

UNIVERSITE D'ANTANANARIVO
ECOLE NORMALE SUPERIEURE

DEPARTEMENT DE LA FORMATION INITIALE SCIENTIFIQUE
CENTRE D'ETUDE ET DE RECHERCHE PHYSIQUE-CHIMIE

Mémoire de fin d'étude pour l'obtention de
Certificat d'Aptitude Pédagogique de l'Ecole Normale Supérieure
(CAPEN)

N° d'ordre : 284/PC

MECANISME D'UTILISATION DES
NOMBRES COMPLEXES
EN ELECTRICITE

Présenté par

RAVELOARISON Hasina Mampianina

Le 19 Octobre 2010

Membres de Jury

Président du Jury : ANDRIANARIMANANA Jean-Claude Omer
Professeur

Juges : RASOLONDRAMANITRA Henri
Maître de conférences
RASAMIMANANTSOA Victor
Assistant

Rapporteur : RASOANAIVO René Yves
Maître de conférences

Année scolaire : 2009-2010

REMERCIEMENTS

Nous adressons nos reconnaissances et nos remerciements les plus sincères :

- A monsieur RASOANAIVO René Yves, malgré vos multiples occupations vous avez consacré beaucoup de temps pour diriger notre travail.
- A messieurs RASOLONDRAMANITRA Henri et RASAMIMANANTSOA Victor qui ont accepté avec bienveillance de juger ce mémoire. Vos remarques et vos suggestions seront pris en considérations pour améliorer ce travail.
- A Monsieur ANDRIANARIMANANA Jean-Claude Omer qui a eu l'amabilité d'accepter d'assumer la lourde tâche de président de jury.
- A tous les professeurs qui nous ont transmis leurs savoirs et leurs expériences durant ces cinq années d'étude.
- A ma famille pour son soutien sans faille et ses encouragements.
- A tous mes amis de la promotion IRAY pour l'amitié constante depuis des années.
- A tous ceux qui ont contribué de près ou de loin à la réalisation de ce mémoire.

“ QUE DIEU VOUS BENISSE ”

DIEU merci, c'est grâce à Vous que nous avons pu réaliser ce travail

SOMMAIRE

INTRODUCTION	1
PREMIERE PARTIE : UTILISATION DES NOMBRES COMPLEXES EN COURANT ALTERNATIF.....	3
I LES NOMBRES COMPLEXES.....	3
I- A <i>Bref historique</i>	3
I- B <i>Operations sur les nombres complexes</i>	3
1- Définitions	3
a) Nombres complexes.....	3
b) Affixe d'un point	4
c) Module d'un nombre complexe	4
d) Argument d'un nombre complexe	4
e) Conjugué d'un nombre complexe	5
2- Différentes formes d'écritures des nombres complexes	5
a) Forme algébrique	5
b) Forme trigonométrique.....	5
c) Forme exponentielle	5
d) Forme polaire	5
3- Calcul dans $\mathbb{C}$	6
a) Egalité de deux nombres complexes.....	6
b) Addition et soustraction des nombres complexes.....	6
c) Multiplication des deux nombres complexes.....	6
d) Divisions de deux nombres complexes	7
II ETUDE DES CIRCUITS A COURANTS ALTERNATIFS A L'AIDE DES NOMBRES COMPLEXES	8
II- A <i>Notation complexe des grandeurs électriques</i>	8
1- Représentation complexe des fonctions sinusoïdales du temps	8
2- Avantage de l'utilisation des notations complexes.....	9
a) Addition de deux vibrations isochrones.....	10
b) Dérivée et primitive d'une grandeur sinusoïdale.....	11
3- Notations complexes des grandeurs intensité et tension en régime alternatif.....	12
a) Intensité complexe	12
b) Tension complexe.....	14

<i>II- B Lois fondamentales d'électricité en notation complexe</i>	15
1- Lois de KIRCHHOFF	15
a) Première loi : loi des nœuds.....	15
b) Deuxième loi : loi des mailles	16
2- Loi d'OHM complexe	18
3- Impédance complexe	18
a) Définition de l'impédance	18
b) Représentation de l'impédance complexe dans un plan complexe.....	20
c) Impédances complexes des dipôles élémentaires	21
<i>i Conducteur ohmique (Résistor)</i>	21
<i>ii Bobine</i>	22
<i>iii Condensateur</i>	24
4- Réactances	26
5- Admittances complexes	26
a) Définition de l'admittance	26
b) Admittances complexes des dipôles élémentaires	27
<i>i Résistor</i>	27
<i>ii Bobine</i>	27
<i>iii Condensateur</i>	28
6- Groupement d'impédances.....	28
a) Association d'impédances complexes en série	28
b) Association d'impédances complexes en parallèle	29
7- Relation complémentaire entre l'impédance et l'admittance	30
a) Calcul de Z lorsque Y est connue	30
b) Calcul de Y lorsque Z est connue	30
<i>II- C Etude d'un circuit RLC en série avec les notations complexes</i>	31
1- Impédance complexe du circuit RLC en série.....	32
2- Résonance série.....	33
a) Résonance d'intensité	34
<i>i Etude de la résonance d'intensité</i>	35
<i>ii Courbe de la résonance d'intensité</i>	36
<i>iii Conséquence de la résonance</i>	38
<i>iv Bande passante</i>	39
b) Résonance de la tension aux bornes du condensateur.....	41

i	Etude de la résonance de la tension u_c	42
ii	Valeur critique de Q_0 et de R	43
iii	Tracée des courbes $u_c=f(\omega)$	44
iv	Cas où Q_0 est très grand	45
c)	Courbes universelles de résonance	45
II- D	Etude d'un circuit RLC en parallèle avec les notations complexes.....	49
1-	Impédance complexe du circuit RLC en parallèle.....	50
2-	Dualité entre circuit RLC série et circuit RLC parallèle	51
3-	Résonance parallèle	52
II- E	PUISSANCE	54
1-	Puissance instantanée	54
2-	Puissance moyenne	54
3-	Puissance active et puissance réactive.....	54
a)	Puissance active.....	55
b)	Puissance réactive	56
4-	Puissance complexe	56
	DEUXIEME PARTIE : EXPLOITATION PEDAGOGIQUE	57
I-	FICHE PEDAGOGIQUE SUR LE CHAPITRE "CIRCUIT EN REGIME SINUSOÏDAL FORCE"	57
I- A	Proposition de programme.....	57
I- B	Les pré requis.....	59
I- C	Contenu du cours.....	60
II-	SUGGESTION D'EVALUATION FORMATIVE	72
	Enoncé de l'exercice 1.....	72
	Solution de l'exercice 1	72
	Enoncé de l'exercice 2.....	76
	Solution de l'exercice 2	76
	CONCLUSION.....	83

Liste des figures

Figure 1 : Représentation d'un nombre complexe $z=a+ib$ dans un plan complexe	4
Figure 2: Représentation de Fresnel de $x(t) = X_m \cos(\omega t + \varphi)$	8
Figure 3: Loi des nœuds	16
Figure 4 : Maille	17
Figure 5 : Représentation de FRESNEL de l'impédance complexe	20
Figure 6 : Représentation des grandeurs Z ; u et i dans un plan complexe	21
Figure 7 : Conducteur ohmique (résistance pure)	22
Figure 8 : Diagramme de Fresnel associé à une résistance R	22
Figure 9 : Bobine (Inductance pure)	23
Figure 10 : Diagramme de Fresnel associé à une inductance L	24
Figure 11 : Condensateur (capacité pure)	25
Figure 12 : Diagramme de Fresnel associé à une capacité C	26
Figure 13 : Circuit RLC série	31
Figure 14 : Diagramme de Fresnel d'impédance d'un circuit RLC série	33
Figure 15 : Courbe de résonance d'intensité d'un circuit RLC série	37
Figure 16: Variation du déphasage de i par rapport à u d'un circuit RLC série	38
Figure 17: Courbe de résonance de la tension u_C	44
Figure 18: Courbes universelles de résonance	48
Figure 19 : Circuit RLC parallèle	49
Figure 20 : Diagramme de Fresnel d'admittance d'un circuit RLC parallèle	51
Figure 21 : Circuit RLC série	64
Figure 22 : Diagramme d'impédance cas où $L\omega > 1/C\omega$	68
Figure 23 : Diagramme d'impédance cas où $L\omega < 1/C\omega$	68
Figure 24 : Courbe de résonance d'un circuit RLC série	69
Figure 25 : Schéma du circuit RLC de l'exercice 1	77

Liste des tableaux

Tableau 1 : Résumé des notations complexes, en régime sinusoïdal de pulsation ω	14
Tableau 2 : Impédances et admittances complexes des dipôles simples	28
Tableau 3 : Tableau récapitulatif de la bande passante	41

INTRODUCTION

La physique est une science expérimentale qui vise à expliquer, par des théories basées sur l'observation et l'expérience, des phénomènes naturels. Ces théories font appel à des mesures et des calculs pour établir des lois et d'en tirer des conséquences utilisables. Les mathématiques deviennent un outil incontournable pour cela, y compris les nombres complexes.

A Madagascar, l'usage des nombres complexes n'est pas conseillé dans la partie "électromagnétisme" du programme officiel de la physique destinée à la classe terminale scientifique. Il se peut que des professeurs de physique ne maîtrisent pas cette électricité étudiée au moyen des nombres complexes. Des entretiens avec quelques professeurs de physique dans quelques lycées l'ont confirmé.

Pourtant, on remarque que l'utilisation des nombres complexes permet de rendre certains calculs plus élégants et plus simples en électricité notamment sur l'étude du courant alternatif.

Pour mettre en œuvre cette importance des nombres complexes en électricité, nous avons axé notre travail de mémoire sur le : "**MECANISME D'UTILISATION DES NOMBRES COMPLEXES EN ELECTRICITE**". Cette recherche s'intéresse à l'usage des nombres complexes en courant alternatif, en particulier pour l'étude des circuits électriques à courant alternatif. Notre travail a pour but de (d') :

- faire le lien entre les notions des nombres complexes et les cours d'électricité,
- utiliser les nombres complexes pour décrire, analyser et résoudre des problèmes d'électricité.

Ce travail se divisera en deux grandes parties. La première, *Utilisation des nombres complexes en courant alternatif*, introduit et développe le mode d'utilisation des nombres complexes dans l'étude du courant alternatif.

La deuxième, *Exploitation pédagogique*, consiste à l'élaboration de nouvelles fiches pédagogiques et à la proposition d'exercices d'évaluation sur le chapitre "Circuit *en régime sinusoïdal forcé*" étudié dans la classe terminale scientifique.

PREMIERE PARTIE : *UTILISATION DES NOMBRES COMPLEXES EN COURANT ALTERNATIF*

I LES NOMBRES COMPLEXES

I- A Bref historique

Les nombres complexes ont été introduits au XVIème siècle par les algébristes italiens Nicolo Fontana, dit Tartaglia et Jérôme Cardan au cours de la résolution d'équations de la forme $x^3 = p x + q$. C'est à partir du XVIème siècle que les mathématiciens Jérôme Cardan et Raphael Bombelli ont introduit des nombres "imaginaires" qui ont un carré négatif pour résoudre les équations du type $x^2 = -1$ et les équations du troisièmes degré. [Ingrao, B. (2003)]

Leonhard Euler et Jean Le Rond d'Alembert ont achevé la création des nombres complexes en fixant les notations actuelles, particulièrement celle du nombre "i". [Ingrao, B. (2003)]

I- B Operations sur les nombres complexes

Généralement, les nombres complexes sont étudiés dans tous les domaines des mathématiques. On se limitera donc ici à quelques notions nécessaires à l'application des nombres complexes à l'électricité.

1- Définitions

a) Nombres complexes

On admet l'existence d'un nombre i de carré -1 et on appelle nombre complexe, tout «nombre» de la forme $z = a + ib$ où a et b sont des réels. C'est en 1801 que Gauss a introduit les nombres de la forme $a+ib$.

a est la partie réelle de z et est noté $\text{Re}(z)$;

b est la partie imaginaire de z et est noté $\text{Im}(z)$.

On peut donc définir un nombre complexe par un couple de réels $(a ; b)$.

L'ensemble des nombres complexes est noté $\mathbb{C}$.

b) Affixe d'un point

À tout nombre complexe $z = a + ib$ (avec a et b réels), on peut associer le point $M(a; b)$. $M(a; b)$ est l'image de z , inversement z est l'affixe de M .

Il convient de représenter un nombre complexe dans un plan muni d'un repère orthonormé $(0; \vec{u}; \vec{v})$ en assimilant le nombre complexe $a + ib$ à un couple de coordonnées (a, b) . Ce plan muni d'un repère $(0; \vec{u}; \vec{v})$ s'appelle "**plan complexe**".

Dans ce plan complexe, l'axe $(0; \vec{u})$ est appelé "**axe réel**" et l'axe $(0; \vec{v})$ est appelé "**axe imaginaire**".

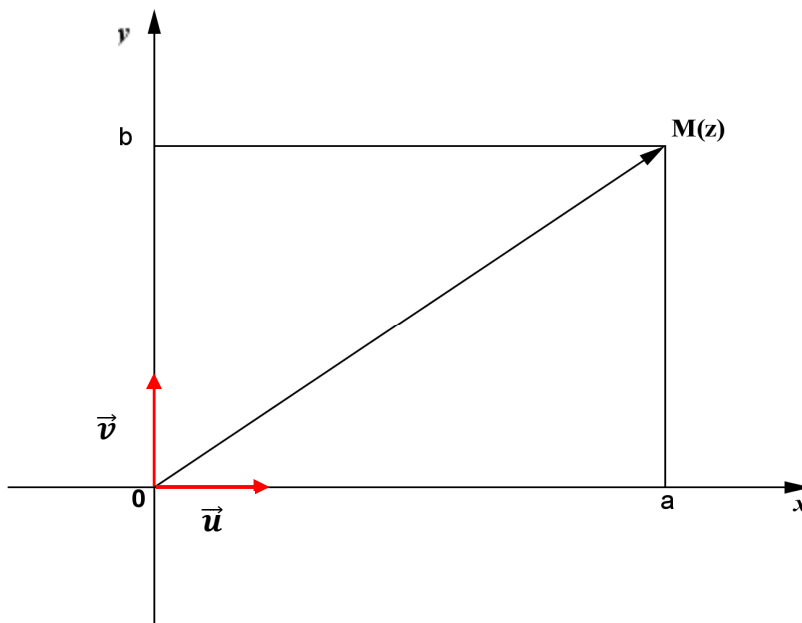


Figure 1 : Représentation d'un nombre complexe $z=a+ib$ dans un plan complexe

c) Module d'un nombre complexe

Le module d'un nombre complexe $z = a + ib$, noté ρ ou $|z|$, est $\rho = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$. Le module d'un nombre complexe ρ est aussi la norme du vecteur $\overrightarrow{OM}$ image de z .

d) Argument d'un nombre complexe

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé $(0; \vec{u}; \vec{v})$, la position d'un point M d'affixe z peut être donnée par ses coordonnées polaires c'est-à-dire par la distance OM , module de z , et par l'angle orienté $(\vec{u}; \overrightarrow{OM})$.

L'argument du nombre complexe $z = a + ib$, noté $Arg(z) = \theta$, est l'angle $(\vec{u}; \overrightarrow{OM})$.

$\text{Arg}(z)$ est tel que :

$$\cos \theta = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{a}{\rho} \text{ et } \sin \theta = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{b}{\rho}$$

Ces deux relations donnent :

$$\tan \theta = \frac{b}{a}$$

e) *Conjugué d'un nombre complexe*

Le conjugué d'un nombre complexe $z = a + ib$ est le nombre complexe noté z^* tel que $z^* = a - ib$.

On remarque que 2 points d'affixes conjugués sont symétriques par rapport à l'axe des réels dans un plan complexe.

2- Différentes formes d'écritures des nombres complexes

Soit un nombre complexe $z = a + ib$, de module $|z| = \rho$ et dont l'argument est $\text{Arg}(z) = \theta$. Le nombre complexe z peut s'écrire sous quatre formes différentes.

a) *Forme algébrique*

L'écriture d'un nombre complexe sous la forme $z = a + ib$ est la forme algébrique d'un nombre complexe.

b) *Forme trigonométrique*

L'écriture d'un nombre complexe sous la forme $z = \rho(\cos \theta + i \sin \theta)$ est la forme trigonométrique d'un nombre complexe.

c) *Forme exponentielle*

L'écriture d'un nombre complexe sous la forme $z = \rho e^{i\theta}$ est la forme exponentielle d'un nombre complexe.

d) *Forme polaire*

L'écriture d'un nombre complexe sous la forme $z = [\rho, \theta]$ est la forme polaire d'un nombre complexe.

3- Calcul dans $\mathbb{C}$

Les opérations dans $\mathbb{C}$ suivent les mêmes règles que dans $\mathbb{R}$, en tenant compte que $i^2 = -1$. Pour faciliter la manipulation des calculs dans $\mathbb{C}$, il vaut mieux utiliser la forme algébrique ou la forme polaire d'un nombre complexe.

a) *Egalité de deux nombres complexes*

Deux nombres complexes sont égaux s'ils ont la même partie réelle et la même partie imaginaires.

$$a + ib = a' + ib' \quad \text{si} \quad a = a' \text{ et } b = b'$$

Si on utilise la forme polaire d'un nombre complexe, l'égalité de deux nombres complexes se traduit par l'égalité des modules et l'égalité des arguments des deux nombres complexes.

$$[\rho ; \theta] = [\rho' ; \theta'] \quad \text{si} \quad \rho = \rho' \text{ et } \theta = \theta'$$

b) *Addition et soustraction des nombres complexes*

Dans $\mathbb{C}$, on définit l'addition noté (+) par :

$$(a + ib) + (a' + ib') = (a + a') + i(b + b')$$

Ainsi que la soustraction noté (-) par :

$$(a + ib) - (a' + ib') = (a - a') + i(b - b')$$

Remarquons que $z + z^* = 2\text{Re}(z)$ et $z - z^* = 2i\text{Im}(z)$

L'utilisation de la forme polaire pour l'addition et la soustraction des nombres complexes n'est pas conseillée.

c) *Multiplication des deux nombres complexes*

Dans $\mathbb{C}$, on définit la multiplication par :

$$(a + ib)(a' + ib') = (aa' - bb') + i(ab' + a'b)$$

Remarquons que pour tout nombre complexe $z = a + ib$, on a :

$$z \cdot z^* = a^2 + b^2$$

$$z^2 = a^2 - b^2 + 2iab$$

$$(z^*)^2 = a^2 - b^2 - 2iab$$

L'utilisation de la forme exponentielle aboutit à des relations simples.

