$

- **<u>Détermination de P^{-1}</u>** : (matrice inverse de P)

Comme P = $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

tenant compte de $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$

avec $ad - bc \neq 0$

On a : $P_1 = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

$A = PDP^{-1} \Rightarrow tA = P(tD)\,P^{-1}$

et $e^{tA} = P\,e^{tD}\,P^{-1}$ $\quad tD = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3t \end{bmatrix}$

$e^{tD} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{3t} \end{bmatrix}$

$e^{tA} = P\,e^{tD}\,P^{-1} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e3t \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

$= \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 + 2e^{3t} & -2 + 2e^{3t} \\ -1 + e^{3t} & 2 + e^{3t} \end{bmatrix}$

$X'(t) = A\,X(t) \Rightarrow X(t) = e^{tA}\begin{bmatrix} 3\,C_1 \\ 3\,C_2 \end{bmatrix}$ C_1, C_2 sont des constantes.

$$\begin{cases} x(t) = C_1\,(1 + 2e^{3t}) + C_2\,(-2 + 2e^{3t}) \\ y(t) = C_1(-1 + e^{3t}) + C_2\,(2 + e^{3t}) \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} x(0) = 1 \\ y(0) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} 3C_1 = 1 \Rightarrow C_1 = \frac{1}{3} \\ 3\,C_2 = 0 \Rightarrow C_2 = 0 \end{array}$$

Par suite $\begin{cases} x(t) = \frac{1}{3}\,(1 + 2e^{2t}) \\ y(t) = \frac{1}{3}\,(-1 + 2e^{3t}) \end{cases}$

IV.2.2. <u>Méthode 2</u> (sans passer par exponentielle)

$X'(t)$ = A $X(t)$ A = P D P^{-1}

Y = P^{-1}X $Y = \begin{bmatrix} y1 \\ y2 \end{bmatrix}$

Y' = DY

On en déduit que : $\begin{cases} y'_1(t) = 0 \\ y'_1(t) = 3\, y_2(t) \end{cases}$ X = PY

$\Rightarrow \begin{cases} y_1(t) = C_1 \\ y_2(t) = C_2 e3t \end{cases}$ $\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2\, e^{3t} \end{bmatrix}$

$\Rightarrow \begin{cases} x(t) = C_1 + 2C_2\, e^{3t} \\ y(t) = -C_1 + C_2\, e^{3t} \end{cases}$

$\left.\begin{matrix} x(0) = 1 \\ y(0) = 1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{cases} C_1 + 2C_2 = 1 \\ -C_1 + C_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow C_1 = C_2$

d'où $C_1 = C_2 = \frac{1}{3}$

On retrouve le résultat précédent.

IV.2.3. <u>Méthode 3</u>

$\begin{cases} x'(t) = 2x + 2y \\ y'(t) = x + y \end{cases}$

donc $x'(t) = 2y'(t) \Rightarrow x(t) + 2y(t) = C$

$\Rightarrow x(t) = 2y(t) + C$

La deuxième équation : $y'(t) = 3y(t) + C$

L'équation sans second membre donne comme solution générale y_g = b e^{3t} et la solution particulière : $y_p = -\frac{C}{3}$

d'où la solution $y(t) = -\frac{C}{3} + b\, e^{3t}$

$x(t) = 2y + C = \frac{C}{3} + 2b\, e^{3t}$

$\left.\begin{matrix} x(0) = 1 \\ y(0) = 1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{cases} \frac{C}{3} + 2b = 1 \\ -\frac{C}{3} + b = 0 \end{cases} \Rightarrow C = 1; b = \frac{1}{3}$

On retrouve aussi le même résultat.

V. Système différentiel non linéaire à coefficients constants

V.1. Généralités

On se ramène à $\frac{dx1}{f1} = \frac{dx2}{f2} = \cdots = \frac{dxn}{fn}$ I'

Où f_i sont fonction de $x_1, \ldots\ldots\ldots\ldots x_{n}$. Une solution de (I) est une courbe paramétrée de vecteur tangent en M*(t)* : $\begin{bmatrix} \frac{dx1}{dt} \\ \vdots \\ \frac{dxn}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x'1(t) \\ \vdots \\ x'n(t) \end{bmatrix}$

(I') veut dire que le vecteur $\vec{v}$ est parallèle à $\begin{pmatrix} f_1 \ [M(t)] \\ \\ f_n \ [M(t)] \end{pmatrix}$ pour tout *M(t)* de la courbe solution.

On s'intéresse aux cas $n = 2, 3$.

Pour le cas $n = 1$ c'est l'équation différentielle ordinaire d'ordre 1.

Pour $n = 2$ $\frac{dx}{P(x,y)} = \frac{dy}{Q(x,y)}$

Pour $n = 3$ $\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R}$

On note (S) ce système.

V.2. Intégrale première de (S)

<u>Cas $n = 2$</u> (S) = $\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q}$

Une intégrale première est une fonction de classe C^1 telle que pour toute courbe de solution (F) de (S) pour tout point $M(t) \in$ (F) :

$U\ [M(t)]$ est constante c'est-à-dire ne dépend pas de t.

$$M \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \qquad M(t): [x(t), y(t)]$$

<u>Cas $n = 3$</u> analogue

$U\ (x, y, z)$ de classe C^1 $U\ [M(t)]$ = constante sur (F)

<u>Remarque</u>

<u>Cas $n = 2$</u> a fixé

$U\ (x, y)$ = a est l'équation d'une courbe.

Cas $n = 3$

$U\ (x, y, z) = a$ est l'équation d'une surface.

VI. Fonctions indépendantes

VI.1. Définitions

- Cas $n = 2$

Soient U et V deux fonctions à 2 variables de classe C^1

VI.1.1. Définitions-1

U et V sont indépendantes si la matrice Jacobéenne.

$J = \frac{D(U,V)}{D\ (x,y)} = \begin{bmatrix} \frac{\vartheta U}{\vartheta x} & \frac{\vartheta U}{\vartheta y} \\ \frac{\vartheta V}{\vartheta x} & \frac{\vartheta V}{\vartheta y} \end{bmatrix}$ est inversible (det J ≠ 0) (en tant que fonction)

donc de rang maximal égale à 2

VI.1.2. Définitions-2

- Cas $n = 3$

U et V sont indépendantes si :

$$\begin{bmatrix} \frac{\vartheta U}{\vartheta x} & \frac{\vartheta U}{\vartheta y} & \frac{\vartheta U}{\vartheta z} \\ \frac{\vartheta V}{\vartheta x} & \frac{\vartheta V}{\vartheta y} & \frac{\vartheta V}{\vartheta z} \end{bmatrix}$$

est de rang 2 c'est-à-dire l'un des trois.

Déterminants extraits est différents de zéro.

VI.1.3. Exemples

Exemple 1

$U = x^2 + y^2$ $\qquad \frac{\vartheta U}{\vartheta x} = 2x$ $\qquad \frac{\vartheta U}{\vartheta y} = 2y$

$V = xy$ $\qquad \frac{\vartheta V}{\vartheta x} = y$ $\qquad \frac{\vartheta V}{\vartheta y} = x$

donc $\begin{bmatrix} \frac{\vartheta U}{\vartheta x} & \frac{\vartheta U}{\vartheta y} \\ \frac{\vartheta V}{\vartheta x} & \frac{\vartheta V}{\vartheta y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x & 2y \\ y & x \end{bmatrix}$

Le déterminant de cette matrice est : $2x^2 - 2y^2 \neq 0$ donc U et V indépendantes.

Exemple 2

$U = xyz$

$V = z + x$

$$\begin{bmatrix} \frac{\vartheta U}{\vartheta x} & \frac{\vartheta U}{\vartheta y} & \frac{\vartheta U}{\vartheta z} \\ \frac{\vartheta V}{\vartheta x} & \frac{\vartheta V}{\vartheta y} & \frac{\vartheta V}{\vartheta z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} yz & xz & xy \\ 1 & 0 & x \end{bmatrix}$$

Le déterminant extrait $\begin{vmatrix} yz & xz \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -xz \neq 0$ (en tant que fonction)

VI.2. Méthode pratique

- Cas $n = 2$ (S) : $\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} \Rightarrow Q\,dx - P dy = 0$

S'il existe U telle que $Q\,dx - Pdy = dU$

C'est-à-dire $Q\,dx - Pdy$ est une différentielle exacte alors U est une intégrale première.

En effet $dU = 0 \Rightarrow U$ est constante

$\Rightarrow U[M(t)] =$ constante $\forall\, M(t) \in (F)$

VI.2.1. Exemples

$$\frac{dx}{y} = -\frac{dy}{x}$$

$\Rightarrow x\,dx + y\,dy = 0$

$\Rightarrow d\left(\frac{x^2+y^2}{2}\right) = 0 \Rightarrow d(x^2 + y^2) = 0$

d'où $U = x^2 + y^2$ est une intégrale première

- Cas $n = 3$

(S) : $\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R}$

Rappel:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{\lambda a + \gamma c}{\lambda b + \gamma d} \qquad \forall\, (\lambda, \gamma) \neq (0,0)$$

Pour déterminer une intégrale première U il suffirait de trouver f, g, g des fonctions telles que: $fP + gQ + hR = 0$

et dans ce cas :

(S) : $\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R} = \frac{fdx+gdy+hdz}{0}$

Ce qui donne par un certain abus.

$R(fdx + gdy + hdz) = 0dz \Rightarrow fdx + gdy + hdz = 0$

Si $fdx + gdy + hdz$ est exacte alors elle est égale à dU ainsi $dU = 0 \Rightarrow U =$ constante donc U est une intégrale première.

Remarque

Cette méthode peut s'appliquer aussi pour le cas $n = 2$

VI.2.2. Exemples

Exemples.1

(S) : $\frac{dx}{y} = -\frac{dy}{x}$

On a vu que $U = x^2 + y^2$ est une intégrale première.

La solution est donnée par :

(γ_a) a pour équation paramétrique :

(γ_a) : $\begin{cases} x = a \cos t \\ y = a\, sint \end{cases}$

(S) est aussi un système différentiel linéaire

(S) $\Leftrightarrow \begin{cases} x'(t) = y(t) \\ y'(t) = -x(t) \end{cases} \Rightarrow y'' = -x' = -y$

$y = A \sin(t + \varphi)$ vérifie ce système. En effet $x = -y' = -A\cos(t + \varphi)$

La solution est $\begin{cases} x(t) = A\cos(\pi - t - \varphi) \\ y(t) = A\sin((\pi - t - \varphi) \end{cases}$

Exemples.2 : Résolution de l'

(S) : $\frac{dx}{x(y-z)} = -\frac{dy}{y(z-x)} = \frac{dz}{z(x-y)}$

On a ici : $P = x(y - z)$

$Q = y(z - x)$

$R = z(x - y)$

$P + Q + R = x(y - z) + y(z - x) + z(x - y)$

$P + Q + R = xy - zx + yz - xy + zx - zy) = 0$

Comme $\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R} = \frac{dx+dy+dz}{0}$

$\Rightarrow dx + dy + dz = 0$

$\Rightarrow d(x + y + z) = 0$

$\Rightarrow U = x + y + z$ est une intégrale première.

La deuxième intégrale première est donnée par :

$$yz\,P + xz\,Q + xy\,R = 0$$

donc $yz\,dx + xz\,dy + xy\,dz = 0$

comme $d(xyz) = yz\,dx + xz\,dy + xy\,dz$

on en déduit que $d(xyz) = 0$

Par suite $V = xyz$ est une deuxième intégrale première.

La solution $\delta a, b$ est la courbe d'équation

$$(\delta a, b) : \begin{cases} x + y + z = a \\ xyz \;=\; b \end{cases}$$

VII. Comment reconnaître une différentielle exacte

VII.1. Cas à 2 variables

Soient $P, Q \in C^1$

$Pdx + Qdy$ est exacte si et seulement si $\frac{\vartheta Q}{\vartheta x} = \frac{\vartheta P}{\vartheta y}$

Dans ce cas U telle que $dU = Pdx + Qdy$ est donnée par :

$$U(x, y) = \int_{xo}^{x} P(u, y)du + \int_{yo}^{y} Q(xo, v)dv$$

xo, yo étant fixés arbitrairement

VII.2. Cas à 3 variables

Soient $P, Q, R \in C^1$

$Pdx + Qdy + Rdz$ est exacte si et seulement

si $\overrightarrow{rot}\begin{pmatrix} P \\ Q \\ R \end{pmatrix} = \vec{o}$ où $\overrightarrow{rot}$ désigne le rotationnel

$$\overrightarrow{rot}\begin{pmatrix}P\\Q\\R\end{pmatrix} = \vec{\nabla} \wedge \begin{bmatrix}P\\Q\\R\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{\vartheta}{\vartheta x}\\ \frac{\vartheta}{\vartheta y}\\ \frac{\vartheta}{\vartheta z}\end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix}P\\Q\\R\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}\frac{\vartheta R}{\vartheta y} - \frac{\vartheta Q}{\vartheta z}\\ \frac{\vartheta P}{\vartheta z} - \frac{\vartheta R}{\vartheta x}\\ \frac{\vartheta Q}{\vartheta x} - \frac{\vartheta P}{\vartheta y}\end{bmatrix}$$ Il s'agit ici de la composante du vecteur $\overrightarrow{rot}\begin{pmatrix}P\\Q\\R\end{pmatrix}$

Dans ce cas :

$U(x, y, z) = \int_{xo}^{x} P\,(u, y, z)du + \int_{yo}^{y} Q(xo, v, z)ow + \int_{zo}^{z} R(xo, yo, w)dw$

VII.3. <u>Exemples</u>

VII.3.1. <u>Exemple-1</u>

$w = y\,dx + x\,dy$

On a $P = y\,; Q = x$ $\qquad \frac{\vartheta Q}{\vartheta x} = \frac{\vartheta P}{\vartheta y} = 1$

donc w est exacte

$w = dU$ où $U(x, y) = \int_{xo}^{x} P\,(u, y)du + \int_{yo}^{y} Q(xo, v)ow$

$= \int_{xo}^{x} ydu + \int_{yo}^{y} xo\ du$

$= y(x - xo) + xo(y - yo) = xy - xoyo$

On prend $U(x, y) = xy$ (U est définie à une côte près)

VII.3.2. <u>Exemple-2</u>

$w = \frac{yz}{x}\,dx + z\,lnx\,dy + y \ln x\,dz$

$P = \frac{yz}{x} \qquad \frac{\vartheta P}{\vartheta z} = \frac{y}{x} \qquad \frac{\vartheta R}{\vartheta x} = \frac{y}{x}$