Pour $z = \rho \cdot e^{i\theta}$ et $z' = \rho' \cdot e^{i\theta'}$ on a :

$$z \cdot z' = (\rho \cdot \rho') \cdot e^{i(\theta + \theta')}$$

Sous la forme trigonométrique, le produit de deux nombres complexes s'écrit alors :

$$z \cdot z' = (\rho \cdot \rho') \cdot [\cos(\theta + \theta') + i \sin(\theta + \theta')]$$

Et sous la forme polaire on écrit :

$$[\rho ; \theta] \cdot [\rho' ; \theta'] = [\rho \cdot \rho' ; \theta + \theta']$$

d) Divisions de deux nombres complexes

Pour effectuer la division de deux nombres complexes, dans ses formes algébriques, il faut rendre réel le dénominateur. Pour ce dernier, on multiplie par le conjugué du dénominateur le numérateur et le dénominateur.

$$\frac{a' + ib'}{a + ib} = \frac{a' + ib'}{a + ib} \cdot \frac{a - ib}{a - ib} = \frac{(a' + ib') \cdot (a - ib)}{a^2 + b^2}$$

En utilisant la forme exponentielle, on aboutit aussi à une relation simple.

Pour $z = \rho \cdot e^{i\theta}$ et $z' = \rho' \cdot e^{i\theta'}$ on a :

$$\frac{z}{z'} = \frac{\rho}{\rho'} e^{i(\theta - \theta')}$$

Sous la forme trigonométrique, le produit de deux nombres complexes s'écrit alors :

$$\frac{z}{z'} = \left(\frac{\rho}{\rho'} \right) \cdot [\cos(\theta - \theta') + i \sin(\theta - \theta')]$$

Et sous la forme polaire on écrit :

$$\frac{z}{z'} = \frac{[\rho ; \theta]}{[\rho' ; \theta']} = \left[\frac{\rho}{\rho'} ; \theta - \theta' \right]$$

II ETUDE DES CIRCUITS A COURANTS ALTERNATIFS A L'AIDE DES NOMBRES COMPLEXES

II- A Notation complexe des grandeurs électriques

Le fameux nombre imaginaire “ i ” représente déjà l'intensité du courant électrique. A fin d'éviter les confusions on remplace la lettre “ i ” par “ j ”. Ainsi le nombre imaginaire “ j ” est tel que $j^2 = -1$

1- Représentation complexe des fonctions sinusoïdales du temps

L'expression mathématique d'une fonction sinusoïdale du temps est :

$$x(t) = X_m \cos(\omega t + \varphi)$$

Où X_m est l'amplitude et φ la phase à l'origine.

On peut représenter cette fonction sinusoïdale par un vecteur $\overrightarrow{OM}$, dit de Fresnel, de longueur X_m , tournant à la vitesse angulaire ω constante autour de O et faisant un angle $\alpha = \omega t + \varphi$ avec l'axe des phases Ox.

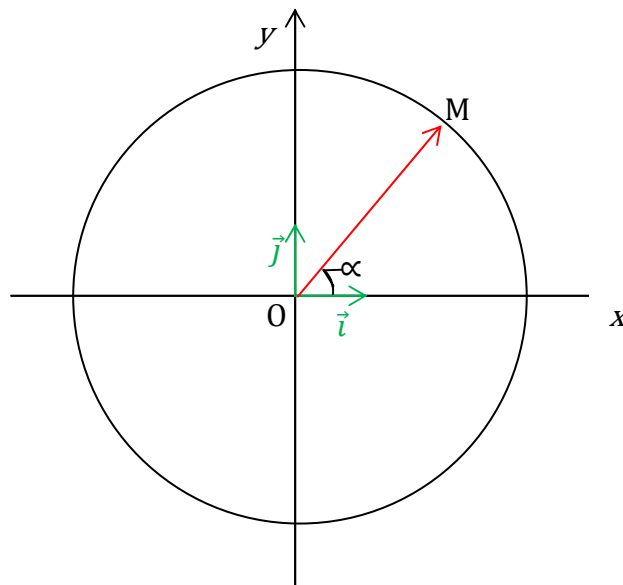


Figure 2: Représentation de Fresnel de $x(t) = X_m \cos(\omega t + \varphi)$

L'analogie entre le plan de Fresnel et le plan complexe conduit naturellement à représenter les vecteurs tournants associés aux grandeurs sinusoïdales par des grandeurs imaginaires.

Si on considère le plan contenant le vecteur représentatif de $x(t)$ comme le plan complexe, ce vecteur a pour affixe : $X_m \cos(\omega t + \varphi) + jX_m \sin(\omega t + \varphi)$ qu'on peut écrire sous la forme exponentielle $X_m e^{j(\omega t + \varphi)}$. La fonction sinusoïdale du temps est alors la partie réelle de l'affixe du vecteur représentatif de $x(t)$: $\text{Re}[X_m e^{j(\omega t + \varphi)}]$. Ainsi, à une fonction sinusoïdale $x(t) = X_m \cos(\omega t + \varphi)$, on peut lui associer la fonction $y(t) = X_m \sin(\omega t + \varphi)$ et le nombre complexe $z(t) = x(t) + jy(t)$. $x(t)$ est la partie réelle de $z(t)$.

A une grandeur $x(t) = X_m \cos(\omega t + \varphi)$, on associe donc une grandeur complexe notée $\underline{x} = X_m e^{j(\omega t + \varphi)}$, avec $x(t) = \text{Re}[\underline{x}]$.

La représentation complexe de $x(t)$ est $\underline{x} = X_m e^{j(\omega t + \varphi)}$

Cette notation complexe $\underline{x}$ peut s'écrire aussi sous la forme $\underline{x} = X_m e^{j\varphi} e^{j\omega t}$, alors elle peut se décomposer en une *amplitude complexe* $X_m e^{j\varphi}$ et un facteur variable dans le temps $e^{j\omega t}$: $\underline{x} = \underline{X}_m e^{j\omega t}$ avec $\underline{X}_m = X_m e^{j\varphi}$.

On identifie alors les éléments nécessaires à la détermination complète d'une grandeur x par :

$$X_m = |\underline{X}_m| \text{ et } \varphi = \text{Arg}(\underline{X}_m)$$

L'amplitude complexe, qui regroupe l'amplitude et la phase, sera donc une grandeur intéressante.

Remarque : Si $x(t) = X_m \sin(\omega t + \varphi)$, sa représentation complexe reste toujours $\underline{x} = X_m e^{j(\omega t + \varphi)}$ mais $x(t) = \text{Im}[\underline{x}]$

2- Avantage de l'utilisation des notations complexes

Il est souvent difficile de faire des calculs sur les fonctions trigonométriques. L'utilisation de la représentation de Fresnel peut alléger certains calculs grâce à la résolution graphique mais son utilisation est limitée, comme dans la résolution de certaines équations différentielles.

En physique, la représentation complexe, qui est un peu plus mathématisée, présente beaucoup d'avantage grâce aux différentes formes qu'un nombre complexe peut prendre.

La représentation complexe est très générale. Elle est utilisable dans tous les cas en régime sinusoïdal, même si elle conduit souvent à des calculs longs avant d'arriver au résultat.

a) *Addition de deux vibrations isochrones*

Si on a deux vibrations monochromatiques isochrones $x_1(t)$ et $x_2(t)$, il est plus facile de trouver leur résultante en passant par leurs représentations complexes.

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t)$$

En notation complexe on écrit :

$$\underline{x} = \underline{x}_1 + \underline{x}_2$$

Il suffit de travailler avec les amplitudes complexes puisque en connaissant la pulsation ω , l'amplitude complexe est suffisante pour décrire la grandeur complexe $\underline{x}$. On peut alors éliminer le terme $e^{j\omega t}$ dans le calcul.

En passant par la forme algébrique des amplitudes complexes de $\underline{x}_1$ et de $\underline{x}_2$, on peut faire des calculs simples en utilisant les règles du calcul algébrique au lieu d'effectuer des opérations sur des vecteurs.

Exemple

Soient deux vibrations isochrones $x_1(t) = 12\sqrt{2} \cos\left(100\pi t + \frac{\pi}{3}\right)$ et

$$x_2(t) = 6\sqrt{2} \cos\left(100\pi t - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\underline{x}_1 = 12\sqrt{2}e^{j\left(100\pi t + \frac{\pi}{3}\right)} \text{ et } \underline{x}_2 = 6\sqrt{2}e^{j\left(100\pi t - \frac{\pi}{4}\right)}$$

Les amplitudes complexes de x_1 et x_2 sont :

$$\underline{X}_{m1} = 12\sqrt{2}e^{j\frac{\pi}{3}} \text{ et } \underline{X}_{m2} = 6\sqrt{2}e^{-j\frac{\pi}{4}}$$

En passant par leurs formes algébriques on obtient :

$$\underline{X}_{m1} = 12\sqrt{2}\left(\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 8,5 + 14,7j \text{ et } \underline{X}_{m2} = 6\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - j\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 6 - 6j$$

$$\underline{x} = \underline{x}_1 + \underline{x}_2$$

$$\underline{x} = 8,5 + 14,7j + 6 - 6j = 14,5 + 8,7j$$

$$\underline{x} = 14,5 + 8,7j \approx 12\sqrt{2}e^{j\frac{\pi}{6}}$$

$$\text{Alors } x(t) = 12\sqrt{2} \cos\left(100\pi t + \frac{\pi}{6}\right)$$

b) Dérivée et primitive d'une grandeur sinusoïdale

Pour une fonction sinusoïdale $x(t) = X_m \cos(\omega t + \varphi)$, la dérivée de $x(t)$ par rapport au temps t est :

$$\frac{dx(t)}{dt} = -\omega X_m \sin(\omega t + \varphi)$$

En notation complexe où $\underline{x} = X_m e^{j(\omega t + \varphi)}$,

$$\frac{d\underline{x}}{dt} = j\omega X_m e^{j(\omega t + \varphi)} = j\omega \cdot \underline{x}$$

La dérivée par rapport au temps se ramène en notation complexe à une multiplication par $j\omega$.

De même pour la primitive :

$$\int x(t) dt = \frac{X_m}{\omega} \sin(\omega t + \varphi)$$

Pour la représentation complexe, on a :

$$\int \underline{x} dt = \frac{1}{j\omega} X_m e^{j(\omega t + \varphi)} = \frac{1}{j\omega} \underline{x} = -\frac{j}{\omega} \underline{x}$$

Ici, la primitive se ramène en notation complexe à une division par $j\omega$ ou par une multiplication par $-\frac{j}{\omega}$

C'est dans la résolution des équations différentielles qu'on voit l'intérêt des effets des opérateurs dérivée et primitive. On remplace juste la grandeur $x(t)$ par leur représentation complexe $\underline{x}$ dans les équations différentielles. Pour la dérivée par rapport au temps t on la remplace par une multiplication par $j\omega$ et par la division par $j\omega$ pour la primitive. Les

équations différentielles deviennent alors des équations algébriques linéaires qui sont faciles à résoudre.

3- Notations complexes des grandeurs intensité et tension en régime alternatif

En courant alternatif, les grandeurs sinusoïdales et les grandeurs issues des grandeurs sinusoïdales possèdent des représentations complexes.

a) Intensité complexe

L'intensité du courant en régime alternatif forcé est une grandeur sinusoïdale. Donc comme toute grandeur sinusoïdale, elle admet une représentation complexe $\underline{i}$. Pour un courant alternatif de fréquence f , l'expression complexe l'intensité s'écrit :

$$\underline{i} = I_m e^{j(\omega t + \varphi_i)}$$

I_m est l'amplitude ou l'intensité maximale du courant telle que $I_m = I\sqrt{2}$ où I est l'intensité efficace du courant.

ω est la pulsation du courant sinusoïdal telle que $\omega = 2\pi f$

φ_i est la phase à l'origine de l'intensité.

L'expression de l'intensité i peut être la partie réelle ou la partie imaginaire de cette intensité complexe.

$$i = I_m \cos(\omega t + \varphi_i) = \text{Re}[\underline{i}]$$

Ou

$$i = I_m \sin(\omega t + \varphi_i) = \text{Im}[\underline{i}]$$

Quelle que soit donc l'expression de l'intensité, soit qu'elle est fonction du sinus, soit qu'elle est fonction du cosinus, son expression complexe reste inchangée et on peut décrire d'une façon générale la valeur instantanée de n'importe quelle intensité du courant alternatif sinusoïdal par :

$$\underline{i} = I_m e^{j(\omega t + \varphi_i)}$$

Cette expression peut s'écrire encore

$$\underline{i} = I_m e^{j\omega t} e^{j\varphi_i} = \underline{I}_m e^{j\omega t}$$

Où

$$\underline{I}_m = I_m e^{j\varphi_i}$$

Le coefficient $e^{j\omega t}$ se trouve en facteur commun dans tous les termes, donc à une fréquence donnée, on peut avoir des notations qui ne gardent que les amplitudes complexes. Alors, on omettra le terme $e^{j\omega t}$ dans les représentations complexes puisqu'on considère le régime sinusoïdal forcé.

En faisant une analogie avec la définition de la valeur efficace, on peut ainsi définir la valeur efficace complexe comme l'amplitude complexe divisée par $\sqrt{2}$.

Notons $\underline{I}$ la valeur efficace complexe de la grandeur intensité :

$$\underline{I} = \frac{\underline{I}_m}{\sqrt{2}} = \frac{I_m}{\sqrt{2}} e^{j\varphi_i}$$

$$\underline{I} = I e^{j\varphi_i}$$

Cette expression de la valeur efficace complexe de l'intensité regroupe la valeur efficace de l'intensité et la phase donc la valeur efficace complexe de $\underline{I}$ suffit à représenter l'expression complexe de la grandeur intensité. Alors on peut réduire l'expression complexe de l'intensité par l'expression de sa valeur efficace complexe.

$$\underline{i} = I e^{j\varphi_i}$$

Des fois, il est plus intéressant de travailler avec la forme algébrique et la forme polaire dont leurs expressions respectives sont :

$$\underline{i} = a + jb \text{ où } a = I \cos(\varphi_i) \text{ et } b = I \sin(\varphi_i)$$

et

$$\underline{i} = [I ; \varphi_i]$$

b) Tension complexe

Tout ce qu'on a dit sur l'intensité est aussi valable pour la tension et d'une manière générale pour une grandeur sinusoïdale quelconque.

L'expression complexe d'une tension en courant alternatif s'écrit :

$$\underline{u} = U_m e^{j(\omega t + \varphi_u)}$$

Ou encore

$$\underline{u} = \underline{U}_m e^{j\omega t} \text{ avec } \underline{U}_m = U_m e^{j\varphi_u}$$

$\underline{U}_m = U_m e^{j\varphi_u}$ est l'amplitude complexe de la tension complexe.

La valeur efficace complexe de la tension complexe s'écrit :

$$\underline{U} = U e^{j\varphi_u}$$

Où U est la valeur efficace de la tension $\left(U = U_m / \sqrt{2} \right)$

La tension complexe peut se réduire aussi par l'expression de leur valeur efficace complexe.

$$\underline{u} = U e^{j\varphi_u}$$

En utilisant la forme algébrique, on obtient :

$$\underline{u} = a + jb \text{ où } a = U \cos(\varphi_u) \text{ et } b = U \sin(\varphi_u)$$

Et pour la forme polaire, on écrit : $\underline{u} = [U ; \varphi_u]$

Grandeur	Expression habituelle	Expression complexe	Amplitude complexe	Valeur efficace complexe
Intensité	$i(t) = I_m \sin(\omega t + \varphi_i)$	$\underline{i} = I_m e^{j(\omega t + \varphi_i)}$	$\underline{I}_m = I_m e^{j\varphi_i}$	$\underline{I} = I e^{j\varphi_i}$
Tension	$u(t) = U_m \sin(\omega t + \varphi_u)$	$\underline{u} = U_m e^{j(\omega t + \varphi_u)}$	$\underline{U}_m = U_m e^{j\varphi_u}$	$\underline{U} = U e^{j\varphi_u}$

Tableau 1 : Résumé des notations complexes, en régime sinusoïdal de pulsation ω

II- B Lois fondamentales d'électricité en notation complexe

Toutes les lois établies en régime continu sont valables en régime alternatif sinusoïdal à condition d'utiliser les notations complexes. Mais on se limite ici aux quelques lois nécessaires à l'étude d'un circuit RLC telles que : lois de Kirchhoff ; loi d'Ohm complexe ; impédance complexe et admittance complexe.