$Q = z\,lnx \qquad \frac{\vartheta Q}{\vartheta z} = lnx \qquad \frac{\vartheta Q}{\vartheta x} = \frac{z}{x}$

$R = y\,lnx \qquad \frac{\vartheta R}{\vartheta y} = lnx \qquad \frac{\vartheta P}{\vartheta y} = \frac{z}{x}$

$$\overrightarrow{rot}\begin{bmatrix}P\\Q\\R\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{\vartheta R}{\vartheta y} - \frac{\vartheta Q}{\vartheta z} = lnx - lnx = 0\\ \frac{\vartheta P}{\vartheta z} - \frac{\vartheta R}{\vartheta x} = \frac{y}{x} - \frac{y}{x} = 0\\ \frac{\vartheta Q}{\vartheta x} - \frac{\vartheta P}{\vartheta y} = \frac{z}{x} - \frac{z}{x} = 0\end{bmatrix}$$

d'où $\overrightarrow{rot}\begin{bmatrix}P\\Q\\R\end{bmatrix} = \vec{o} \Rightarrow w$ est une différentielle exacte

Chapitre 5 : TRANSFORMEE DE LAPLACE

I. Transformée de Laplace

I.1. Définition

Soit $f(t)$ une fonction à une variable dont le support noté supp f est inclus dans $\mathbb{R}^+$ c'est-à-dire $f(t) = 0$ si $t < 0$.

La transformée de Laplace de f si elle existe est :

$$L[f(t)] : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \qquad \text{avec } \Omega \subset \not\subset$$

$$p \longrightarrow \int_0^1 f(t)e^{-} p^t \, dt \,;\, p \in\not\subset$$

I.2. Remarque

$\forall p \in\not\subset \quad L[f(t)]\,(p)$ n'existe pas toujours.

I.3. TABLEAU DE : $L[f(t)](p)$

Quelques valeurs de $L[f(t)](p)$

$f(t)$ **pour** $t > 0$	$L[f(t)](p)$	**Domaine de définition de** $L[f(t)](p)$
1	$\frac{1}{p}$	$Re(p) > 0$
t	$\frac{1}{p^2}$	$Re(p) > 0$
e^{-at}, $a \in\not\subset$		
e^{-at}, $\cos(wt)$	$\frac{p+a}{(p+a)^2 + w^2}$	$Re(p+a) > 0$
e^{-at}, $\sin(wt)$	$\frac{w}{(p+a)^2 + w^2}$	$Re(p+a) > 0$

Re signifie : partie réelle ($p \in\not\subset$)

I.4. PROPRIETES :

P_1 : L est $\not\subset$ - linéaire

$$L(\lambda f + g) = \lambda\, L(f) + L(g)$$

P$_2$: $L(t^n\, f(t)(p) = (-1)^n \frac{d^n}{dp^n}[f(t)(p)]$

P$_3$: $L[f(t-a)](p) = e^{-pa}\, L[f(t)](p)$

P$_4$: $L[f\binom{k}{t}(p) = p^{\,k} L[f(t)](p) - p^{k-1}\, f(o^+)$
$-p^{k-2}\, f'(o^+)$ ………..$pf^{(k-2)}(o^+)$ - $f^{(k-1)}\, f(o^+)$
où $f^{(l)}(o^+) = \lim_{t\to o^+} f^{(l)}(t)$

I.5. <u>Application</u>

Résolution de l'équation différentielle :

$$x''(t) - 3x'(t) + 2x(t) = t$$

avec $x(o) = 1$, $x'(o) = -1$
Pour cela, on cherche $x(t)$ telle que $x(t) = 0$
si $t < 0$. On utilise:

$$L(f^{(k)}(t))(p) - p^k \big(L(f)\big)(p) = p^{k-1}\, f(o^+)$$

$$\begin{aligned} L(x''(t))(p) &= p^2\, L\big(x(t)\big)(p) - p\, x(o^+) - x'(o^+) \\ &= p^2\, L\big(x(t)\big)(p) - p + 1 \\ L(x'(t))(p) &= p\, L\big(x(t)\big)(p) - x(o^+) \\ &= p\, L\big(x(t)\big)(p) - 1 \end{aligned}$$

$$L(x''(t) - 3x'(t) + 2x(t))(p) = L(t)(p)$$

$$\Rightarrow p^2L - p + 1 - 3pL + 3 + 2L = \frac{1}{p^2}$$

$$L(p^2 - 3p + 2) = \frac{1}{p^2} + p - 4$$

$$L\big(x(t)(p)\big) = \frac{\frac{1}{p^2} + p - 4}{p^2 - 3p + 2} = \frac{p^3 - 4p^2 + 1}{p^2(p-1)(p-2)}$$

On décompose en éléments simples et ensuite consulter les formules.

$$\frac{p^3 - 4p^2 + 1}{p^2(p-1)(p-2)} = \frac{a}{p^2} + \frac{b}{p} + \frac{c}{p-1} + \frac{d}{p-2}$$

$$\frac{\cancel{p^2}(p^3 - 4p^2 + 1)}{\cancel{p^2}(p-1)(p-2)} = a + bp + \frac{cp^2}{p-1} + \frac{d}{p-2} \quad (1)$$

On prend $p = 0$

(1) Devient : $\frac{1}{2} = a \quad \Rightarrow \quad a = \frac{1}{2}$

$$\frac{\cancel{p^2}(p^3-4p^2+1)}{\cancel{p^2}(p-1)(p-2)} = \frac{a}{p} + b + \frac{cp}{p-1} + \frac{dp}{p-2}$$

faisons tendre p vers l'infini

$$\frac{p^3 - 4p^2 + 1}{p\,(p-1)(p-2)} \underset{p\to+\infty}{\rightarrow} 1$$

$$\frac{a}{p} + b + \frac{cp}{p-1} + \frac{dp}{p-2} \underset{p\to+\infty}{\rightarrow} b + c + d$$

donc $b + c + d = 1$

pour $p = -1$ $\qquad \frac{p^3-4p^2+1}{p^2(p-1)(p-2)} = \frac{-1-4+1}{-2(-3)} = \frac{-4}{6} = -\frac{2}{3}$

$$\frac{a}{p^2} + \frac{b}{p} + \frac{c}{p-1} + \frac{d}{p-2} = a - b - \frac{c}{2} - \frac{d}{3}$$

$$= \frac{1}{2} - b - \frac{c}{2} - \frac{d}{3} \qquad \text{car } a = \frac{1}{2}$$

$$= \frac{3-6b-3c-2d}{6}$$

donc $-\frac{4}{6} = \frac{3-6b-3c-2d}{6}$

$\Rightarrow$ -7=$-6b - 3c - 2d$

$\Rightarrow \underline{6b + 3c + 2d = 7}$ (✷✷)

pour $p = -2$

$$\frac{-8-16+1}{4(-3)(-4)} = \frac{a}{4} - \frac{b}{2} - \frac{c}{3} - \frac{d}{4}$$

$$= \frac{3a - 6b - 4c - 3d}{4.3}$$

$\Rightarrow \frac{-23}{4} = 3a - 6b - 4c - 3d$

$= \frac{2}{3} -6b - 4c - 3d \qquad car\ (a = \frac{1}{2})$

$\frac{-23-6}{4} = -6b - 4c - 3d$

$-29 = -24b - 16c - 12d$

$\Rightarrow \underline{24b + 16c + 12d = 29}$ (✷✷)

D’après les relations (✷),(✷✷),(✷✷✷)

on a $\begin{cases} b+c+d=1 \\ 6b+3c+2d=7 \\ 24b+16c+12d=29 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} c=2 \\ b=\frac{3}{4} \\ d=-\frac{7}{4} \end{array}$

d’où la solution $x(t)=\begin{cases} at+b+cet+de2t \;\; si\; t>0 \\ 0\; si\; t<0 \end{cases}$

En effet :

$$\frac{p^3-4p^2+1}{p^2(p-1)(p-2)}=\frac{a}{p^2}+\frac{b}{p}+\frac{c}{p-1}+\frac{d}{p-2}$$

$= a.L(t)+bL(1)+cL(e^t)+dL(e^{2t})$

$= L[at+b+ce^t+de^{2t}]\,(p)$

car L est linéaire

Comme $L\big(x(t)\big)(p)=L(at+b+ce^t+de^{2t})\,(p)$

On en déduit que :

$x(t)=at+b+ce^t+de^{2t}\,;\, t>0$

$=\frac{1}{2}t+\frac{3}{4}+2e^t-\frac{7}{4}e^{2t}\,;\, t>0$

donc $x(t)=\begin{cases} \frac{1}{2}t+\frac{3}{4}+2e^t-\frac{7}{4}e^{2t} \;\; pour\; t>0 \\ \\ 0\; si\; t<0 \end{cases}$

CONCLUSION PARTIELLE

On vient de déterminer la solution de l'équation différentielle du second ordre avec second membre à l'aide de la transformée de Laplace.

Cette méthode est très efficace pour la résolution d'une telle équation différentielle

TROISIÈME PARTIE

Dans cette troisième partie on va voir

- L'équation de la Chaleur
- Les oscillateurs mécaniques et électroniques
- Les équations des ondes sur $\mathbb{R}$

Dans ces chapitres on va utiliser des diverses méthodes pour résoudre des équations aux dérivées partielles rencontrées dans les chapitres précédents

Chapitre 6 : ÉQUATION DE LA CHALEUR

Position du problème

On considère une barre de longueur $l = 1$ soumise à une source de chaleur de densité $f(x,t)$ en un point x ∈] 0,1[et à l'instant y. on s'intéresse à l'évolution de la température $u(x,t)$ en un point x' e à l'instant t lorsqu'on maintient le bord $x = 0$ et $x = 1$ à température constante (par exemple à zéro). Grâce à des lois physiques et mécaniques on établit l'équation de l'évolution de la température :

$\frac{\partial u}{\partial t}=\wp \frac{\delta^2 u}{\delta x^2} + f(x,t)$; x ∈ $]0,1[$, t ∈ $]0,T[$

Où $\wp > 0$ désigne la conductivité du matériel.

Les conditions aux limites ainsi que les conditions initiales sont données par :

$u\,(0,t) \;=\; u\,(1,t) \;=\; 0$ pour $t \;\in\;]0,T[$

$u\,(x,0) \;=\; u_0\,(x)$ pour $x \;\in\;]0,1[$, c'est la répartition de la température initiale

1. MÉTHODE DE SÉPARATION DES VARIABLES

Soit à résoudre l'équation aux dérivées partielles :

(E) : $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ pour x ∈ $]0,1[$ et $t > 0$

On veut déterminer l'évolution de la température $u(x,t)$ c'est une application à deux variables en x et t

La méthode consiste à déterminer deux applications X et T de telle sorte que $u(x,t) \;=\; X(x).T(t)$

On a $\frac{\partial u}{\partial t}\,(x,t) = X(x)\frac{\partial T(t)}{\partial t}$ d'une part, d'autre part

$\frac{\partial u}{\partial x}\,(x,t) = \left[\frac{\partial X(x)}{\partial x}\right]$.T$(x)$ et en dérivant pour une deuxième fois l'expression par rapport à x, on obtient $\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial X(x,t)}{\partial x}\right] = \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial X(x)}{\partial x}\right].T(x)$

Ce qui donne $\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x,t) = \frac{\partial^2}{\partial x^2}X(x).T(x)$

L'équation (e) devient : $X(x)\frac{\partial T(t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2}.T(t)$

Ce qui donne $\frac{\frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2}}{X(x)} = \frac{\frac{\partial T(t)}{\partial t}}{T(t)}$

On a $\begin{cases} \frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2} = KX(x)(1) \\ \\ \frac{\partial T(t)}{\partial t} = KT(t)(2) \end{cases}$

On va distinguer 3 cas suivant les valeurs et le signe de K

1.1. Si K=0

(1)⇒ $\frac{\partial X^2(x)}{\partial x^2} = 0$ c'est une équation différentielle du second ordre en *x*, qui admet comme solution :

$X(x)$ = *ax* +*b* avec a,b,∈ $\Re$

Et (2) ⇒ $\frac{\partial T(t)}{\partial t} = 0$ c'est une équation différentielle du premier ordre en t qui admet comme solution :

$T(tx)$ = *c* avec c ∈ $\Re$

L'évolution de la température est donc donné par :

U$(x,t) = X(x).T(t)$

=$(ax+b).c$

=$c(ax+b)$ $avec\ a,b,c \in \Re$

Pour K=0 u$(x,t) = c(ax+b) = acx + bc$ est une solution de (E)

1.2.Si K=$\delta^2 > 0$[13]

Supposons maintenant que K>0 et qu'il existe $\sigma \epsilon \Re$ tel que K=∂^2

La relation (1) devient $\frac{\partial X^2(x)}{\partial x^2} = \partial^2 X(x)$

C'est l'équation différentielle du second degré en *x* admet comme solution

X(*x*) = *a*$e^{\delta x} + be^{-\delta x^*}$avec a,b ∈ $\Re$

La relation (2) donne $\frac{\partial T(t)}{\partial t} = \partial^2 t$. Cette équation différentielle du 1^e ordre en t admet comme solution : $T(t) = c \exp\ (\ \delta^2 T)$ avec c ∈ $\Re$

D'où la solution de (e) :

$u(x,t) = c \exp\ (\ \delta^2 T)[a \exp(\delta x) + b \exp(-x)]$ avec a,b,c ∈ $\Re$

C'est l'évolution de la température pour K=$\delta^2 > 0$

---

[13] δ : conductivité du matériel

1.3.<u>Si K=$-\delta^2 < 0$</u>

Supposons que K soit négatif et qu'il existe $\delta \in$ IR tel que K=$-\delta^2$

(1) devient : $\frac{\partial^2 X(x)}{\partial t} = -\delta^2 \mathrm{X(x)}$ qui admet comme solution X(x)= $\cos(\delta x) + b\sin(\delta x)$

avec a, b $\in$ IR

d'une part, 2t d'autre part :

(2) Donne : $\frac{\partial^2 T(t)}{\partial t} = -\delta^2 \mathrm{T(t)}$qui admet comme solution

$T(t) = c \exp\left(-\delta^2 t\right)$ avec c $\in$ IR

Finalement l'évolution de la température pour ce dernier cas où K=$-\delta^2$est donnée par une famille infinie de solution :

$u(x,t) = c \exp\left(-\delta^2 t\right)[\mathrm{a} \cos(\delta x) + b \sin(\delta x)]$