1- Lois de KIRCHHOFF

Avec les notations complexes, les lois de Kirchhoff sont applicables aux circuits à courants alternatifs stationnaires. Les équations de Kirchhoff (loi des nœuds et loi des mailles) donnent des équations algébriques complexes.

a) Première loi : loi des nœuds

La première loi de Kirchhoff s'énonce ainsi : la somme des courants en un nœud du circuit est nulle à tout instant. [Beauvillain, R. 1986]

Les signes sont choisis positifs si les courants arrivent effectivement en ce nœud et négatifs s'ils en repartent.

$$\sum_{k=1}^n \varepsilon_k \cdot i_k = 0 \quad (\varepsilon_k = \pm 1)$$

$\varepsilon_k = +1$ pour les courants qui arrivent au nœud et $\varepsilon_k = -1$ pour ceux qui quittent le nœud. Ainsi on peut dire donc que pour un nœud donné, la somme des intensités des courants qui y arrivent est égale à la somme des intensités des courants qui sortent.

$$\sum_{entrant} i = \sum_{sortant} i$$

En régime sinusoïdal, les valeurs instantanées peuvent être remplacées par les valeurs complexes. La loi des nœuds s'écrit alors :

$$\sum_{k=1}^n \varepsilon_k \cdot \underline{i}_k = 0$$

Ou encore

$$\sum_{entrant} \underline{i} = \sum_{sortant} \underline{i}$$

Il est alors plus pratique d'énoncer la loi des nœuds sous la forme : **“La somme des expressions complexes des intensités des courant qui arrivent en un nœud est égale à la somme des expressions complexes des intensités des courants qui quittent le nœud”**

[Niard, J. (1970)]

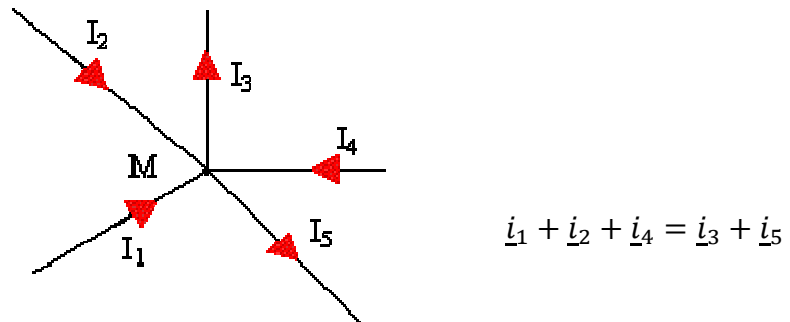


Figure 3: Loi des nœuds

Utilisation de la loi des nœuds

La loi des nœuds permet d'étudier la mise en parallèle des dipôles de même nature.

Soit un circuit contenant n dipôles de même nature placés en parallèle. Soit $\underline{i}$ l'intensité complexe du courant qui traverse la branche principale. Soit $\underline{i}_k$ ($k = 1; 2; 3 \dots n$) l'intensité complexe du courant traversant chacun des n dipôles. La loi de nœuds donne la relation :

$$\underline{i} = \sum_{k=1}^n \underline{i}_k$$

b) Deuxième loi : loi des mailles

La seconde loi de Kirchhoff s'énonce ainsi : la somme des différences de potentiels (tensions) obtenus le long d'une maille d'un circuit est nulle. [Beauvillain, R. (1986)]

Les signes sont choisis positifs, si les tensions sont dans le sens positif de rotation de la maille ; et négatif pour les tensions orientées dans le sens contraire du sens positif de la rotation de la maille.

Bien qu'il soit possible de choisir arbitrairement l'orientation d'une maille ; on peut orienter systématiquement une maille comme suit :

- Si la maille contient un générateur, alors le sens de la maille coïncide avec le sens positif du courant dans le générateur.
- Si la maille ne comporte aucun générateur, alors le sens de la maille est donné par le sens direct en usage en trigonométrie (sens contraire de l'aiguille d'une montre).

Considérons une maille

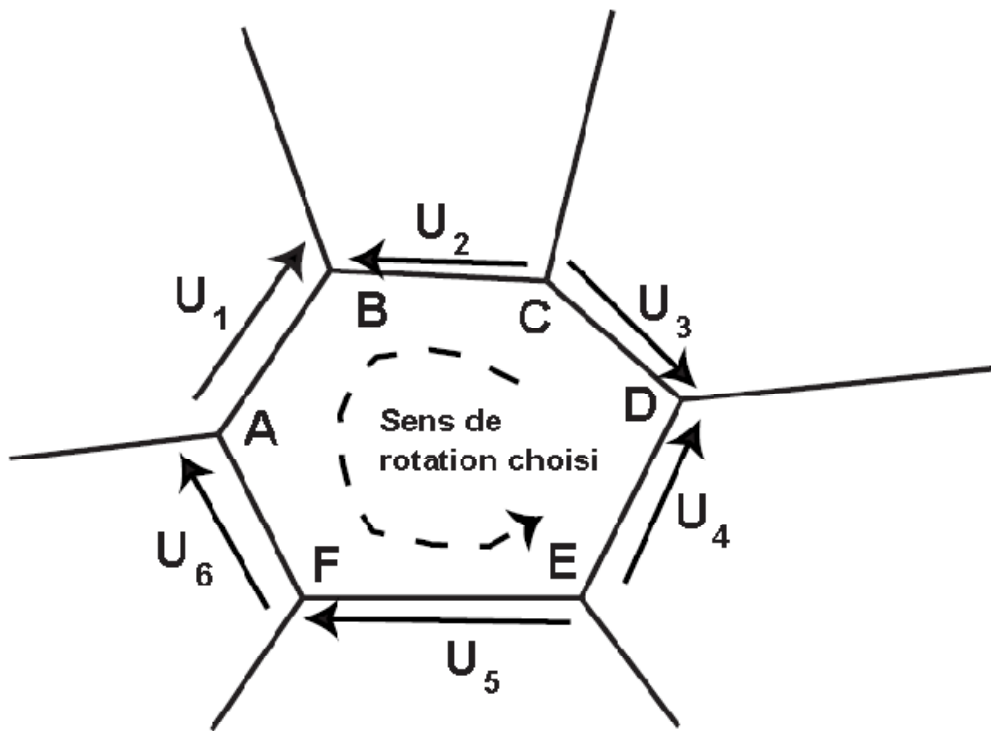


Figure 4 : Maille

On définit des tensions entre 2 nœuds ou encore d'une branche et on choisit un sens de rotation positif pour la maille.

Dans une maille contenant $n + 1$ nœuds et n branches, la loi des mailles s'écrit :

$$\sum_{k=1}^n \varepsilon_k \cdot u_k = 0 \quad (\varepsilon_k = \pm 1)$$

$\varepsilon_k = +1$ pour les tensions orientées dans le sens positif de la rotation de la maille et

$\varepsilon_k = -1$ pour les tensions orientées dans le sens opposé du sens choisi positif de la maille.

En régime sinusoïdal, la loi des mailles s'applique avec les notations complexes et s'énonce :

“ Le long d'une maille, la somme des expressions complexes de la tension est nulle”.

[Niard, J. 1970]

$$\sum_{k=1}^n \varepsilon_k \cdot \underline{u}_k = 0$$

Dans la maille ci-dessus (figure 4), la loi des mailles s'écrit :

$$-\underline{u}_1 + \underline{u}_2 - \underline{u}_3 + \underline{u}_4 - \underline{u}_5 - \underline{u}_6 = 0$$

Utilisation de la loi des mailles

La loi des mailles permet d'étudier la mise en série des dipôles de même nature.

Soit un circuit contenant n dipôles de même nature en série, tous parcourus par le courant complexe $\underline{i}$. Soit $\underline{u}_k$ la tension complexe aux bornes de chacun de n dipôles avec la convention récepteur. Soit $\underline{u}$ la tension complexe aux bornes du dipôle résultant (ou encore la tension complexe aux bornes du générateur). La loi des mailles donne la relation :

$$\underline{u} = \sum_{k=1}^n \underline{u}_k$$

2- Loi d'OHM complexe

La **loi d'Ohm** est une loi physique permettant de relier la tension aux bornes d'un dipôle et l'intensité du courant électrique qui le traverse.

En courant continu la différence de potentiel ou tension U (en volts) aux bornes d'un consommateur de résistance R (en ohms) est proportionnelle à l'intensité du courant électrique I (en ampères) qui le traverse: $U=RI$ (en convention récepteur)

En courant alternatif, la loi d'Ohm donne une relation entre la valeur efficace de la tension aux bornes d'un dipôle et l'intensité efficace qui le parcourt. On ne parle plus de la résistance mais d'impédance et la loi d'Ohm s'écrit :

$$U_{\text{eff}} = Z \cdot I_{\text{eff}} \text{ où } Z \text{ est l'impédance exprimée en Ohm } (\Omega).$$

On peut généraliser cette loi d'Ohm grâce aux notations complexes. La tension complexe $\underline{u}$ aux bornes d'un dipôle et l'intensité complexe $\underline{i}$ du courant qui le traverse vérifient en effet une relation de proportionnalité analogue à la loi d'Ohm des conducteurs ohmiques.

$$\underline{u} = \underline{Z} \cdot \underline{i}$$

$\underline{u} = \underline{Z} \cdot \underline{i}$ est la loi d'Ohm généralisée et $\underline{Z}$ est appelé impédance complexe.

3- Impédance complexe

a) Définition de l'impédance

L'impédance d'une portion de circuit alternatif exprime l'opposition que cette portion de circuit offre au passage du courant alternatif. [Hebert, W. (1988)]

L'impédance complexe $\underline{Z}$ d'un circuit en régime permanent sinusoïdal est définie comme le quotient de la tension complexe $\underline{u}$ aux bornes du circuit par l'intensité complexe $\underline{i}$ du courant le traversant.

$$\underline{Z} = \frac{\underline{u}}{\underline{i}}$$

Avec :

$$\underline{u} = U_m e^{j(\omega t + \varphi_u)} \text{ et } \underline{i} = I_m e^{j(\omega t + \varphi_i)}$$

On obtient :

$$\underline{Z} = \frac{U_m}{I_m} e^{j(\varphi_u - \varphi_i)} = \frac{U}{I} e^{j(\varphi_u - \varphi_i)}$$

$$\underline{Z} = Z e^{j\varphi}$$

La dépendance sinusoïdale en fonction du temps s'élimine ici, via les termes $e^{j\omega t}$.

L'impédance complexe $\underline{Z}$ est donc indépendant du temps.

L'impédance $\underline{Z}$ est une grandeur complexe. Elle présente donc une partie réelle, une partie imaginaire, un module et un argument. Elle correspond à une convention de notation un peu différente par rapport à l'intensité complexe et la tension complexe. Pour la tension complexe $\underline{u}$ et l'intensité complexe $\underline{i}$, la tension $u(t)$ et l'intensité $i(t)$ sont respectivement égale à la partie réelle ou à la partie imaginaire de leurs expressions complexes. Mais pour l'impédance complexe, l'impédance réelle Z est égale au module de l'impédance complexe $\underline{Z}$.

L'argument φ de l'impédance complexe est égal au déphasage de l'intensité i par rapport à la tension u .

En termes d'argument, la loi d'ohm complexe donne $\text{Arg}(\underline{u}) = \text{Arg}(\underline{Z}) + \text{Arg}(\underline{i})$ soit

$$\varphi_u = \varphi + \varphi_i \text{ donc } \varphi = \varphi_u - \varphi_i$$

- Si $\varphi=0$ rad, la tension $u(t)$ est **en phase** avec le courant $i(t)$,
- Si $\varphi>0$ rad, la tension $u(t)$ est **en avance de phase** sur le courant $i(t)$,

- Si $\varphi < 0$ rad, la tension $u(t)$ est **en retard de phase** sur le courant $i(t)$.

L'impédance complexe s'écrit sous sa forme polaire :

$$\underline{Z} = [Z ; \varphi]$$

Sous sa forme algébrique, l'impédance complexe s'écrit :

$$\underline{Z} = R + jX$$

Où $R = Z \cos \varphi$ et $X = Z \sin \varphi$

La partie réelle R de $\underline{Z}$ s'appelle **résistance**. La résistance R est toujours positive pour les dipôles passifs.

La partie imaginaire X s'appelle **réactance**.

b) Représentation de l'impédance complexe dans un plan complexe (Diagramme de FRESNEL)

La représentation de l'impédance complexe dans un plan complexe est une représentation de FRESNEL de cette grandeur.

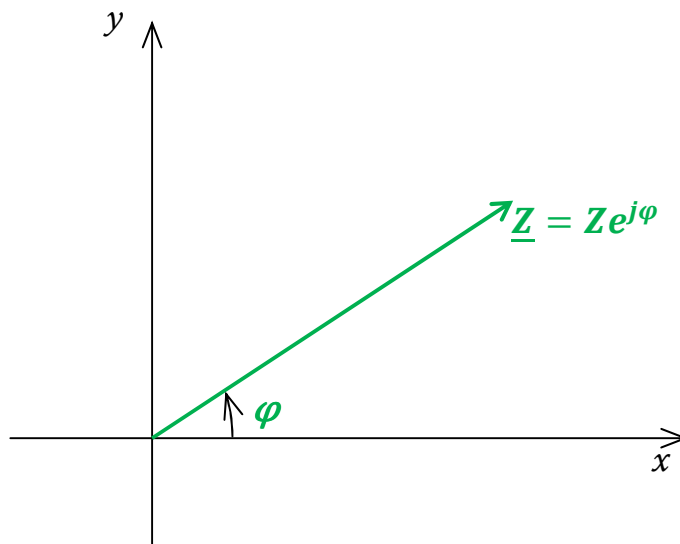


Figure 5 : Représentation de FRESNEL de l'impédance complexe

La phase φ de l'impédance complexe est la différence $\varphi_u - \varphi_i$, donc si on représente les trois grandeurs $\underline{Z}$; $\underline{u}$ et $\underline{i}$ dans un plan complexe, on peut prendre l'intensité comme axe réel.

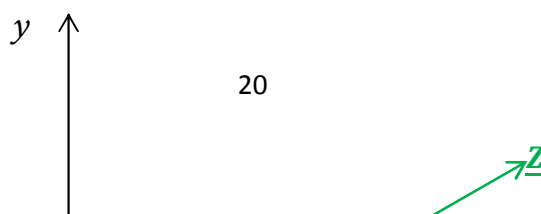


Figure 6 : Représentation des grandeurs $\underline{Z}$; $\underline{u}$ et $\underline{i}$ dans un plan complexe

c) Impédances complexes des dipôles élémentaires

i Conducteur ohmique (Résistor)

Un conducteur ohmique est un dipôle passif dépourvu d'inductance et de capacité.

Un conducteur ohmique est caractérisé par sa résistance R. R est exprimé en ohm (Ω).

[Fraudet, H. (1978)]

En convention récepteur la résistance R est positive.

L'inverse de la résistance est appelé conductance (exprimée en siemens). Notons G cette conductance.

$$G = \frac{1}{R}$$

- Impédance d'un conducteur ohmique de résistance R

La tension aux bornes d'un conducteur ohmique est proportionnelle à l'intensité du courant qui le traverse.

La relation en valeurs instantanées $u = Ri$ entre la tension et le l'intensité du courant dans une résistance R se traduit en valeurs complexes par :

$$\underline{u} = R\underline{i} = \underline{Z} \cdot \underline{i}$$

C'est la loi d'Ohm complexe pour une résistance.

Ainsi l'impédance complexe d'un conducteur ohmique de résistance R s'écrit :

$$\underline{Z}_R = R$$

L'impédance complexe pour un conducteur ohmique est un réel pur donc son argument égal à 0 rad . La tension u et l'intensité i sont donc en phase. Le diagramme de FRESNEL correspondant est dessiné *figure 8*

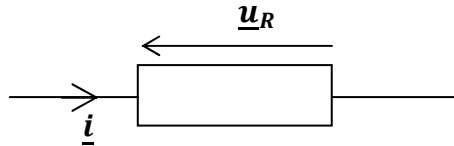


Figure 7 : Conducteur ohmique (résistance pure)

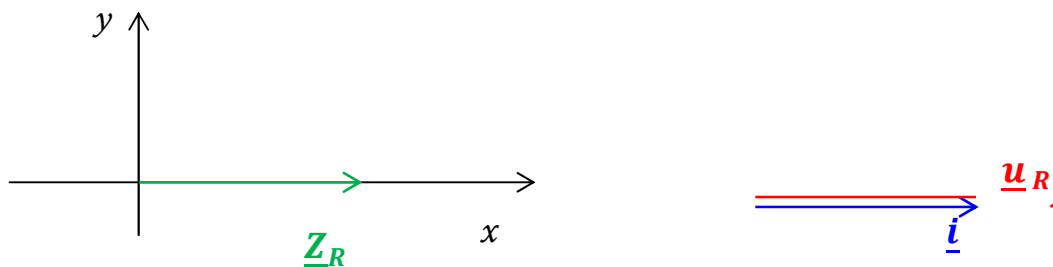


Figure 8 : Diagramme de Fresnel associé à une résistance R

ii Bobine

Une bobine est constituée par un enroulement de fil conducteur sur une surface cylindrique, il forme plusieurs boucles appelés spires. Une bobine se comporte comme un aimant lorsqu'elle est parcourue par un courant électrique. Une bobine parfaite est caractérisée par son inductance $L^{(1)}$; qui est le coefficient d'induction magnétique de la bobine. [Chagnon, C. (2003)]

- Inductance [Beauvillain, R. (1986)]

L'inductance de la bobine est le rapport entre le flux d'induction magnétique à travers un circuit, et le courant qui lui donne naissance :

⁽¹⁾ Dans la pratique on ne peut pas concevoir des inductances pures, le bobinage d'une inductance présente toujours une résistance.

$$L = \frac{\Phi}{i}$$

L'inductance L est exprimée en Henry (H) ; Φ en weber (Wb) et i en Ampère (A)

- Impédance d'une bobine d'inductance L

Aux bornes d'une bobine d'inductance L, la tension $u(t)$ et l'intensité $i(t)$ sont liés par :

$$u = L \frac{di}{dt}$$

En notation complexe, la relation entre la tension complexe $\underline{u}$ et l'intensité complexe $\underline{i}$ s'écrit donc :

$$\underline{u} = L \frac{d\underline{i}}{dt}$$

Vu l'effet de l'opérateur dérivée pour la notation complexe, cette relation devient alors :

$$\underline{u} = j\omega L \underline{i} = \underline{Z} \cdot \underline{i}$$

Cette relation est la loi d'Ohm complexe pour une bobine parfaite d'inductance L.

De cette relation, on voit que l'impédance complexe pour une inductance est :

$$\underline{Z}_L = j\omega L = L\omega e^{j\frac{\pi}{2}}$$

Pour une bobine d'inductance L, l'impédance est une imaginaire pure, donc il s'agit d'une réactance pure.

L'argument de l'impédance complexe $\underline{Z}_L$ est égal à $\pi/2$; donc la tension u est en quadrature avance de $\pi/2$ sur l'intensité i. Le diagramme de Fresnel correspondant est représenté *figure 10*.

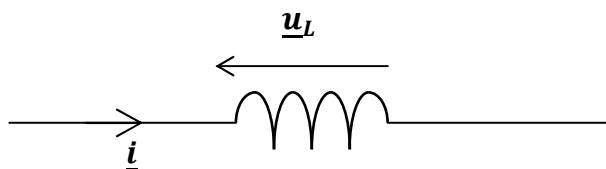


Figure 9 : Bobine (Inductance pure)



Figure 10 : Diagramme de Fresnel associé à une inductance L

iii Condensateur

Un condensateur est un composant électrique capable d'emmagasinier une charge électrique. Il est composé de deux armatures conductrices totalement séparées par un isolant (diélectrique) qui peut être de l'air sec, du mica, de l'alumine ou du papier paraffiné. [Chagnon, C. (2003)]

Un condensateur est caractérisé par sa capacité C qui est l'aptitude de stocker sur ses armatures des charges électriques de signes opposés.

- Capacité [Beauvillain, R. (1986)]

La capacité C d'un condensateur est le rapport qui existe entre la quantité d'électricité qu'il accumule et la tension entre ses bornes :

$$C = \frac{q}{u}$$

La capacité C est exprimée en Farad (F) ; q en Coulomb (C) et u en volt (V).

- Impédance d'un condensateur de capacité C

Un condensateur de capacité C traversé par un courant alternatif sinusoïdal allant à un instant donné de A vers B prendra une charge q sur l'armature liée à A et $-q$ sur l'autre armature.

La tension u aux bornes du condensateur s'écrira : $u = q/C$

Or, $i = dq/dt$; donc on peut écrire la relation entre la tension $u(t)$ et l'intensité $i(t)$

comme suit :

$$i = C \frac{du}{dt} \text{ ou encore } u = \frac{1}{C} \int i dt$$

Pour aboutir à une relation pareille à la loi d'Ohm, on retient la relation $u = \frac{1}{C} \int i dt$.

En notation complexe, la relation entre la tension complexe $\underline{u}$ et l'intensité complexe $\underline{i}$ s'écrit donc :

$$\underline{u} = \frac{1}{C} \int \underline{i} dt$$

Vu l'effet de l'opérateur intégration pour la notation complexe, cette relation devient alors :

$$\underline{u} = \frac{1}{j\omega C} \underline{i} = \underline{Z} \cdot \underline{i}$$

Cette relation est la loi d'Ohm complexe pour un condensateur de capacité C.

On voit que l'impédance complexe pour un condensateur de capacité C est :

$$\underline{Z}_C = \frac{1}{j\omega C} = -\frac{j}{\omega C} = \frac{1}{\omega C} e^{-j\frac{\pi}{2}}$$

Puisque l'impédance complexe d'un condensateur est un imaginaire pur négatif, il s'agit donc aussi d'une réactance pure. L'argument de l'impédance complexe $\underline{Z}_C$ est égal à $-\pi/2$; donc la tension u est en quadrature retard de $\pi/2$ sur l'intensité i . Le diagramme de Fresnel correspondante est représenté figure 12

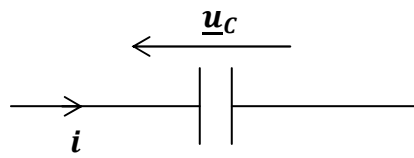


Figure 11 : Condensateur (capacité pure)

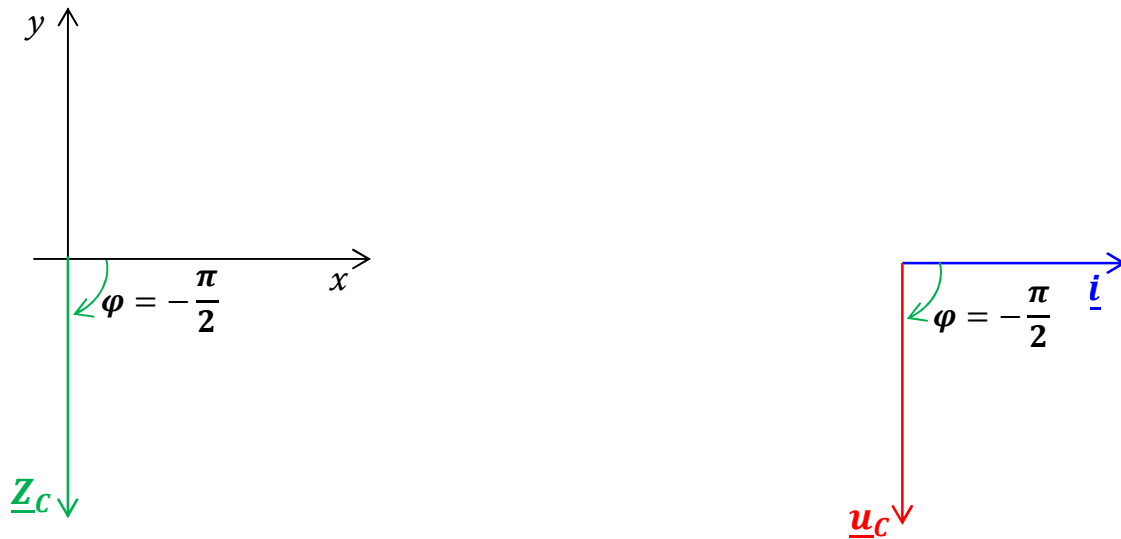


Figure 12 : Diagramme de Fresnel associé à une capacité C

4- Réactances [Niard, J. (1970)]

On peut continuer à appeler réactance le module des impédances d'une inductance ou d'une capacité.

On note X_L la réactance inductive et X_C la réactance capacitive avec :

$$X_L = L\omega$$

et

$$X_C = \frac{1}{C\omega}$$

En utilisant X_L et X_C , les impédances s'écrivent alors,

pour une bobine parfaite : $\underline{Z}_L = jX_L$

pour un condensateur de capacité C : $\underline{Z}_C = -jX_C$

5- Admittances complexes

a) Définition de l'admittance [Niard, J. (1986)]

L'admittance complexe d'une portion de circuit est l'inverse de son impédance. L'admittance complexe est notée $\underline{Y}$

$$\underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}}$$

On a donc, pour le module : $Y = 1/Z$ (l'admittance est exprimée en siemens) et pour

l'argument : $\text{Arg}(\underline{Y}) = -\text{Arg}(\underline{Z}) = -\varphi$

D'où l'expression complexe de l'admittance :

$$\underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}} e^{-j\varphi}$$

La loi d'Ohm complexe $\underline{u} = \underline{Z} \cdot \underline{i}$ peut s'écrire avec l'admittance complexe

$$\underline{u} = \frac{1}{\underline{Y}} \cdot \underline{i}$$

ou encore

$$\underline{i} = \underline{Y} \cdot \underline{u}$$

Cette relation $\underline{i} = \underline{Y} \cdot \underline{u}$ montre une autre forme de la loi d'Ohm complexe en termes d'admittance.

Comme toute grandeur complexe, on peut écrire aussi l'admittance complexe sous sa forme algébrique :

$$\underline{Y} = G + jB$$

Où $G = Y \cos(-\varphi)$ et $B = Y \sin(-\varphi)$

La partie réelle G de l'admittance complexe est appelée **conductance**.

La partie imaginaire B de l'admittance complexe est appelée **susceptance**.

b) Admittances complexes des dipôles élémentaires

i Résistor

Pour un résistor de résistance R , son impédance complexe est : $\underline{Z}_R = R$

Son admittance complexe s'écrit alors :

$$\underline{Y}_R = \frac{1}{R} = G$$

Où G est la conductance du résistor.

ii Bobine

L'impédance complexe d'une bobine d'inductance L est : $\underline{Z}_L = j\omega L$

Son admittance complexe est :

$$\underline{Y}_L = \frac{1}{j\omega L} = -\frac{j}{\omega L}$$

iii Condensateur

L'impédance complexe d'un condensateur de capacité C est : $\underline{Z}_C = \frac{1}{j\omega C}$

Son admittance est :

$$\underline{Y}_C = j\omega C$$

	R	L	C
Relation temporelle	$u = Ri$	$u = L \frac{di}{dt}$	$u = \frac{1}{C} \int i dt$
Relation complexe	$\underline{u} = R\underline{i}$	$\underline{u} = jL\omega\underline{i}$	$\underline{u} = -\frac{j}{C\omega}\underline{i}$
Impédance	$\underline{Z}_R = R$	$\underline{Z}_L = j\omega L$	$\underline{Z}_C = -\frac{j}{\omega C}$
Admittance	$\underline{Y}_R = \frac{1}{R} = G$	$\underline{Y}_L = -\frac{j}{\omega L}$	$\underline{Y}_C = j\omega C$

Tableau 2 : Impédances et admittances complexes des dipôles simples

6- Groupement d'impédances

a) Association d'impédances complexes en série

La loi d'association d'impédances complexes en série est une conséquence directe de la deuxième loi de Kirchhoff (Loi des mailles) et de la loi d'ohm complexe.

Considérons n dipôles d'impédances complexes respectives $\underline{Z}_1; \underline{Z}_2 \dots \underline{Z}_n$ montées en série.

La loi d'ohm complexe aux bornes de chaque dipôle s'écrit :

$$\underline{u}_k = \underline{Z}_k \cdot \underline{i}$$

Compte tenu de la loi des mailles, il vient :

$$\underline{u} = \sum_{k=1}^n \underline{u}_k$$

$$\underline{Z} \cdot \underline{i} = \sum_{k=1}^n \underline{Z}_k \cdot \underline{i}$$

En divisant les deux termes par $\underline{i}$:

$$\underline{Z} = \sum_{k=1}^n \underline{Z}_k$$

On peut donc conclure que : ***l'impédance complexe d'un système d'éléments en série est égale à la somme des impédances complexes de chaque élément.***

b) Association d'impédances complexes en parallèle

La loi d'association d'impédances complexes en parallèle est une conséquence directe de la première loi de Kirchhoff (Loi des mailles) et de la loi d'Ohm complexe.

Il est plus judicieux de travailler avec les admittances pour les circuits en parallèle.

Considérons n dipôles d'impédances complexes respectives $\underline{Z}_1; \underline{Z}_2 \dots \underline{Z}_n$ montées en parallèles. Soient $\underline{Y}_1; \underline{Y}_2 \dots \underline{Y}_n$ les admittances complexes respectives de ces n dipôles.

La loi d'ohm complexe aux bornes de chaque dipôle s'écrit :

$$\underline{i}_k = \underline{Y}_k \cdot \underline{u}$$

Compte tenu de l'additivité des courants (loi des nœuds), il vient :

$$\underline{i} = \sum_{k=1}^n \underline{i}_k$$

$$\underline{Y} \cdot \underline{u} = \sum_{k=1}^n \underline{Y}_k \cdot \underline{u}$$

En divisant les deux termes par $\underline{u}$:

$$\underline{Y} = \sum_{k=1}^n \underline{Y}_k$$

On peut donc conclure que : ***l'admittance complexe d'un système d'éléments en parallèles est égale à la somme des admittances complexes de chaque élément.***

Or l'impédance est l'inverse de l'admittance, on peut écrire une autre relation :

$$\frac{1}{\underline{Z}} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\underline{Z}_k}$$

7- Relation complémentaire entre l'impédance et l'admittance

En utilisant la définition de l'admittance, on peut calculer l'impédance complexe lorsque l'admittance est connue et de même si l'impédance est connue on peut calculer aussi l'admittance.

a) Calcul de $\underline{Z}$ lorsque $\underline{Y}$ est connue

Soit $\underline{Y} = G + jB$ dont les valeurs G et B sont données et soit $\underline{Z} = R + jX$ dont les valeurs R et X sont à calculer.

D'après la définition de l'admittance, l'impédance complexe est l'inverse de l'admittance.

$$\underline{Z} = \frac{1}{\underline{Y}} = \frac{1}{G + jB} = \frac{G - jB}{G^2 + B^2}$$

On obtient alors :

$$\underline{Z} = \frac{G}{G^2 + B^2} - j \frac{B}{G^2 + B^2}$$

Par identification on a :

$$R = \frac{G}{G^2 + B^2} \quad \text{et} \quad X = -\frac{B}{G^2 + B^2}$$

b) Calcul de $\underline{Y}$ lorsque $\underline{Z}$ est connue

Soit $\underline{Z} = R + jX$ dont les valeurs de R et de X sont données et soit $\underline{Y} = G + jB$ dont les valeurs de G et de B sont à calculer.

Sachant que $\underline{Y}$ est l'inverse de $\underline{Z}$:

$$\underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}} = \frac{1}{R + jX} = \frac{R - jX}{R^2 + X^2}$$

On obtient alors :

$$\underline{Y} = \frac{R}{R^2 + X^2} - j \frac{X}{R^2 + X^2}$$

Par identification, on a :

$$G = \frac{R}{R^2 + X^2} \quad \text{et} \quad B = -\frac{X}{R^2 + X^2}$$

II- C Étude d'un circuit RLC en série avec les notations complexes

Nous allons maintenant étudier le comportement d'un circuit RLC en série soumis à une excitation sinusoïdale, c'est-à-dire à une tension alternative sinusoïdale, au moyen des nombres complexes.

Considérons un circuit formé d'une résistance R, d'une inductance L et d'une capacité C montées en série aux bornes d'un générateur délivrant une force électromotrice alternative dont leur expression complexe est : $\underline{u} = U_m e^{j\omega t}$

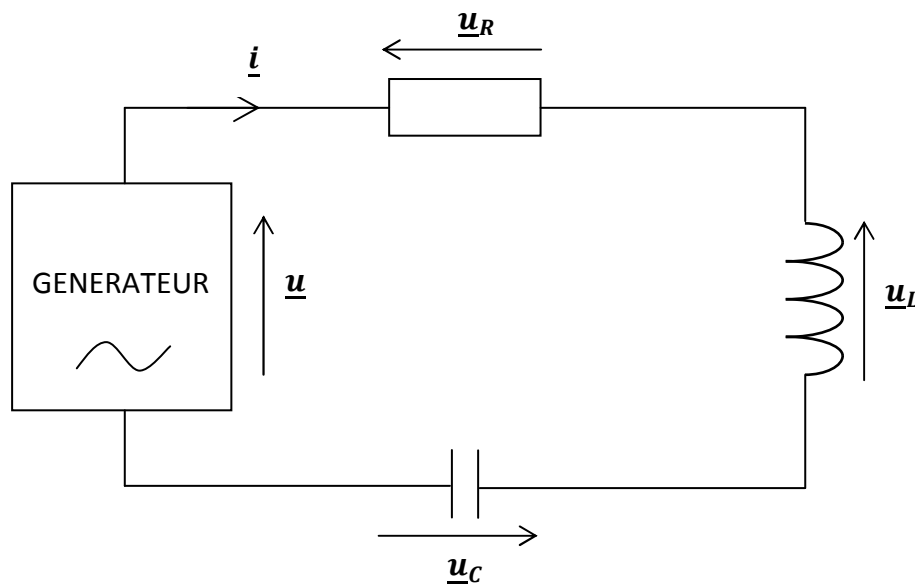


Figure 13 : Circuit RLC série

La loi des mailles s'écrit :

$$\underline{u} = \underline{u}_L + \underline{u}_R + \underline{u}_C$$

En écrivant la loi d'Ohm complexe aux bornes de chacun des éléments, notons que l'intensité complexe $\underline{i}$ est la grandeur commune à ces trois éléments en série, on obtient l'équation différentielle :

$$\underline{u} = L \frac{d\underline{i}}{dt} + R \underline{i} + \frac{1}{C} \int \underline{i} dt$$

$$\underline{u} = jL\omega \underline{i} + R \underline{i} - \frac{j}{C\omega} \underline{i}$$

En regroupant les termes et en factorisant dans le membre de droite le terme $\underline{i}$, on obtient :

$$\underline{u} = \left[R + j \left(L\omega - \frac{1}{C\omega} \right) \right] \underline{i}$$

1- Impédance complexe du circuit RLC en série

La relation qui relie la tension complexe $\underline{u}$ et l'intensité complexe $\underline{i}$ précédente a la forme de la loi d'Ohm complexe $\underline{u} = \underline{Z} \cdot \underline{i}$

$$\underline{u} = \left[R + j \left(L\omega - \frac{1}{C\omega} \right) \right] \underline{i}$$

On peut donc tirer de cette équation l'expression de l'impédance complexe d'un circuit RLC en série.

D'où l'expression de l'impédance complexe $\underline{Z}$:

$$\underline{Z} = R + j \left(L\omega - \frac{1}{C\omega} \right)$$

Ici la réactance est :

$$X = L\omega - \frac{1}{C\omega}$$

Voyons que la réactance d'un circuit RLC en série est la différence entre la réactance inductive et la réactance capacitive.

Le module de l'impédance complexe (impédance réelle) pour un circuit RLC en série est donné par l'expression suivante :

$$Z = |\underline{Z}| = \sqrt{R^2 + X^2}$$

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}$$

Pour l'argument :

$$\varphi = \text{Arg}(\underline{Z})$$

$$\tan \varphi = \frac{X}{R}$$

d'où

$$\varphi = \tan^{-1}\left(\frac{X}{R}\right)$$

Pour le diagramme de Fresnel correspondant à un circuit RLC série, l'intensité est prise pour axe réel car les trois éléments en série sont parcourus par la même intensité.