*e et exp désigne la même fonction exponentielle

Munissons maintenant (E) des conditions aux frontières (F) et des conditions initiales (I) fournies par :

$$(F): \begin{cases} u(0,t) = 0 \ \forall\, t > 0 \\ \frac{\partial u}{\partial x}(1,t) + u(1,t) = 0 \forall\, t > 0 \end{cases}$$

$$(F): \begin{cases} u(x,0) = f(x)\ avec\ f(0) = 0\ et\ f'(1) + f(1) = 0 \\ f \epsilon\ \partial^1, f \neq 0 \end{cases}$$

On cherche encore $u(x,t)$ par la méthode de séparation de variable

Soit t>0

(F) devient :

- $u(x,0) = \Leftrightarrow X(0) \Longrightarrow X(0) = 0$
- $\frac{\partial u}{\partial x}(1,t) + u(1,t) = 0$ est équivalent à

$$(F): \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x}(1,t) = T(t).X'(1) \\ u(1,t) = X(1).T(t) \\ [X'(1) + X(1)]T(t) = 0 \qquad (3) \end{cases}$$

La dernière équation (3) nous donne :

$X'(1) + X(1) = 0$

Les conditions aux frontières (F) s'écrivent alors

(F): $\begin{cases} X(0) = 0 \\ X'(1) + X(1) = 0 \end{cases}$

D'autre part les conditions initiales (I) deviennent

(I): $\begin{cases} u(x,0) = f(x) \Leftrightarrow X(x).T(0) = f(x)\ \forall x \in]0,1[\\ f(0) = 0 \Leftrightarrow u(0,0) = X(0).T(0) = 0 \\ f'(1) + f(1) = 0 \Leftrightarrow [X'(1) + X(1)].T(0) = 0 \end{cases}$

Comme $f \neq 0$ donc $T(0) \neq 0$

par conséquent $[X'(1) + X(1)].T(t) = 0 \Longrightarrow X'(1) + X(1) = 0$

Reprenons la résolution des équations différentielles

$\begin{cases} \frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2} K\ X(t) \\ \frac{\partial T(t)}{\partial t} K\ T(t) \end{cases}$ avec K ∈ IR en tenant compte des conditions (F) et (I)

Distinguons encore 3 cas suivant les valeurs de K ∈ $\mathbb{R}$

- Si $K = 0$

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2} = K\ X(x) \Longrightarrow \frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2} = 0 \Longrightarrow X(x) = ax + b \\ K = 0 \end{cases}$$

$$avec\ a, b, \in IR$$

Comme X(0)=0 alors $s \quad \Longrightarrow b = 0$

Par suite $X(x) = ax\ avec\ a \in IR$

Considérons $X'(1)$ et $X(1)$

$X'(1) + X(1) = a + ax$

Pour *x*=1 on a $a + a.1 = a + a = 2a$

Comme $X'(1) + X(1) = 0$ on a en déduit que la valeur du nombre réel a est aussi nulle

Par conséquent : $X(x) = 0$

(I) nous donne $f(x) = X(x).T(0)$ et ceci pour tout $x \in]0,1[$ autrement dit $f \equiv 0(f\ identiquement\ nulle)$ce qui contredit $f \not\equiv 0$

Finalement la valeur de K égale à 0 est à exclure. Elle ne convient pas. Passons maintenant au deuxième cas ie $K = \delta^2 > 0$

- Si $K = \delta^2, \quad \delta > 0$

$$\frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2} = \partial^2 X(x) \Longrightarrow X(x) = a \exp(\delta x) + b \exp(-\delta x)$$

$X(0) = 0 \Longrightarrow a + b = 0 \Longrightarrow b = -a$

$X'(1) + X(1) = 0 \Rightarrow a\,\delta \exp(\delta) - b \exp(-\delta) + a\ \exp(\delta) + b \exp(-\delta) = 0$

$\Rightarrow a\,\partial[\exp(\delta) + \exp(-\delta)] + a \exp(\delta) - \exp(-\delta) = 0\ (4)\ en\ prenant\ x = 1$

a est différent de zéro sinon b=-a=0

par suite $X \equiv 0$ ce qui est impossible

$(4)\, devient: \delta 2ch\delta + 2sh\delta = 0\ pour\ \delta > 0$ c'est impossible car cht$\geq 1\ \forall\, t \in IR$

etsht$> 0\ \forall\, t > 0$

Donc K= δ^2 >0 est aussi à exclure. Il reste le dernier cas où K= $-\delta^2$ <0, $\delta > 0$

- Si $K = -\delta^2 < 0,\quad \delta >$

$$\frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2} - \partial^2 X(x) \Rightarrow X(x) = a \cos \delta x + b \sin \delta x\, ; a, b \in IR$$

$\mathrm{X}(0) = 0 \Rightarrow a = 0\ donc\ b \neq 0$

$\mathrm{X}'(1) + \mathrm{X}(1) = 0 \Rightarrow b\delta cos\delta + bsin\delta = 0 \Rightarrow \delta cos\delta = -\,sin\delta$

$\Rightarrow \delta = -\operatorname{tg} \delta$

Ce qui nous donne une famille $X(x) = bsin(\delta x) avec - \delta = \operatorname{tg} \delta; \delta > 0$

Il reste à déterminer T(t)

Pour K= $\delta^2 < 0$

$$\frac{\partial T(t)}{\partial t} = -\partial^2 T(t) \Rightarrow T(t) = cexp(-\delta^2 t) avec\ c \in IR$$

Comme X(x).T(0)=f(x)

On en déduit que : $[b \sin(\delta x)]c = f(x)$

Cette relation permet d'avoir la valeur du nombre réel sur IR $u(x,t)$ est la mesure de la température du point d'abscisse x à l'instant $t$avec conditions initiales. On utilise la transformation de Fourier pour résoudre $\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}$=$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}$

Fixons alors t ; $u(x,t) = f(x)$

On a : $\emptyset(\delta)$=F$[f(x)](\delta) = \int_{IR} u(x,t)\,.\,e^{-2i\pi x} dx$

Comme $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ on en déduit que :

$$\frac{\partial}{\partial t}\emptyset(\delta,t) + 4\delta^2\pi^2\emptyset(\delta,t) = 0$$

$$\emptyset(\delta,t) = G(\delta)\exp(-4\pi^2\delta^2 t) = F[f_t\ (x)](\delta)$$

Pour t fixé et à l'aide du tableau des valeurs de F on obtient :

$$\exp(-4\pi^2\delta^2 t) = F\left[\frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\exp\left(-\frac{x^2}{4t}\right)\right](\delta)$$

Si $g(x) = \bar{F}\ (G(\delta))$ (transformée inverse)

Comme : $F(\mathrm{f} * g) = F(f) - F(g)$

On a : $F(\mathrm{f_t}) = F(g) - F\left[\frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\exp\left(-\frac{x^2}{4t}\right)\right](\delta)$

$= F\left[g * \left(\frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\exp - \frac{x^2}{4t}\right)\right]$

D'où $u(\mathrm{x,t}) = \mathrm{f_t}(x) = g * \frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\exp\left(-\frac{x^2}{4t}\right)$

En particulier sur $\mathbb{R}^+$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad x, t \geq 0 \\ u(x, 0t) = f(\mathrm{x}); \mathrm{u}(0,\mathrm{t}) = 0 \end{cases}$$

$u(x,t)$ est donnée par une certaine formule pour f(x)=A où désigne une constante.

Désignons par erf la fonction : error fonction définie par :

$erf(t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^t \exp(-\mathrm{s}^2)\, ds$ et par $erfc$ la fonction d'erreur complémentaire.

Rappelons que :$erf(t) + erfc(t) = 1 \forall t \geq 0$

La solution fondamentale de :

$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ est donnée par :

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\exp\left(-\frac{x^2}{4t}\right)$$

CONCLUSION PARTIELLE

On vient de déterminer l'évolution de la température $u(x\,,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\exp(-\frac{x^2}{t})$ en un point x et à l'instant t lorsqu'on maintient le bord x = 0 et x = 1 à température constante

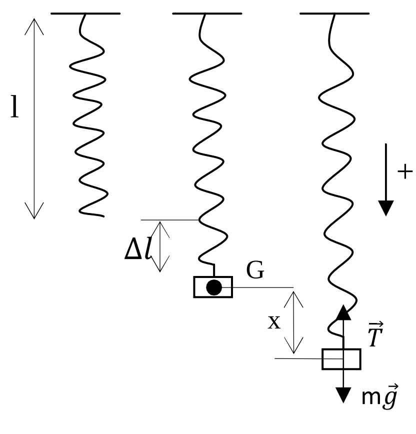
CHAPITRE 7 : OSCILLATEURS MECANIQUES ET ELECTRIQUES

Nous allons essayer d'utiliser, d'appliquer les méthodes de résolution d'une équation différentielle pour établir l'équation du mouvement et l'expression de l'énergie dans le cas suivant :

- Oscillateurs non amortis ;
- Oscillateurs amortis par résistance fluide ou électrique. Cela permet d'étudier la théorie générale des oscillateurs. Pour cela, nous allons étudier le mouvement d'un pendule de torsion, d'un pendule pesant, d'un pendule simple et d'un circuit oscillant. En réalité, ces divers systèmes présentent des points communs essentiels. Ils font partie des oscillateurs mécaniques et électriques.

I. <u>OSCILLATEURS NON AMORTIS</u>

I.1. Mouvement rectiligne d'une masse ponctuelle accrochée à un ressort



On accroche une masse ponctuelle de masse m à un ressort de raideur *k* de masse négligeable. On tire la masse négligeable. On tire la masse verticalement vers le bas. *A* l'instant t, le centre de gravité *G* se trouve à l'abscisse x de la position d'équilibre *G0* prise comme origine de l'axe vertical descendant. On admet que les forces de frottement et l'action de l'air sont négligeables. L'inventaire des forces appliquées nous donne $\overrightarrow{mg}$.et $\vec{T}$

L'équation différentielle régissant le mouvement pris par la masse est :

$m\vec{g} + \vec{T} = m\vec{\gamma}$ (1)

En projetant sur l'axe vertical descendant, on obtient :

$m\|\vec{g}\| - \|\vec{T}\| = m\|\vec{\gamma}\|$ avec $\|\vec{T}\| = k(x + \Delta l)$

(1) devient $m\|\vec{g}\| - k(x + \Delta l) = m\|\vec{\gamma}\|$

$\Leftrightarrow m\|\vec{g}\| - kx - k\Delta l = m\|\vec{\gamma}\|$

$\Leftrightarrow \underbrace{m\|\vec{g}\| - k\Delta l}_{} - kx = m\frac{d^2x}{dt^2}$ avec $\|\vec{\gamma}\| = \frac{d^2x}{dt^2}$

0

$$\Leftrightarrow m\frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0$$

Comme $m \neq 0$ on a $\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0$ (2)

Posons $w^2 = \frac{k}{m} > 0$ (car > 0 , $m > 0$)

Comme l'équation horaire du mouvement de la masse m dépend du temps t, (2) devient : $\frac{d^2x(t)}{dt^2} + w^2x(t) = 0$

La solution générale de cette équation différentielle est : $x(t) = a\sin(wt + \varphi)$ où a et φ sont des constantes déterminés par les conditions initiales. La masse m effectue un mouvement oscillatoire de translation autour de G_0.

Remarque Conservation de l'énergie mécanique du système

Il y a conservation de l'énergie mécanique du système

En effet :

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + w^2x(t) = 0$$

$$\frac{d}{dt}\frac{d\,x(t)}{dt} + w^2x(t) = 0$$

En multipliant par dt on obtient

$$d\,(\frac{d\,x(t)}{dt}) + w^2x(t)dt = 0 \quad (1)$$

Posons

$$\dot{x} = \frac{d}{dt}\,x(t)$$

(1) Devient :

$$d\dot{x} + w^2x(t) = 0 = 0.dt$$

En intégrant membre à membre on obtient :

$$\int d\dot{x} + w^2 \int x(t)dt = \int o\,dt$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\dot{x}^2 + w^2 \int x(t)dt = Cste \quad \text{(Constante)}$$

$$\frac{1}{2}\dot{x}^2 + \frac{k}{m}\int x(t)dt \Rightarrow \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + k\int x(t)dt = Cste$$

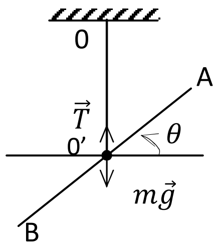
Où $E_c = \frac{1}{2}m\dot{x}^2$ est l'énergie cinétique

Et $k\int x(t)dt$ l'énergie potentielle

Comme l'énergie cinétique ajoutée à l'énergie potentielle est égale à une constante, qui n'est autre que l'énergie mécanique du système.
On en conclut qu'il y a conservation de l'énergie mécanique du système.

.

I.2. Pendule de Torsion



Un système pesant par exemple un barreau est suspendu à un fil de rotation qui reste vertical. Ce fil constitue l'axe de rotation autour duquel s'effectue le mouvement du système. On écarte le pendule d'un angle θ à partir de sa position d'équilibre.

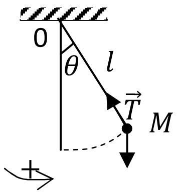
Les forces extérieures appliquées au pendule sont $\overrightarrow{mg}$ et $\vec{T}$:
Soient $M_{\overrightarrow{mg}}$ et $M_{\vec{T}}$ le moment respectif de $\overrightarrow{mg}$ et $\vec{T}$

La somme algébrique des moments des forces appliquées au pendule est :
$\sum \overline{u}$=$\overline{u}_{\overrightarrow{mg}}$ +$\overline{u}_{\vec{T}}$ = (3)
Comme $\overrightarrow{mg}$ et $\vec{T}$ sont portées par l'axe de rotation
(3) devient $\sum \vec{u}$=$-c\theta$ car $\vec{u}_{\overrightarrow{mg}}$=$\overline{u}_{\vec{T}} = 0$
C étant la constante de torsion du fil
En appliquant la R.D.F (relation fondamentale de la dynamique) du solide en rotation on a :
$-c\theta = J\ddot{\theta}$ où J est le moment d'inertie du pendule par rapport à l'axe
L'équation différentielle est donnée par :

(4) $$\frac{d^2\theta(t)}{dt^2} + \omega^2\theta(t) = 0 \text{ avec } \omega^2 = \frac{C}{J}$$

L'équation horaire du mouvement du système pesant, solution de l'équation différentielle (4) est donnée par :
$\theta(t) = \theta_m sin(\omega t + \varphi)$
Où a et φ sont des constantes déterminées par les conditions initiales. Le système effectue un mouvement oscillatoire sinusoïdal de rotation autour de la position d'équilibre.

I.3. Pendule de simple



(fig 3)

Un point matériel M de masse m est lié à un point fixe 0 par un fil de masse négligeable et de longueur l. Le fil restant tendu, on écarte le pendule d'un angle θ et on l'abandonne sans vitesse.