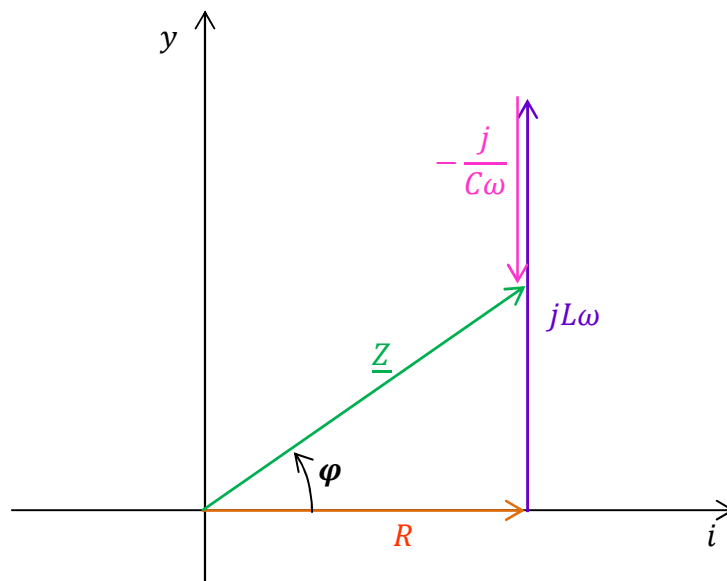


Figure 14 : Diagramme de Fresnel d'impédance d'un circuit RLC série

2- Résonance série

Considérons un circuit comprenant en série un résistor de résistance R , une bobine parfaite d'inductance L et un condensateur considéré comme parfait de capacité C . Ce circuit RLC série est lié à un générateur sinusoïdal d'amplitude constante et de pulsation ω .

On se propose maintenant d'étudier la variation des grandeurs intéressantes (intensité du courant, tension). Pour ceux-ci on garde les valeurs des éléments du circuit constantes et on applique au circuit une tension de valeur efficace constante mais de fréquence variable.

Par définition, on appelle résonance l'obtention d'un maximum de l'amplitude pour la grandeur étudiée en régime sinusoïdal forcé.

On cherche alors la forme des courbes représentatives des amplitudes et phases des grandeurs intéressantes.

Remarque : Il est possible aussi d'appliquer au circuit une tension à valeur efficace et fréquence constantes mais que l'on fait varier la capacité du condensateur.

a) Résonance d'intensité

Pour un circuit RLC en série la loi d'Ohm complexe s'écrit :

$$\underline{u} = \left[R + j \left(L\omega - \frac{1}{C\omega} \right) \right] \underline{i}$$

Cette relation nous donne l'expression de l'intensité complexe du courant.

Ainsi on a :

$$\underline{i} = \frac{\underline{u}}{R + j \left(L\omega - \frac{1}{C\omega} \right)}$$

Le module i et le déphasage φ_i de $\underline{i}$ par rapport à $\underline{u}$ sont donnés par :

$$i = \frac{u}{\sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega} \right)^2}}$$

$$\varphi_i = \tan^{-1} \left[-\frac{L\omega - \frac{1}{C\omega}}{R} \right]$$

On pourra avoir un maximum pour i si la partie imaginaire de l'impédance complexe est nulle.

On dit que le circuit est en résonance quand la partie imaginaire de l'impédance complexe Z s'annule.

$$L\omega - \frac{1}{C\omega} = 0$$

***i* Etude de la résonance d'intensité**

Nous prenons la pulsation ω et non la fréquence N pour variable parce que les résultats sont plus immédiats.

Lorsqu'on fait varier la pulsation, on remarquera qu'il existe une valeur de pulsation $\omega = \omega_0$ à laquelle la partie imaginaire de l'impédance complexe s'annule. Ceci se produit quand

$$L\omega_0 = \frac{1}{C\omega_0}$$

Ou encore

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

ω_0 est la pulsation propre du circuit oscillant L C.

On peut effectuer une étude directe de l'expression de i et de φ_i mais il est plus judicieux d'introduire au préalable une grandeur universelle et sans dimension : le facteur de qualité Q

$$Q = \frac{L\omega}{R} \text{ ou } Q = \frac{1}{RC\omega}$$

Le facteur de qualité à la résonance s'écrit donc :

$$Q_0 = \frac{L\omega_0}{R} \text{ ou } Q_0 = \frac{1}{RC\omega_0} \text{ où } \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

En mettant R en facteur au dénominateur les expressions de i et de φ_i deviennent :

$$i = \frac{u}{R\sqrt{1 + Q_0^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2}}$$

et

$$\varphi_i = \tan^{-1} \left[-Q_0 \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) \right]$$

ii Courbe de la résonance d'intensité

Pour étudier les effets d'une variation de fréquence et de la valeur du facteur de qualité à la résonance sur l'intensité du circuit RLC série il faut tracer la courbe représentative du module de l'intensité complexe $\underline{i}$ en fonction de ω .

Le comportement du circuit dépend de la valeur Q_0 du facteur de qualité à la résonance donc de la valeur de la résistance R du résistor. Nous établirons plus tard que la valeur critique de Q_0 est $Q_k = \sqrt{2}/2$.

Cette valeur critique du facteur de qualité impose une valeur critique de la résistance R :

$$R_k = \sqrt{\frac{2L}{C}}$$

Prenons alors deux valeurs numériques de Q_0 : l'un avec $Q_0 = 5 > Q_k$ et $R = 20\Omega$, et l'autre avec $Q_0 = 0,5 < Q_k$ et $R = 200\Omega$ pour étudier la variation de l'intensité qui traverse le circuit.

Il faut donc deux circuits de même inductance L et de capacité C mais de résistance R différentes.

Les valeurs communes aux deux circuits sont : $U=110\text{ V}$; $L=0,1\text{H}$; $C=10\mu\text{F}$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{0,1 \times 10^{-5}}} = 10^3 \text{ rad/s}$$

On obtient les courbes suivantes :

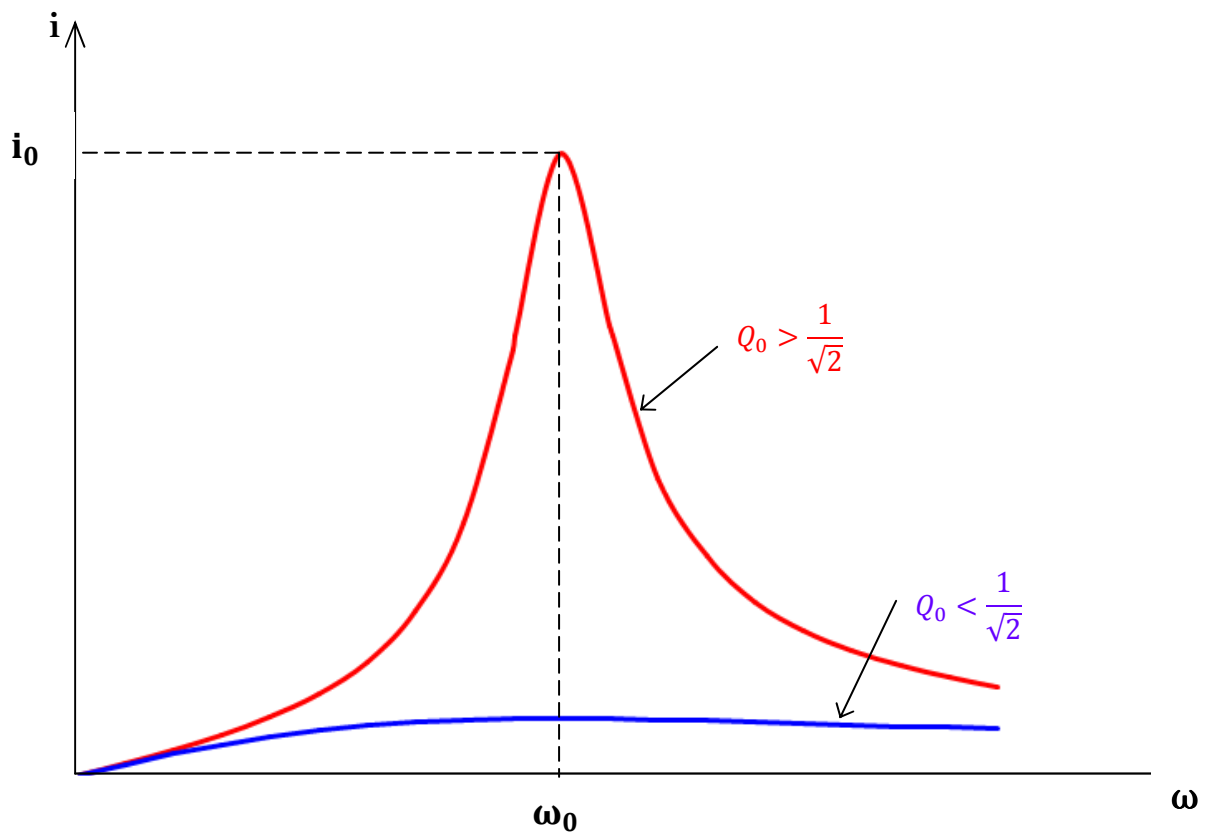


Figure 15 : Courbe de résonance d'intensité d'un circuit RLC série

L'intensité du courant est nulle pour $\omega = 0$, il croît et devient maximum ($i_0 = u/R$) pour $\omega = \omega_0$; ensuite il tend vers 0 quand ω tend vers l'infinie.

Le maximum est d'autant plus accentué que R est plus petite c'est-à-dire que Q_0 est plus grand. On dit alors que l'acuité de la résonance est plus grande.

On peut tracer aussi la courbe $\varphi_i = f(\omega)$ donnant la variation de la phase de l'intensité en fonction de la pulsation.

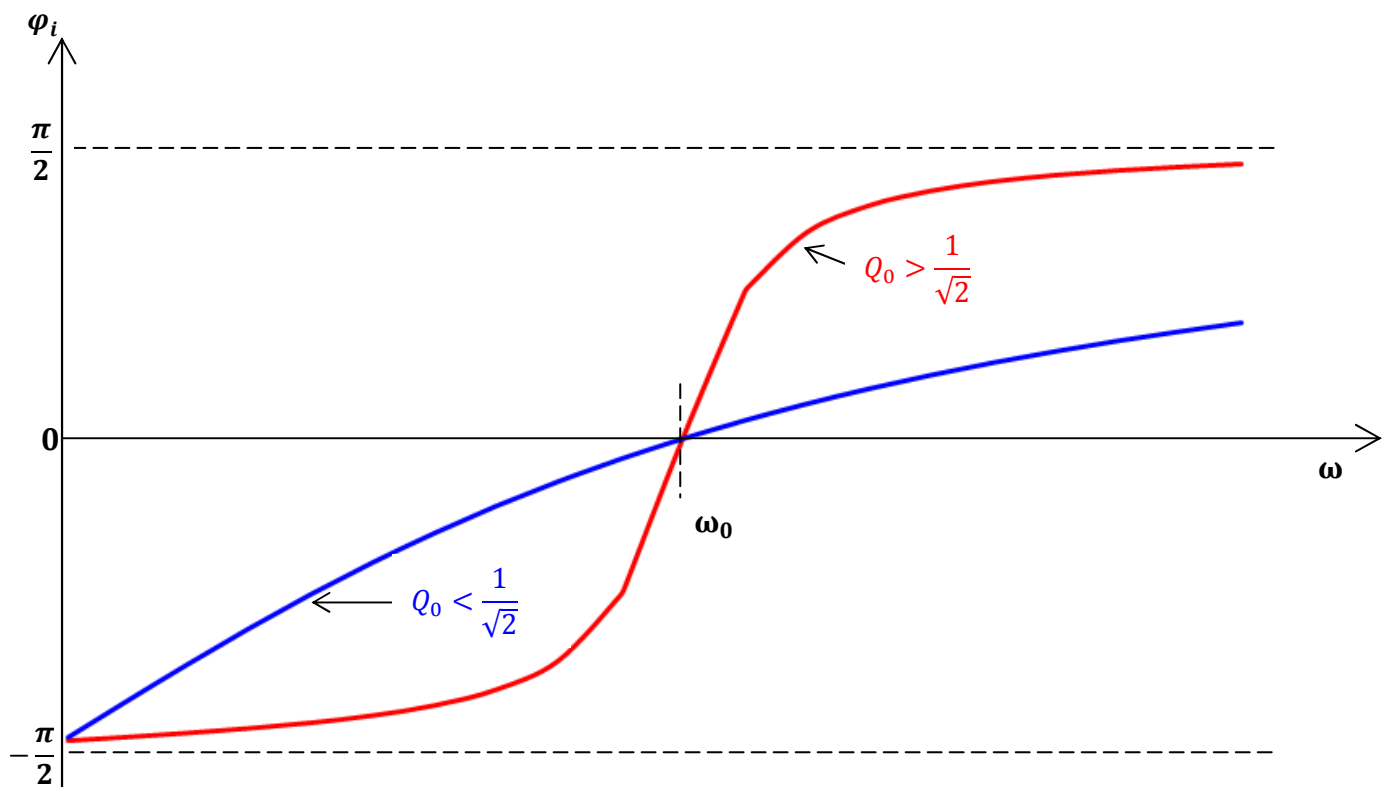


Figure 16: Variation du déphasage de i par rapport à u d'un circuit RLC série

L'angle φ passe progressivement de $-\pi/2$ à $+\pi/2$, il est nul pour $\omega = \omega_0$ et ses variations au voisinage de ω_0 est d'autant plus rapides que Q_0 est plus grand.

iii Conséquence de la résonance

En tenant compte de la nullité de la partie imaginaire de l'impédance complexe à la résonance :

- ✖ La réactance inductive et la réactance capacitive du circuit sont égales.

$$L\omega_0 = \frac{1}{C\omega_0}$$

- ✖ L'impédance complexe devient une réelle qui est la résistance R du résistor.

$$\underline{Z} = R$$

- ✖ L'impédance réelle qui est égale à la résistance du circuit $Z = R$ est une valeur minimale.
L'impédance est alors minimale à la résonance.
- ✖ L'intensité du courant dans le circuit est maximale.

Puisque l'impédance prend une valeur minimale donc l'intensité du courant devient maximale car l'intensité du courant et l'impédance sont deux grandeurs inversement proportionnelles.

$$i_0 = \frac{u}{Z}$$

✱ La valeur de **$\tan \varphi$** s'annule et la phase de l'impédance devient aussi zéro.

$$\varphi = 0 \text{ rad}$$

L'intensité du courant qui traverse le circuit est donc en phase avec la tension appliquée au circuit.

iv Bande passante

Lorsque la pulsation ω varie, on constate qu'il y a des valeurs de la pulsation ω_1 et ω_2 où l'intensité du courant commun vaudra $i = i_0 / \sqrt{2}$, c'est-à-dire que sa valeur à la résonance

est divisée par $\sqrt{2}$. Or, dire que i est divisée par $\sqrt{2}$ équivaut à dire que l'impédance Z est multipliée par $\sqrt{2}$ car le circuit est alimenté sous une tension de valeur efficace constante.

Donc, on doit avoir :

$$\sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2} = R\sqrt{2} = \sqrt{R^2 + R^2}$$

soit

$$\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2 = R^2$$

$$\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right) = \pm R$$

D'où les valeurs de ω_1 et ω_2

$$\omega_1 = -\frac{R}{2L} + \sqrt{\left[\left(\frac{R}{2L}\right)^2 + \frac{1}{LC}\right]}$$

$$\omega_2 = \frac{R}{2L} + \sqrt{\left[-\frac{R}{2L}\right]^2 + \frac{1}{LC}}$$

En utilisant Q_0 et ω_0 on peut ainsi écrire :

$$\omega_1 = \omega_0 \left[-\frac{1}{2Q_0} + \sqrt{1 + \left(\frac{1}{2Q_0}\right)^2} \right]$$

$$\omega_2 = \omega_0 \left[\frac{1}{2Q_0} + \sqrt{1 + \left(\frac{1}{2Q_0}\right)^2} \right]$$

Et les valeurs des deux fréquences qui correspondent à ces deux valeurs de pulsation sont :

$$f_1 = f_0 \left[-\frac{1}{2Q_0} + \sqrt{1 + \left(\frac{1}{2Q_0}\right)^2} \right]$$

$$f_2 = f_0 \left[\frac{1}{2Q_0} + \sqrt{1 + \left(\frac{1}{2Q_0}\right)^2} \right]$$

Ici f_0 indique la fréquence à la résonance.

- La bande passante($\mathcal{B}$) est l'ensemble de fréquence comprise entre f_1 et f_2 .

$$\mathcal{B} = f_2 - f_1 = \frac{f_0}{Q_0} \quad (\mathcal{B} \text{ et } f_0 \text{ sont en Hertz})$$

- Aux extrémités de la bande passante, l'intensité du courant est : $i_2 = i_1 = i_0 / \sqrt{2}$

Puisque

$$\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2 = R^2$$

$$\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right) = \pm R$$

L'impédance complexe du circuit est :

$$\underline{Z} = R \pm jR$$

Et que $\tan \varphi = \pm 1$ c'est à dire que $\varphi = \pm \pi/4$

On peut résumer les résultats :

Fréquences	$f_1 = f_0 \left(1 - \frac{1}{2Q_0}\right)$	f_0	$f_2 = f_0 \left(1 + \frac{1}{2Q_0}\right)$
Impédance $\underline{Z}$	$R - jR$	R	$R + jR$
i efficace	$\frac{i_0}{\sqrt{2}}$	i_0	$\frac{i_0}{\sqrt{2}}$
Déphasage φ	$-\frac{\pi}{4} \text{ rad}$	0 rad	$\frac{\pi}{4} \text{ rad}$

Tableau 3 : Tableau récapitulatif de la bande passante

Remarque : Dans le cas où Q_0 est grand devant l'unité on pourra avoir des valeurs approchées de ω_1 et de ω_2 ainsi que de f_1 et de f_2

$$\omega_1 = \omega_0 \left(1 - \frac{1}{2Q_0}\right) \quad \text{et} \quad \omega_2 = \omega_0 \left(1 + \frac{1}{2Q_0}\right)$$

$$f_1 = f_0 \left(1 - \frac{1}{2Q_0}\right) \quad \text{et} \quad f_2 = f_0 \left(1 + \frac{1}{2Q_0}\right)$$

Ces valeurs obtenues par approximation donnent la même expression de la bande passante B .

b) Résonance de la tension aux bornes du condensateur

On a déjà vu l'expression complexe de la tension aux bornes d'un condensateur :

$$\underline{u}_c = \frac{1}{jC\omega} \underline{i}$$

Or l'intensité complexe $\underline{i}$ est donnée par :

$$\underline{i} = \frac{\underline{u}}{R + j\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)}$$

On en déduit :

$$\underline{u}_C = \frac{\underline{u}}{jC\omega \left[R + j\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right) \right]}$$

$$\underline{u}_C = \frac{\underline{u}}{1 - LC\omega^2 + jRC\omega}$$

Le module u_C et le déphasage φ_C de $\underline{u}_C$ par rapport à $\underline{u}$ sont donnés par :

$$u_C = \frac{u}{\sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}} \cdot \frac{1}{C\omega}$$

$$u_C = \frac{u}{\sqrt{(LC\omega^2 - 1)^2 + (RC\omega)^2}}$$

et

$$\varphi_C = \tan^{-1} \left[-\frac{RC\omega}{1 - LC\omega^2} \right]$$

i Etude de la résonance de la tension u_C

Il y a résonance si la tension aux bornes du condensateur u_C admet un maximum ou si la fonction $T(\omega) = (LC\omega^2 - 1)^2 + (RC\omega)^2$ admet un minimum c'est-à-dire que si la fonction dérivée $T'(\omega)$ s'annule.

L'expression de la pulsation de résonance ω_r s'obtient en résolvant $T'(\omega) = 0$

$$T'(\omega) = 4LC\omega(LC\omega^2 - 1) + 2(RC)^2\omega$$

$$4LC\omega(LC\omega^2 - 1) + 2(RC)^2\omega = 0$$

Cette équation donne :

$$\omega_r^2 = \frac{1}{LC} - \frac{R^2}{2L^2}$$

En utilisant la grandeur Q_0 et la pulsation à la résonance ω_0 on obtient :

$$\omega_r^2 = \omega_0^2 \left(1 - \frac{1}{2Q_0^2} \right)$$

D'où

$$\omega_r = \omega_0 \sqrt{\left(1 - \frac{1}{2Q_0^2} \right)}$$

On constate que la pulsation de résonance ω_r est différente de la pulsation de résonance du courant ou pulsation propre ω_0 . Elle sera d'autant plus proche de la pulsation propre ω_0 que Q_0 est grand devant 1. La résonance en tension se produit donc si le facteur de qualité Q_0 est suffisamment grand.

ii Valeur critique de Q_0 et de R

Si ω_r^2 est positif, il y a une valeur ω_r pour laquelle u_c est maximal. Dans le cas contraire il n'y a plus de maximum.

Donc il faut que :

$$1 > \frac{1}{2Q_0^2} \text{ soit } Q_0^2 > \frac{1}{2}, \text{ soit enfin } Q_0 > \frac{\sqrt{2}}{2}$$

La valeur critique de Q pour laquelle la résonance aura lieu est bien :

$$Q_k = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Or R et Q_0 sont reliés par $Q_0 = L\omega_0/R$

On peut écrire encore

$$Q_0^2 = \frac{CL^2\omega_0^2}{CR} = \frac{L}{CR^2}$$

D'où la valeur critique de R

$$R_k = \sqrt{\frac{2L}{C}}$$

Si $R < R_k$ il y a un minimum pour u_c , sinon la tension aux bornes du condensateur est constamment décroissante quand ω croît.

iii Tracée des courbes $u_c=f(\omega)$

Comme dans la résonance d'intensité, prenons aussi deux valeurs différentes de Q_0 : l'un inférieur à la valeur critique Q_k et l'autre supérieur à Q_k .

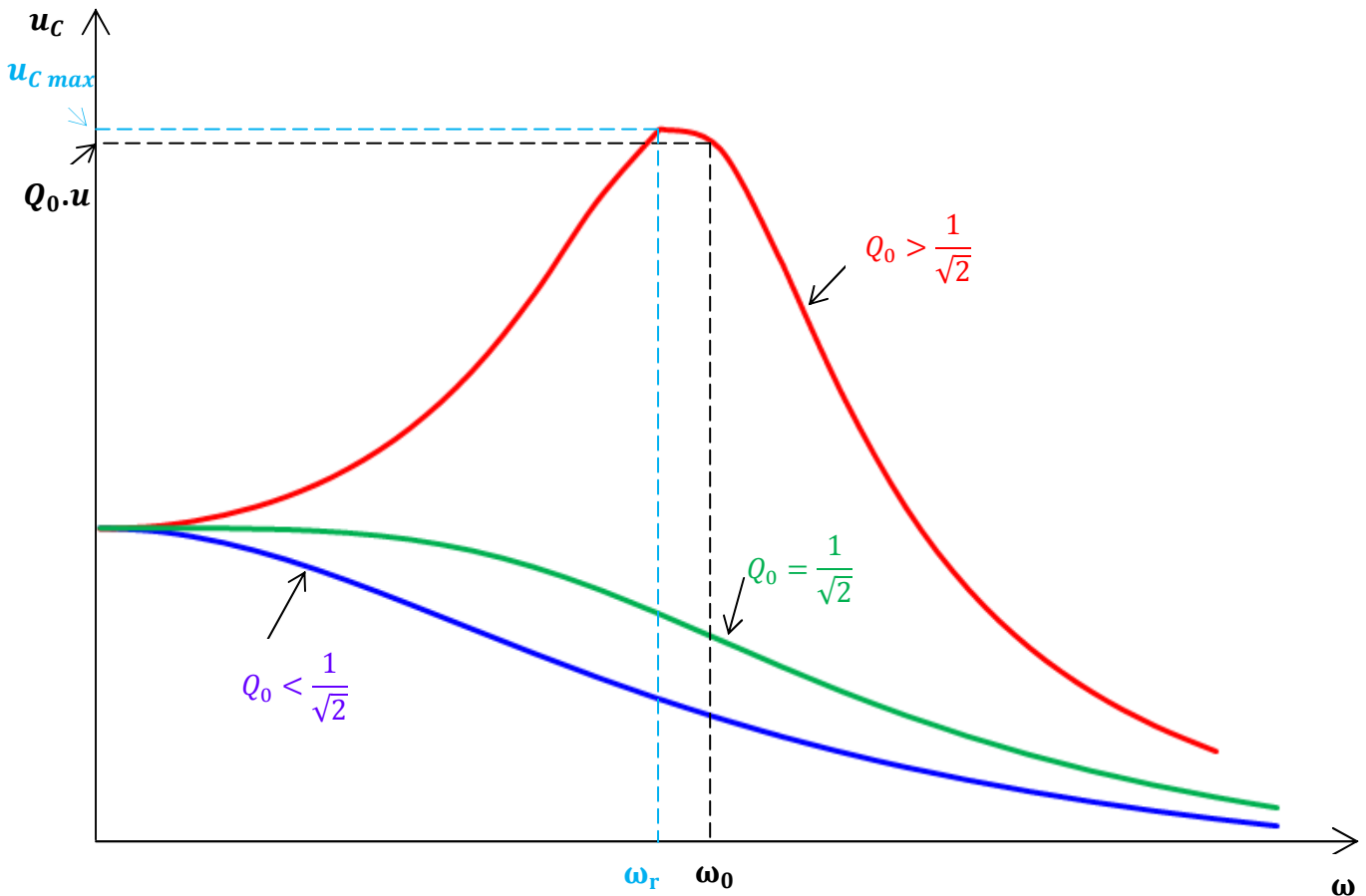


Figure 17: Courbe de résonance de la tension u_c

On constate que :

- Si $Q_0 < 1/\sqrt{2}$, il n'existe pas de résonance de la tension, u_c : la courbe $u_c = f(\omega)$ est une fonction monotone décroissante de ω .
- Si $Q_0 > 1/\sqrt{2}$, il existe une résonance de la tension aux bornes du condensateur et la pulsation de résonance ω_r est différente de la pulsation propre ω_0 , ainsi que la pulsation de résonance de l'intensité du courant.

En remplaçant ω par la valeur de ω_r dans l'expression de u_C ; on trouve un maximum de la tension aux bornes du condensateur, noté $u_{C\max}$, tel que :

$$u_{C\max} = \frac{u \cdot Q_0}{\sqrt{1 - \frac{1}{4Q_0^2}}}$$

iv Cas où Q_0 est très grand

Lorsque Q_0 est très grand (cas des amortissements très faibles), les valeurs de ω_r et $u_{C\max}$ donnent de façons approchée :

$$\omega_r \simeq \omega_0 \text{ et } u_{C\max} \simeq u \cdot Q_0$$

Or à la résonance les tensions aux bornes du condensateur et celle du bobine ont les mêmes valeurs donc ils sont égales à Q_0 fois la tension débitée par le générateur

$$u_L = u_{C\max} = u \cdot Q_0$$

Conséquences :

- La résonance sera recherchée dans les circuits de l'électronique parce que les tensions y sont faibles et qu'il est intéressant de les **amplifier**.
- Par contre la résonance sera évitée dans les circuits industriels parce que les tensions y sont élevées et que la résonance serait dangereuse pour les appareils et pour ce qui s'en servent.

c) Courbes universelles de résonance

Il est intéressant de remplacer les courbes de résonance par une courbe universelle qui sera utilisable pour tous les circuits résonnants en série.

Posons :

$$\underline{y} = \frac{\underline{i}}{\underline{i}_0} = \frac{\underline{Z}_0}{\underline{Z}}$$

Rappelons que :

$$\underline{Z} = R + j \left(L\omega - \frac{1}{C\omega} \right) \text{ et } \underline{Z}_0 = R$$

Il vient :

$$\underline{y} = \frac{R}{R + j\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)}$$

$$\underline{y} = \frac{1}{1 + \frac{j}{R}\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)}$$

En utilisant l'expression de la pulsation propre $\omega_0^2 = 1/LC$ et celle du facteur de qualité

$Q_0 = L\omega_0/R$ on aura une autre expression de $\underline{y}$:

$$\underline{y} = \frac{1}{1 + jQ_0\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)}$$

Posons $\omega/\omega_0 = 1 + \varepsilon$

Donc on a :

$$\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} = (1 + \varepsilon) - \frac{1}{(1 + \varepsilon)} \simeq (1 + \varepsilon) - (1 - \varepsilon)$$

$$\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \simeq 2\varepsilon$$

D'où :

$$\underline{y} = \frac{1}{1 + j2\varepsilon Q_0}$$

Cette expression nous montre qu'un circuit résonnant est essentiellement caractérisé par son facteur de qualité.

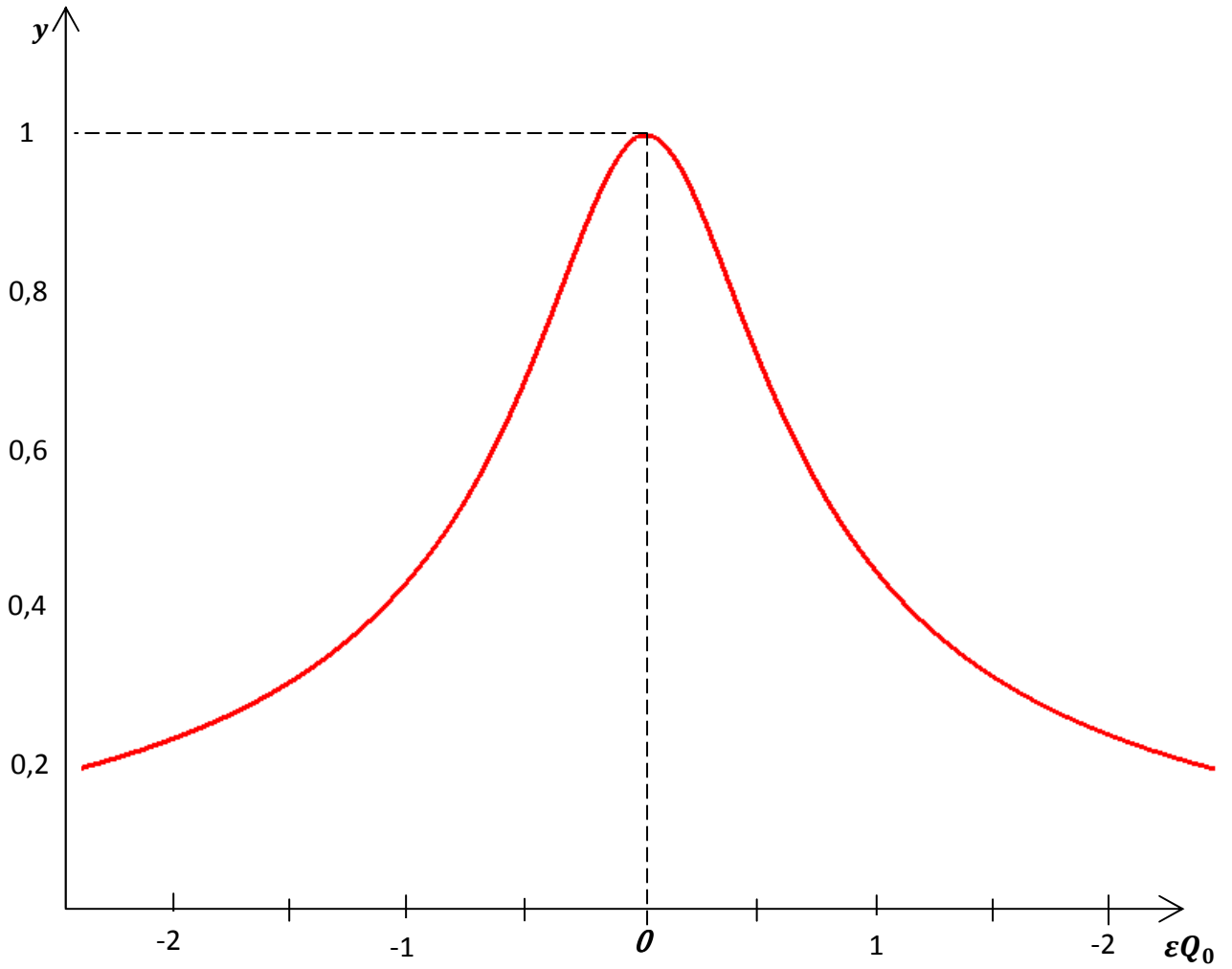
Le module $|\underline{y}|$ et le déphasage φ_y de $\underline{y}$ sont donnés par :

$$|\underline{y}| = y = \frac{1}{\sqrt{1 + 4(\varepsilon Q_0)^2}}$$

Et

$$Arg(\underline{y}) = \tan^{-1}(-2 \varepsilon Q_0)$$

Les courbes représentatives de $y = f(\varepsilon Q_0)$ et $\varphi_y = f(\varepsilon Q_0)$ sont les courbes universelles de résonance.



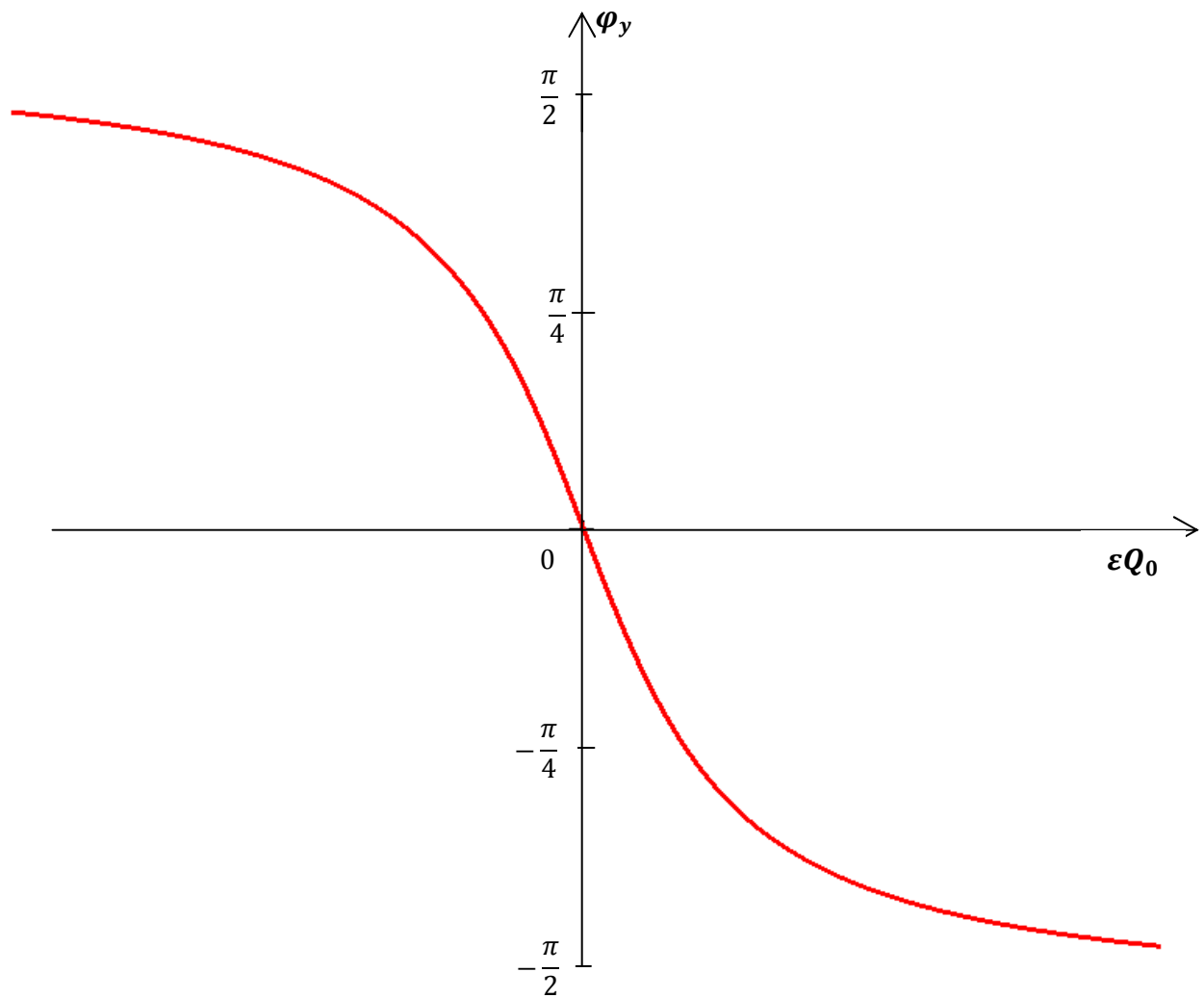


Figure 18: Courbes universelles de résonance

On obtient des courbes pareilles aux courbes représentatives de $i = f(\omega)$ et de $\varphi_i = f(\omega)$.