$\sum \bar{u}$ = $\bar{u}_{m\vec{g}}$+$\bar{u}_{\vec{T}}$ = $\bar{u}_{\overrightarrow{mg}}$ car $\overrightarrow{T}$ rencontre l'axe de rotation ; $= -mglsin$

Pour les petites oscillations $sin\,\theta \cong \theta$. En appliquant la RFD rotation au point M on a :

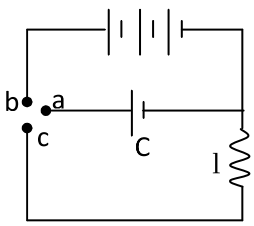
$-mgl\theta = ml^2\ddot{\theta}$

C'est-à-dire $\frac{d^2\theta(t)}{dt^2} + \omega^2 = 0^{(5)}$avec $\omega^2 = \frac{g}{l}$

L'équation horaire du mouvement est la solution générale de (5) : $\theta(t) = \theta_m \sin(\omega t + \varphi)$ où a et φ sont des constantes déterminées par les conditions initiales

Le point M effectue un mouvement oscillatoire sinusoïdal

I.4. __Circuit oscillant : analogie électrique__



(fig. 4)

Le circuit oscillant est composé d'une self L et d'un condensateur de capacité C préalablement chargé (contact ab). Si i désigne le courant de décharge et U la tension aux bornes de la self est

U=$L\frac{di}{dt}$

En dérivant on obtient :

$$\frac{du}{dt} = L\frac{d^2i}{dt^2} \quad (6)$$

Comme U= $\frac{Q}{C} \Rightarrow \frac{du}{dt} = \frac{1}{C}\frac{dQ}{dt} = -\frac{i}{C} car \frac{dQ}{dt} = -i$

$(6) devient$: $L\frac{d^2i}{dt^2} = -\frac{i}{C} \Leftrightarrow \frac{d^2i}{dt^2} + \frac{i}{LC} = 0$ (7)

Posons $\omega^2 = \frac{1}{LC}$

(7) devient : $\frac{d^2i}{dt^2} + \omega^2 i = 0$

Le courant de décharge $i(t)$ est la solution générale de (7). C'est un courant sinusoïdal donné par :

$i(t) = i_m sin(wt + \varphi)$

$\frac{i}{C}$ Joue le rôle de raideur et L joue le rôle d'inertie

II. OSCILLATEURS AMORTIS

Un mouvement est amorti à cause des frottements : le frottement fluide (gaz, liquide) et le frottement, solide

II-1-Oscillateur de translation

$F' = -f\frac{dx}{dt}$ avec f constante de resistance fluide

D'après la RDF $\vec{F} = m\vec{\gamma}$ ce qui donne: en projetant

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -f\frac{dx}{dt} - kx$$

C'est-à-dire $m\frac{d^2x}{dt^2} + f\frac{dx}{dt} + kx = 0$

II-2-Oscillateur de rotation

$u' = -f\frac{d\theta}{dt}$ avec f constante de résistance fluide

D'après la RDF $\frac{Jd^2\theta}{dt^2} = -f\frac{d\theta}{dt} - c\theta$

C'est-à-dire $\frac{Jd^2\theta}{dt^2} + f\frac{d\theta}{dt} + c\theta = 0$

II-3-Circuit oscillant

Le circuit comporte une capacité C, une résistance R et une self L. La tension aux bornes de la capacité est $U = \frac{Q}{C}$ et aux bornes de la self et de la résistance $U = L\frac{di}{dt} + Ri$

On a $\frac{q}{c} = L\frac{di}{dt} + Ri$

Comme il y a décharge $dq < 0\ et\ i = -\frac{dq}{dt}$

D'où$\frac{q}{c} = -L\frac{d^2q}{dt^2} - R\frac{dq}{dt}$

Par suite $L\frac{d^2q}{dt^2} + R\frac{dq}{dt} + \frac{1}{c}$q=0

Conclusion :

Pour les oscillateurs amortis les trois équations différentielles sont données par :

i. $m\frac{d^2x}{dt} + f\frac{dx}{dt} + kx = 0$
ii. $J\frac{d^2\theta}{dt^2} + f\frac{d\theta}{dt} + c\theta = 0$

iii. $L\frac{d^2q}{dt^2} + R\frac{dq}{dt} + \frac{1}{C}q = 0$

Qui peuvent s'écrire sous la forme générale :

$$\frac{d^2s}{dt^2} + 2\lambda\frac{ds}{dt} + w_0^2 s = 0$$

<u>Résolution de</u> (e)

L'équation caractéristique de cette équation différentielle du second ordre est :

(e') $r^2 + 2\lambda r + w_0^2 s = 0$

Le discriminant de (e') est :

$\Delta' = \lambda^2 - w_0^2$ (discriminant réduit)

Distinguons 3 cas suivant les valeurs de Δ'

- **<u>Si $\Delta' > 0$</u>**

(e') admet 2 racines réelles distinctes données par :

$$r_1 = -\lambda + \sqrt{\lambda^2 - w_0^2}$$

$$r_2 = -\lambda - \sqrt{\lambda^2 - w_0^2}$$

Posons $\lambda' = \sqrt{\lambda^2 - w_0^2}$ avec $\lambda > \lambda'$

Donc $r_1 = -\lambda + \lambda'$

$r_2 = -\lambda - \lambda'$

La solution générale de (e) est :

$s(t) = A_1 e^{r_1 t} + A_2 e^{r_2 t}$ avec A_1 et A_2 des constantes à déterminer suivant les condition initiales

$s(t) = A_1 e^{(-\lambda+\lambda')t} + A_2 e^{(-\lambda-\lambda')t}$

$= A_1 e^{-\lambda t}.e^{\lambda' t} + A_2 e^{-\lambda t}.e^{-\lambda' t}$

$= e^{\lambda' t}\,(A_1 e^{-\lambda t} + A_2 e^{-\lambda t})$

Comme $\lambda > \lambda'$, $e^{-\lambda t}$ emporte sur $e^{\lambda' t}$ quand $t \longrightarrow +\infty$

Par suite $s(t) \longrightarrow 0$ lorsque $t \longrightarrow +\infty$

$s(t)$ ne présente aucune périodicité. On dit que le mouvement est apériodique non critique.

- **<u>Si $\Delta' = 0$</u>**

(e') admet une racine double $r = -\lambda = -w_0$

La solution générale de (e) s'écrit :

$$s(t) = (at+b)e^{rt} = (at+b)e^{w_0 t}$$

Avec *a* et *b* des constantes à déterminer à partir des conditions initiales

Quand $\longrightarrow +\infty$, $s(t) \longrightarrow 0$ car $e^{-w_0 t}$ emporte sur $at+b$.

Le mouvement amorti est apériodique ou encore non oscillatoire critique.