Pour les courbes universelles de résonance, le maximum de y est obtenu pour $\varepsilon Q_0 = 0$ c'est-à-dire que lorsque $\varepsilon = 0$. Or ε ne prend pas une valeur nulle que si la pulsation ω est égale à la pulsation propre ω_0 .

Ces courbes permettent ainsi de déterminer pour les fréquences intéressantes l'intensité absorbée et le déphasage entre la tension appliquée et cette intensité.

II- D Etude d'un circuit RLC en parallèle avec les notations complexes

Considérons un circuit formé d'une résistance R, une inductance L, une capacité C montées en parallèle aux bornes d'un générateur délivrant une force électromotrice alternative dont leur expression complexe est : $\underline{u} = U_m e^{j\omega t}$

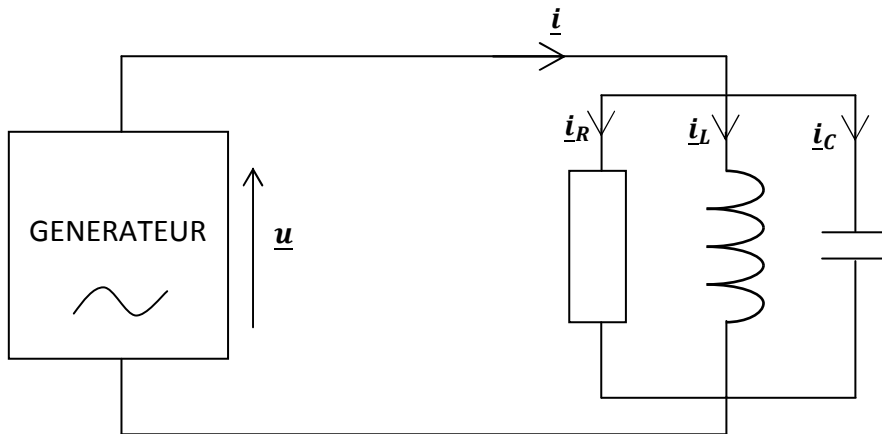


Figure 19 : Circuit RLC parallèle

La loi de nœud s'écrit :

$$\underline{i} = \underline{i}_L + \underline{i}_R + \underline{i}_C$$

En écrivant la loi d'Ohm complexe aux bornes de chacun des éléments, notons que la tension complexe $\underline{u}$ est la grandeur commune à ces trois éléments en parallèle, on obtient :

$$\underline{i} = \frac{1}{L} \int \underline{u} dt + \frac{\underline{u}}{R} + C \frac{d\underline{u}}{dt}$$

$$\underline{i} = -\frac{j}{L\omega} \underline{u} + \frac{\underline{u}}{R} + jC\omega \underline{u}$$

En isolant la partie réelle et la partie imaginaire et en factorisant le membre de droite le terme $\underline{u}$, on obtient :

$$\underline{i} = \left[\frac{1}{R} + j \left(C\omega - \frac{1}{L\omega} \right) \right] \underline{u}$$

1- Impédance complexe du circuit RLC en parallèle

La relation qui lie l'intensité complexe $\underline{i}$ et la tension complexe $\underline{u}$ pour un circuit RLC en parallèle est analogue à l'expression de la loi d'Ohm complexe $\underline{i} = \underline{Y} \cdot \underline{u}$

$$\underline{i} = \left[\frac{1}{R} + j \left(C\omega - \frac{1}{L\omega} \right) \right] \underline{u}$$

On peut donc tirer de cette relation l'expression de l'admittance complexe d'un circuit en parallèle. D'où l'expression de l'admittance complexe :

$$\underline{Y} = \frac{1}{R} + j \left(C\omega - \frac{1}{L\omega} \right)$$

$G = \frac{1}{R}$ est la conductance

$B = C\omega - \frac{1}{L\omega}$ est la susceptance

L'expression de l'impédance complexe est l'inverse de l'admittance complexe :

$$\underline{Z} = \frac{1}{\frac{1}{R} + j \left(C\omega - \frac{1}{L\omega} \right)}$$

L'impédance réelle d'un circuit RLC en parallèle est :

$$Z = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{R}\right)^2 + \left(C\omega - \frac{1}{L\omega}\right)^2}}$$

En rendant le dénominateur de $\underline{Z}$ réel, on obtient :

$$\underline{Z} = \frac{\frac{1}{R} - j \left(C\omega - \frac{1}{L\omega} \right)}{\left(\frac{1}{R}\right)^2 + \left(C\omega - \frac{1}{L\omega}\right)^2}$$

On peut en déduire l'argument de l'impédance complexe :

$$\tan \varphi = -R \left(C\omega - \frac{1}{L\omega} \right)$$

$$\varphi = \tan^{-1} \left[-R \left(C\omega - \frac{1}{L\omega} \right) \right]$$

Pour le diagramme de Fresnel correspondant au circuit RLC parallèle la tension u est prise pour axe réel car la tension complexe est la grandeur commune aux trois éléments en parallèle. Puisque nous avons utilisé la loi d'Ohm complexe en termes d'admittance donc il est plus judicieux de dessiner le diagramme de Fresnel d'admittance.

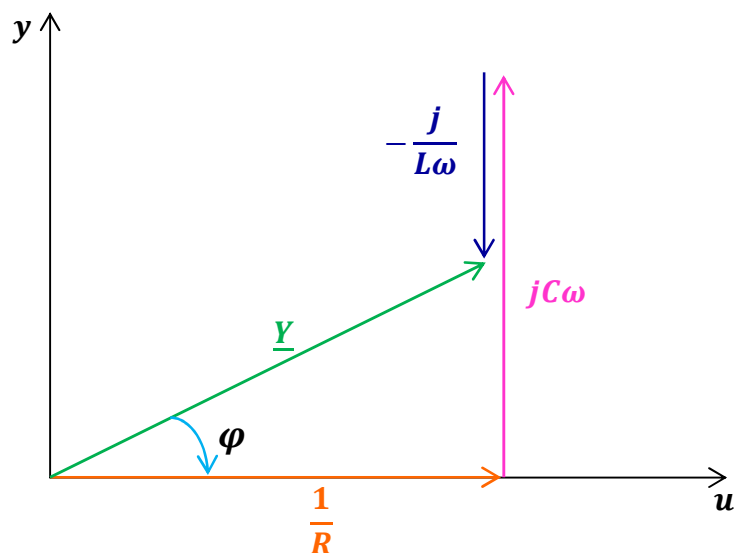


Figure 20 : Diagramme de Fresnel d'admittance d'un circuit RLC parallèle

2- Dualité entre circuit RLC série et circuit RLC parallèle

Considérons deux circuits, le premier constitué de trois éléments (résistor de résistance R , bobine parfaite d'inductance L , et condensateur de capacité C) branchés en série, le deuxième constitué de trois éléments (résistor de résistance R , bobine parfaite d'inductance L , et condensateur de capacité C) branchés en parallèle.

Pour ces deux circuits la loi d'Ohm complexe s'écrit :

$$\text{– Circuit série} \quad \underline{u} = \left[R + j \left(L\omega - \frac{1}{C\omega} \right) \right] \underline{i}$$

$$\text{– Circuit parallèle} \quad \underline{i} = \left[\frac{1}{R} + j \left(C\omega - \frac{1}{L\omega} \right) \right] \underline{u}$$

On constate que les relations qui régissent les deux circuits ont la même forme. Pour passer l'un de l'autre il suffit de changer $\underline{u}$ en $\underline{i}$; R en $1/R$; L en C et $\underline{Z}$ en $\underline{Y}$. On dit alors qu'il y a dualité entre les deux circuits.

Le principe de dualité permet d'expliquer certaines analogies, comme les phénomènes de résonance, que l'on rencontre dans le circuit RLC série et le circuit RLC parallèle qui sont en apparence différents.

3- Résonance parallèle

Considérons un circuit comprenant un résistor de résistance R , une bobine parfaite d'inductance L et un condensateur considéré comme parfait de capacité C , ces trois éléments sont montés en parallèle. Ce circuit RLC parallèle est branché en série à un générateur sinusoïdal qui présente une intensité de valeur efficace constante et de pulsation ω .

En vertu du principe de dualité entre circuit RLC série et circuit RLC parallèle, l'étude d'un circuit RLC parallèle se ramène à celle du circuit RLC série mais il faudrait effectuer les permutations suivantes : $\underline{u}$ en $\underline{i}$; R en $\frac{1}{R}$; L en C et $\underline{Z}$ en $\underline{Y}$.

Par conséquent, tous les résultats qu'on a obtenu dans le cas du circuit série sont ainsi valables pour le circuit RLC parallèle.

➤ Etude de la résonance de tension

La loi d'Ohm complexe pour un circuit RLC parallèle s'écrit :

$$\underline{i} = \left[\frac{1}{R} + j \left(C\omega - \frac{1}{L\omega} \right) \right] \underline{u}$$

Ainsi on a :

$$\underline{u} = \frac{\underline{i}}{\left[\frac{1}{R} + j \left(C\omega - \frac{1}{L\omega} \right) \right]}$$

L'admittance du circuit est :

$$\underline{Y} = \frac{1}{R} + j \left(C\omega - \frac{1}{L\omega} \right)$$

Pour $\omega = \omega_0$ la partie imaginaire de l'admittance est nulle et il reste :

$$\underline{Y} = \frac{1}{R} \text{ soit } \underline{Z} = R$$

En ce moment, le module de la tension complexe devient $u = Ri$. Cette valeur est la valeur maximum que la tension pourra prendre lorsque la pulsation varie.

On dit alors qu'il y a résonance si la partie imaginaire de l'admittance est nulle.

La résonance de la tension a lieu donc pour $\omega_r = \omega_0$.

- A la résonance :

- ✖ La susceptance capacitive et la susceptance inductive du circuit sont égales

$$C\omega = \frac{1}{L\omega}$$

- ✖ L'admittance complexe devient une réelle qui est la conductance $1/R$ du résistor.

$$\underline{Y} = \frac{1}{R} = G$$

- ✖ L'admittance réelle qui est égale à la conductance du circuit $Y = G$ est une valeur minimale. L'admittance est alors minimale à la résonance. On peut dire ainsi que l'impédance est maximale à la résonance car l'impédance est l'inverse de l'admittance, donc pour une valeur minimale de l'admittance on obtient une valeur maximale de l'impédance.
- ✖ La tension aux bornes du circuit est maximale.
Puisque l'admittance prend une valeur minimale donc la tension aux bornes du circuit devient maximale car la tension et l'admittance sont deux grandeurs inversement proportionnelles.

$$u_0 = \frac{i}{Y}$$

- ✖ La valeur de $\tan \varphi$ s'annule et la phase de l'admittance devient zéro aussi.

Si l'on pose $\underline{y} = \frac{\underline{u}}{\underline{u}_0} = \frac{\underline{Y}_0}{\underline{Y}}$, et en tenant compte de son module et son argument on

retrouve les courbes universelles.

II- E PUISSANCE

1- Puissance instantanée

En régime sinusoïdal forcé, la puissance instantanée est par définition le produit de la tension $u(t)$ et de l'intensité du courant $i(t)$.

$$p(t) = U_m I_m \cos(\omega t + \varphi_u) \cos(\omega t + \varphi_i)$$

Soit

$$p(t) = \frac{1}{2} U_m I_m [\cos(\varphi_u - \varphi_i) + \cos(2\omega t + \varphi_u + \varphi_i)]$$

$$p(t) = \frac{1}{2} U_m I_m [\cos(\varphi) + \cos(2\omega t + \varphi_u + \varphi_i)]$$

Cette puissance varie au cours du temps de manière sinusoïdale à la pulsation 2ω autour d'une valeur P appelée puissance moyenne.

2- Puissance moyenne

La puissance moyenne est la valeur moyenne de la puissance instantanée $p(t)$.

Si T est la période de $p(t)$, la puissance moyenne P est :

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T p(t) dt$$

$$P = \frac{1}{2} U_m I_m \cos(\varphi)$$

En valeurs efficaces, il vient :

$$P = U \cdot I \cdot \cos \varphi$$

Le terme $U \cdot I$ s'appelle puissance apparente et s'exprime en volt-ampères (symbole V.A) dans le système international.

Le facteur $\cos \varphi$ s'appelle facteur de puissance.

3- Puissance active et puissance réactive

L'expression de la puissance instantanée peut être séparée en deux parties.

$$p(t) = \frac{1}{2} U_m I_m [\cos(\varphi) + \cos(2\omega t + \varphi_u + \varphi_i)]$$

$$p(t) = \frac{1}{2} U_m I_m [\cos(\varphi) + \cos(2\omega t + 2\varphi_i + \varphi_u - \varphi_i)]$$

$$p(t) = \frac{1}{2} U_m I_m [\cos(\varphi) + \cos(2\omega t + 2\varphi_i + \varphi)]$$

En utilisant l'égalité trigonométrique suivante :

$$\cos(2\omega t + 2\varphi_i + \varphi) = \cos \varphi \cos(2\omega t + 2\varphi_i) - \sin \varphi \sin(2\omega t + 2\varphi_i)$$

On obtient alors :

$$p(t) = \frac{1}{2} U_m I_m \cos \varphi [1 + \cos(2\omega t + 2\varphi_i)] - \frac{1}{2} U_m I_m \sin \varphi \sin(2\omega t + 2\varphi_i)$$

En posant $Q = \frac{1}{2} U_m I_m \sin \varphi = U \cdot I \sin \varphi$

On peut écrire :

$$p(t) = P[1 + \cos(2\omega t + 2\varphi_i)] - Q \sin(2\omega t + 2\varphi_i)$$

P est la puissance moyenne.

Le premier terme $P[1 + \cos(2\omega t + 2\varphi_i)]$ est une composante pulsée, toujours positive, qui oscille autour de la puissance moyenne $U \cdot I \cos \varphi$. Il correspond à la puissance instantanée consommée par les parties résistives du circuit.

Le deuxième terme $Q \sin(2\omega t + 2\varphi_i)$ est une composante alternative qui varie alternativement avec une amplitude $U \cdot I \sin \varphi$ et une valeur moyenne nulle. Il correspond à la puissance instantanée fournie aux parties réactives (inductives et capacitatives) du circuit.

a) Puissance active

On appelle puissance active P , la valeur moyenne de la puissance instantanée.

$$P = U \cdot I \cos \varphi$$

La puissance active P s'exprime en watts (symbole W) dans le système SI.

b) Puissance réactive

On appelle puissance réactive Q , l'amplitude de la composante alternative de la puissance instantanée.

$$Q = U.I \sin \varphi$$

La puissance réactive Q s'exprime en volt-ampères-réactifs (VAR).

La puissance réactive est une puissance fictive, qui ne répond pas à une véritable définition physique, elle ne correspond pas à un dégagement effectif d'énergie.

4- Puissance complexe

La puissance instantanée n'est pas une fonction sinusoïdale donc on ne peut pas concéder une représentation complexe pareil à l'intensité complexe ou de la tension complexe.

Pourtant nous introduisons une puissance complexe $\underline{P}$ définie par :

$$\underline{P} = \frac{1}{2} \underline{u} \cdot \underline{i}^*$$

$\underline{i}^*$ est le conjugué de l'intensité complexe $\underline{i}$ et le facteur $1/2$ venant du fait que $\underline{u}$ et $\underline{i}$ sont exprimés avec les valeurs maximales et non efficaces.

Dans les paragraphes II-3-a) et II-3-b) nous avons exprimé l'intensité complexe et la tension complexe avec leurs valeurs efficaces, ainsi on peut écrire :

$$\underline{P} = \underline{u} \cdot \underline{i}^*$$

Avec cette écriture il faut bien préciser que $\underline{u}$ et $\underline{i}$ sont exprimés avec leurs valeurs efficaces.

En remplaçant $\underline{u}$ et $\underline{i}^*$ par leurs expressions respectives on obtient :

$$\underline{P} = U.I e^{j\varphi_u} e^{-j\varphi_i}$$

$$\underline{P} = U.I e^{j\varphi} = UI \cos \varphi + jUI \sin \varphi$$

L'abus d'écriture de la puissance complexe nous permet de retrouver la puissance active, partie réelle de la puissance complexe, et la puissance réactive, partie imaginaire de la puissance complexe. $\underline{P} = P + jQ$

DEUXIEME PARTIE :

EXPLOITATION PEDAGOGIQUE

Dans cette deuxième partie, on se propose d'élaborer une fiche pédagogique sur le chapitre "Circuit en régime sinusoïdal forcé", partie électromagnétisme, de la classe terminale scientifique ; puis nous suggérons quelques exercices d'évaluation sur ce chapitre. Nous choisissons d'étudier ce chapitre au moyen des nombres complexes pour atteindre les objectifs de ce chapitre.

I- FICHE PEDAGOGIQUE SUR LE CHAPITRE "CIRCUIT EN REGIME SINUSOÏDAL FORCE"

Le choix d'utiliser les nombres complexes sur le chapitre "circuit en régime sinusoïdal forcé" nous oblige à modifier le contenu du programme officiel proposé par l'U.E.R.P (Unité d'Etude et de Recherche Pédagogique). Il ne s'agit pas d'une modification exhaustive du contenu du programme mais d'un ajout de quelques sous-titres indispensables à l'étude d'un circuit RLC série en notation complexe.