- **<u>Si $\Delta' < 0$</u>**

(e') admet une racine complexes conjuguées

$$r_1 = -\lambda + i\sqrt{w_0^2 - \lambda^2}$$

$$r_2 = -\lambda - i\sqrt{w_0^2 - \lambda^2}$$

Posons $\quad w = \sqrt{w_0^2 - \lambda^2} \quad$, w s'appelle pseudo-pulsation

$T = \frac{2\pi}{w}$ pseudo-période

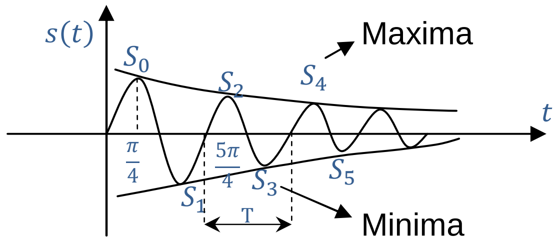
La solution générale de l'équation différentielle (e) s'écrit

$s(t) = e^{-\lambda t}(ae^{iwt} + be^{iwt})$ avec a_1 et a_2 étant déterminés par les conditions initiales

$s(t)$ peut s'écrire :

$s(t) = e^{-\lambda t}\sin(wt + \varphi)$

$s(t)$ présente alors une périodicité à cause de la fonction $sinus$, mais son amplitude diminue et tend à s'annuler quand t augmente à cause de $e^{-\lambda t}$. Le mouvement est oscillatoire



(Fig. 5) graphe de s

Decrement Logarithimique

Pour $\varphi = 0$ on a $s(t) = \Delta\, e^{-\lambda t} \sin wt$. Les extrema (minima ou maxima) s'obtiennent par $\sin wt = \pm 1$

Soit pour $wt = \frac{\pi}{2} + k\pi \Rightarrow t = (2k+1)\frac{\pi}{2w} = (2k+1)\frac{T}{4}$

Les maxima (S_0, S_1, S_4 ……) correspondent aux valeurs paires de k

Le premier maxima S_0 s'obtient pour $k = 0$ donc $t = \frac{T}{4}$

Donc $S_0 = \Delta\, e^{-K\lambda\frac{T}{4}}$

Pour deux valeurs paires successives k et $k + 2$, les maximales S_k correspondantes sont :

$S_k = \Delta\, e^{-\lambda\,(2k+1)\frac{T}{4}} = \Delta\, e^{-k\lambda\frac{T}{2}}\, e^{-\lambda\frac{T}{4}}$

$S_{k+2} = \Delta\, e^{-\lambda\,(2(k+2)+1)\frac{T}{4}} = \Delta\, e^{-\lambda(2k+5)\frac{T}{4}}$

$= \Delta\, e^{-k\lambda\frac{T}{2}}\, e^{-5\lambda\frac{T}{2}}$

Considérons les deux maximales consécutives :

$\frac{S_{k+2}}{S_k} = \frac{e^{-5\lambda\frac{T}{4}}}{e^{-\lambda\frac{T}{4}}} = e^{-\lambda T}$

Le logarithme népérien du rapport $\frac{S_k}{S_{k+2}}$ noté δ s'appelle le décrément logarithmique

$$\delta = \ln\frac{S_k}{S_{k+2}} = \lambda T$$

δ mesure le taux de décroissance de l'amplitude

Remarque :

Les maximales successives forment une progression géométrique de raison $e^{-\lambda T}$

En effet $\frac{S_{k+2}}{S_k} = e^{-\lambda T}$; $\frac{S_{k+4}}{S_{k+2}} = e^{-\lambda T}$; $\frac{S_{k+6}}{S_{k+4}} = e^{-\lambda T}$

D'où le

1er Maxma S_0

2ème maxima $S_0 e^{-\lambda T}$

3ème maxima $S_0 e^{-2\lambda T}$

⋮

(k+1)^{ième} maxima $S_0 e^{-k\lambda T}$

Chapitre 9 : ÉQUATION DES ONDES SUR IR

L'équation des ondes sur IR est donné par une équation différentielle partielle de la forme:

(E) : $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - C^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$

Où t est le temps et $x \in IR$ $\quad (t \geq 0)$

$U(x,t)$ mesure l'amplitude de l'onde au point d'abscisse x à l'instant t

C étant la vitesse de propagation supposée constante.

C'est une équation aux dérivées partielles linéaire d'ordre 2 à coefficients constants dont le polynôme associé est

$$Q(X,T) = T^2 - C^2X^2$$
$$= (T - CX)(T + CX)$$

Posons $\quad Q_1(X,T) = T - CX$

$\quad Q_2(X,T) = T + CX$

On a $\quad Q(X,T) = Q_1(X,T).Q_2(X,T)$

Désignons par L, L_1 et L_2 les opérateurs différentielles associées respectivement à Q, Q_1 et Q_2

On a : $L = L_1 o L_2 = L_2\, o\, L_1$ $\quad$ (*)

Nous savons que la mesure de l'amplitude de l'onde est : $U(x,t) = F(x - ct) + G(x - ct)$ avec $F, G \in \varphi^2$

Si (E) est muni des conditions :

$$\begin{cases} U(x,0) = f(x) & \forall\, x \in IR \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x) & f, g \textit{ données} \end{cases}$$

Elle admet comme solution la formule dite de d'Alembert :

$$U(x,t) = \frac{1}{2}[f(x+ct) + f(x-ct)] + \frac{1}{2C}\int_{x-ct}^{x+ct} g(y)dy$$

Avec les conditions initiales :

$$\text{(I)} \quad \begin{cases} U(x,0) = \sin \pi x \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,o) = 0 \end{cases}$$

Et les conditions aux frontières

$$\text{(F)} \quad \begin{cases} U(0,t) = 0 \\ U(1,t) = 0 \end{cases} \forall\, t \geq 0$$

La méthode de séparation des variables nous donne

$U(x, t) = \sin(\pi x) \quad Cos(\pi ct)$

Conclusion partielle

On vient de déterminer u(x, t), l'amplitude de l'onde au point d'abscisse x, à l'instant t où C est la vitesse de propagation supposée constante

$U(x, t) = \sin(\pi x) \quad Cos(\pi ct)$

CONCLUSION

L'étude des différentes méthodes de résolution des équations aux dérivées partielles permet certainement d'améliorer la qualité de l'enseignement des matières scientifiques aux classes terminales du Lycée. Elle permet surtout de ne pas retenir par cœur les solutions des équations différentielles sur l'étude des mouvements d'une masse suspendue à un ressort, un pendule de torsion, d'un pendule simple ou des oscillations électriques.

On a insisté surtout aux équations différentielles du premier et second ordre à variable séparée et à coefficients constants sans second membre avec des conditions supplémentaires :

i). Conditions initiales ;

ii). Conditions aux frontières.

Pour le mécanisme de résolution de l'équation différentielle à coefficients constants

$$a\frac{d^2u}{dx^2} + b\frac{du}{dx} + cu = 0$$

On s'est limité à chercher les solutions de la forme $u(x) = ke^{rx}$, k, r sont des coefficients inconnus, en utilisant l'équation caractéristique : $ar^2 + br + c = 0$ avec $a, b, c \in IR$.

LISTE DES FIGURES

TABLE DES MATIERES

BIBLIOGRAPHIE

1. RAMAROSON Fidèle, *Exercices et problèmes résolus de Mathématiques*, Antananarivo, 1978.

2. ZANDSTEIN, *Cours d'Analyse I*, Centre Universitaire régional, Andrainjato, 1979.

3. ROPARS Yves, *Cours de Calcul différentiel*, Etablissement d'Enseignement Supérieur de Sciences Ankatso, Antananarivo, 1983.

4. R. Félix, *Cours d'Equations aux dérivées partielles et de Distributions*, Faculté de Sciences, Andrainjato, 2008.

5. RATSIMBAZAFY Bruno, RATSIMBAZAFY H.V., *Sciences physiques*, CTI Ampasampito, 1981.