L'apport d'une nouvelle approche mathématique sur l'étude de ce chapitre ne change pas l'objectif général fixé dans le programme officiel proposé par l'U.E.R.P. L'objectif général de ce chapitre est de *"déterminer les grandeurs caractéristiques de la réponse d'un circuit RLC série à une excitation sinusoïdale forcée"*. Pourtant il faut reformuler les objectifs spécifiques cités dans le programme officiel pour que ces objectifs spécifiques soient cohérents avec le nouveau contenu que nous devrions élaborer.

Dans la suite de notre travail, nous élaborons d'abord une séquence de programme puis nous citons les pré requis nécessaires au chapitre avant de proposer le contenu du cours sur le chapitre circuit en régime sinusoïdal forcé.

I- A Proposition de programme

Titre : CIRCUIT EN REGIME SINUSOÏDAL FORCE

Objectif général : *déterminer les grandeurs caractéristiques de la réponse d'un circuit RLC série à une excitation sinusoïdale forcée*

Objectifs spécifiques	Contenus	Observations
- Représenter les grandeurs électriques en notation complexe - Définir les grandeurs efficaces (intensité et tension) - Etablir l'équation différentielle d'un circuit RLC série avec les notations complexes - Résoudre cette équation - Définir l'impédance complexe - Tracer le diagramme d'impédance - Définir la réponse d'un circuit RLC série à une excitation sinusoïdale forcée : fréquence ; bande passante à 3db ; facteur de qualité	- Notations complexes des grandeurs électriques sinusoïdales. - Oscillations forcées en régime sinusoïdal d'un circuit RLC série ; impédance complexe. - Résonance d'intensité, facteur de qualité, bande passante	- On réduira les expressions complexes de l'intensité et de la tension par leurs valeurs efficaces complexes. - On parlera du déphasage φ de l'intensité par rapport à la tension Si $\underline{i} = I e^{j\varphi_i}$ et $\underline{u} = U e^{j\varphi_u}$ $\varphi = \varphi_u - \varphi_i$ - On ne démontrera pas la relation $I = \frac{I_m}{\sqrt{2}}$ - On utilisera la loi d'additivité des tensions (loi des mailles) pour établir l'équation différentielle du circuit. - On établira l'expression de l'impédance complexe à partir de la loi d'ohm complexe - On choisira l'intensité comme axe réel ou axe des phases - Les applications de la résonance sont dégagées de manière pratique, à partir du réglage d'un récepteur radio sur une tension - On admettra que la partie imaginaire de l'impédance complexe s'annule à la résonance

• Définir la puissance complexe • Définir la puissance moyenne et le facteur de puissance	• Puissance complexe	• On définit la puissance complexe comme $\underline{P} = \underline{u} \cdot \underline{i}^*$ (On ne démontrera pas l'expression de $\underline{P}$) • On n'insistera pas sur la puissance réactive
--	--	---

I- B Les pré requis

L'étude du chapitre "circuit en régime sinusoïdal forcé" au moyen des nombres complexes nécessite quelques connaissances sur les nombres complexes, un chapitre dans la partie "géométrie" de la classe terminale scientifique, et surtout quelques notions sur l'électricité dans les chapitres qui précèdent le chapitre "circuit en régime sinusoïdal forcé" ou l'électricité dans les classes antérieures. Par conséquent des pré requis devront être établis avant d'entamer le chapitre pour poursuivre le cours.

Les pré requis sont :

- Définir un nombre complexe
- Calculer le module et l'argument d'un nombre complexe
- Ecrire le conjugué d'un nombre complexe
- Représenter un nombre complexe sous ses différentes formes : forme algébrique, forme trigonométrique, forme exponentielle, forme polaire.
- Représenter un nombre complexe dans un plan complexe
- Appliquer les règles de calcul dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$: addition, multiplication et division.
- Appliquer la loi d'Ohm pour un conducteur ohmique, pour une bobine parfaite et pour un condensateur
- Appliquer la loi sur les dipôles en série : loi d'additivité des tensions et unicité de l'intensité.

Les pré requis sur les nombres complexes seront intégrés dans le contenu du cours comme des rappels mathématiques et pour les notions d'électricité nécessaires au chapitre comme une évaluation prédictive.

Test des pré requis :

- a) Que peut-on dire de l'intensité de n dipôles montés en série ?
- b) Que peut-on dire sur la tension de n dipôles montés en série aux bornes d'un générateur G ?
- c) Donner la relation qui relie la tension aux bornes du dipôle et l'intensité du courant qui le traverse pour chacun des dipôles suivants :
 - Conducteur ohmique de résistance R
 - Bobine d'inductance L
 - Condensateur de capacité C

Solution du test :

- a) Les n dipôles montés en série sont traversés par une même intensité i
$$i_1 = i_2 = \dots = i_n = i$$
- b) La somme des tensions aux bornes de chaque dipôle est égale à la tension aux bornes du générateur. $u_1 + u_2 + \dots + u_n = u_G$
- c) Pour un conducteur ohmique de résistance R : $u = Ri$
Pour une bobine d'inductance L : $u = L \frac{di}{dt}$
Pour un condensateur : $u = \frac{1}{C} \int i dt$

I- C Contenu du cours

I- Rappels mathématiques

I 1- Les nombres complexes

Soit un nombre complexe $z = a + jb$ où a est la partie réelle, b la partie imaginaire et j le nombre imaginaire pur tel que $j^2 = -1$.

En électricité la lettre i représente déjà l'intensité du courant et c'est pourquoi on remplace le nombre imaginaire pur i en mathématique par la lettre j en physique.

Module de z : $|z| = \rho = \sqrt{a^2 + b^2}$

Argument de z : $Arg(z) = \varphi$; $\tan \varphi = b/a$

Conjugué de z : $z^* = a - jb$

Les différentes formes qu'un nombre complexe peut prendre sont :

- Forme algébrique : $z = a + jb$
- Forme trigonométrique : $z = \rho(\cos \varphi + j \sin \varphi)$
- Forme exponentielle : $z = \rho e^{j\varphi}$
- Forme polaire : $z = [\rho ; \varphi]$

Règle de calcul dans $\mathbb{C}$:

- Addition de deux nombres complexes : $z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + j(b_1 + b_2)$
- Multiplication : $z \cdot z^* = a^2 + b^2$; $z^2 = a^2 - b^2 + 2jab$; $(z^*)^2 = a^2 - b^2 - 2jab$
 $[z_1 ; \theta_1] \times [z_2 ; \theta_2] = [z_1 z_2 ; \theta_1 + \theta_2]$
- Division :

$$\frac{[z_1 ; \theta_1]}{[z_2 ; \theta_2]} = \left[\frac{z_1}{z_2} ; \theta_1 - \theta_2 \right]$$

I 2- Expression complexe d'une fonction sinusoïdale

On peut représenter une fonction sinusoïdale $s(t) = S\sqrt{2} \cos(\omega t + \varphi)$ ou

$s(t) = S\sqrt{2} \sin(\omega t + \varphi)$ par une expression complexe $\underline{s} = S\sqrt{2}e^{j(\omega t + \varphi)} = \underline{\underline{s}}\sqrt{2}e^{j\omega t}$ avec $\underline{\underline{s}} = S\sqrt{2}e^{j\varphi}$.

$\underline{\underline{s}}$ est l'amplitude complexe de $\underline{s}$

$\frac{\underline{s}}{\sqrt{2}} = Se^{j\varphi}$ s'appelle valeur efficace complexe de $\underline{s}$.

L'expression complexe d'une fonction sinusoïdale de temps peut se réduire par une expression qui ne garde que S et φ . On peut alors réduire l'expression complexe de $s(t)$ par sa valeur efficace complexe $\underline{\underline{s}} = Se^{j\varphi}$

$$- \frac{ds}{dt} = \frac{d}{dt} S\sqrt{2}e^{j(\omega t + \varphi)} = j\omega S\sqrt{2}e^{j(\omega t + \varphi)}$$

$$\frac{d\underline{s}}{dt} = j\omega \underline{s}$$

L'opération de dérivation se ramène en notation complexe à une multiplication par $j\omega$

$$-\int \underline{s} dt = \int S\sqrt{2}e^{j(\omega t + \varphi)} dt = \frac{1}{j\omega} S\sqrt{2}e^{j(\omega t + \varphi)}$$

$$\int \underline{s} dt = \frac{1}{j\omega} \underline{s} = -\frac{j}{\omega} \underline{s}$$

L'opération de l'intégration se ramène en notation complexe à une multiplication par $-j/\omega$.

On peut donc dire que pour une grandeur sinusoïdale de temps

$s(t) = S\sqrt{2} \cos(\omega t + \varphi)$ ou $s(t) = S\sqrt{2} \sin(\omega t + \varphi)$ sa représentation complexe est

$$\underline{s} = S e^{j\varphi} \text{ et que } \frac{ds}{dt} = j\omega \underline{s} \text{ et } \int \underline{s} dt = \frac{1}{j\omega} \underline{s} = -\frac{j}{\omega} \underline{s}$$

II- Oscillations forcées en régime sinusoïdal d'un circuit RLC série ; impédance complexe

II 1- Notation complexe des grandeurs électriques sinusoïdales

A une intensité de courant sinusoïdal $i(t) = I\sqrt{2} \cos(\omega t + \varphi_i)$ et une tension sinusoïdal $u(t) = U\sqrt{2} \cos(\omega t + \varphi_u)$ avec $\omega = 2\pi f$ où f est la fréquence, on associe les nombres complexes $\underline{i}$ et $\underline{u}$ définies par leurs expressions :

$$\underline{i} = I\sqrt{2}e^{j\varphi_i}e^{j\omega t} \text{ et } \underline{u} = U\sqrt{2}e^{j\varphi_u}e^{j\omega t}$$

$\underline{i}$ et $\underline{u}$ peuvent se réduire par des expressions qui ne gardent que la valeur efficace et la phase à l'origine.

$$\underline{i} = I e^{j\varphi_i} \text{ et } \underline{u} = U e^{j\varphi_u}$$

Le coefficient $e^{j\omega t}$ ne figure plus dans l'intensité complexe $\underline{i}$ et dans la tension complexe $\underline{u}$ mais il est sous entendu que les fonctions sinusoïdales qu'elles représentent ont la même pulsation ω .

La forme algébrique de $\underline{i}$ et de $\underline{u}$ s'obtient en passant par leurs formes trigonométriques respectives.

$$\underline{i} = I \cos \varphi_i + jI \sin \varphi_i \text{ et } \underline{u} = U \cos \varphi_u + jU \sin \varphi_u$$

Pour la forme polaire on a :

$$\underline{i} = [I ; \varphi_i] \text{ et } \underline{u} = [U ; \varphi_u]$$

Les formes polaires de $\underline{i}$ et $\underline{u}$ donnent le module et l'argument du vecteur de Fresnel correspondant.

Application :

Donner les expressions complexes de $i(t) = 5\sqrt{2} \sin \omega t$ et de $u(t) = 220\sqrt{2} \sin(\omega t + \pi/3)$

Pour $i(t) = 5\sqrt{2} \sin \omega t$, $I = 5A$ et $\varphi_i = 0 \text{ rad}$

Donc : $\underline{i} = 5 \cos 0 + j5 \sin 0 = 5 + 0j$ par conséquent $\underline{i} = 5$

Pour $u(t) = 220\sqrt{2} \sin(\omega t + \pi/3)$, $U = 220V$ et $\varphi_u = \pi/3 \text{ rad}$

Donc : $\underline{u} = 220 \cos(\pi/3) + j220 \sin(\pi/3) = (220 \times 0,5) + j(220 \times 0,866)$

D'où : $\underline{u} = 110 + 190,52j$

II 2- Impédance complexe

En courant alternatif, l'impédance complexe d'un circuit ou d'un composant parcouru par un courant est donnée par la loi d'Ohm complexe : $\underline{u} = \underline{Z} \cdot \underline{i}$

Définition : L'impédance complexe d'un circuit est égale au quotient de la tension complexe $\underline{u}$ par l'intensité complexe $\underline{i}$. On note l'impédance complexe par $\underline{Z}$.

$$\underline{Z} = \frac{\underline{u}}{\underline{i}} = \frac{U e^{j\varphi_u}}{I e^{j\varphi_i}} = \frac{U}{I} e^{j(\varphi_u - \varphi_i)}$$

En posant $Z = \frac{U}{I}$ et $\varphi = \varphi_u - \varphi_i$ on a:

$$\underline{Z} = Z e^{j\varphi} \text{ où}$$

- Le module " $|\underline{Z}| = Z$ " est l'impédance, elle s'exprime en ohms (Ω) dans le SI.
- L'argument " $\varphi = \text{Arg}(\underline{Z})$ " est le déphasage de l'intensité i par rapport à la tension u . φ est la différence des arguments de $\underline{u}$ et de $\underline{i}$.

On peut calculer Z et φ par :

$$Z = \sqrt{[\text{Re}(\underline{Z})]^2 + [\text{Im}(\underline{Z})]^2}$$

Et

$$\tan \varphi = \frac{\text{Im}(\underline{Z})}{\text{Re}(\underline{Z})}$$

$\text{Re}(\underline{Z})$ est la partie réelle de l'impédance complexe.

$\text{Im}(\underline{Z})$ est la partie imaginaire de l'impédance complexe.

Remarque : En termes d'argument la loi d'ohm complexe donne :

$$\text{Arg}(\underline{u}) = \text{Arg}(\underline{Z}) + \text{Arg}(\underline{i}) \Leftrightarrow \varphi_u = \varphi + \varphi_i$$

II 3- Circuit RLC série forcé

Considérons un circuit formé d'un conducteur ohmique de résistance R , une bobine d'inductance L et un condensateur de capacité C montées en série.

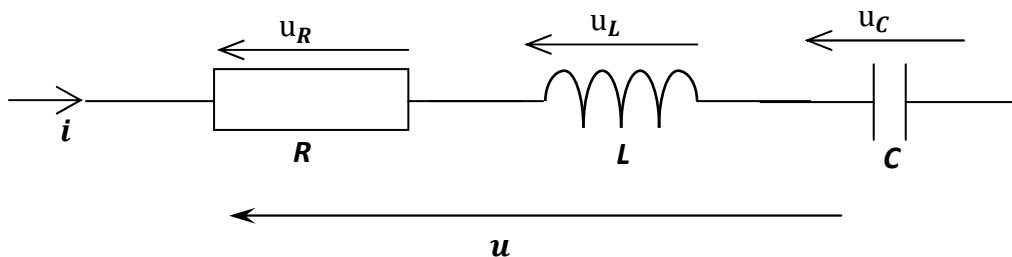


Figure 21 : Circuit RLC série

Sachant que :

$$\begin{cases} i(t) = I\sqrt{2} \sin \omega t \\ u(t) = U\sqrt{2} \sin(\omega t + \varphi) \end{cases}$$

En notation complexe on a :

$$\begin{cases} \underline{i} = I \\ \underline{u} = Ue^{j\varphi} \end{cases}$$

A chaque instant le courant a la même valeur tout au long du circuit, sa valeur efficace et sa phase sont communes aux divers éléments de même pour sa valeur complexe $\underline{i}$.

La tension totale est égale, à chaque instant, à la somme des tensions instantanées ; en courant alternatif la loi d'additivité des tensions reste valable avec les notations complexes.

$$\underline{u} = \underline{u}_R + \underline{u}_L + \underline{u}_C$$

On sait que :

$$u_R = Ri ; u_L = L \frac{di}{dt} \text{ et } u_C = \frac{1}{C} \int i dt$$

En notation complexe ces relations deviennent :

$$\underline{u}_R = R\underline{i} ; \underline{u}_L = L \frac{d\underline{i}}{dt} \text{ et } \underline{u}_C = \frac{1}{C} \int \underline{i} dt$$

Donc

$$\underline{u} = R\underline{i} + L \frac{d\underline{i}}{dt} + \frac{1}{C} \int \underline{i} dt = R\underline{i} + jL\omega\underline{i} - \frac{j}{C\omega} \underline{i}$$

$$\underline{u} = \left[R + j \left(L\omega - \frac{1}{C\omega} \right) \right] \underline{i}$$

A partir de cette relation on obtient l'expression de l'impédance complexe du circuit :

$$\underline{Z} = \frac{\underline{u}}{\underline{i}} = \left[R + j \left(L\omega - \frac{1}{C\omega} \right) \right]$$

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2} \text{ et } \tan \varphi = \frac{L\omega - \frac{1}{C\omega}}{R}$$

Application :

On place en série une résistance R, une bobine d'inductance L et un condensateur de capacité C alimenté par une tension alternative $u(t) = U\sqrt{2} \cos \omega t$.

$$R = 100\Omega ; L\omega = 75\Omega ; \frac{1}{C\omega} = 107\Omega$$

a) Etablir les expressions numériques des impédances $\underline{Z}_R$; $\underline{Z}_L$ et $\underline{Z}_C$

La loi d'ohm complexe s'écrit $\underline{u} = \underline{Z} \cdot \underline{i}$

Pour une résistance R $\underline{u}_R = R\underline{i}$ donc $\underline{Z}_R = R$ soit $\underline{Z}_R = 50$

Pour une bobine d'inductance L $\underline{u}_L = jL\omega\underline{i}$ donc $\underline{Z}_L = jL\omega$ soit $\underline{Z}_L = 75j$

Pour un condensateur de capacité C $\underline{u}_C = -\frac{j}{C\omega}\underline{i}$ donc $\underline{Z}_C = -\frac{j}{C\omega}$ soit $\underline{Z}_C = -107j$

b) En déduire l'impédance équivalente $\underline{Z}$

L'impédance complexe d'un circuit RLC série est : $\underline{Z} = R + j\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)$

Cette relation n'est que la somme des impédances complexes de chaque élément du circuit

$$\underline{Z} = \underline{Z}_R + \underline{Z}_L + \underline{Z}_C$$

$$\underline{Z} = 100 + 75j - 107j = 100 - 32j$$

$$\underline{Z} = 100 - 32j$$

c) Mettre $\underline{Z}$ sous la forme [module ; argument]

$$\underline{Z} = 100 - 32j$$

$$|\underline{Z}| = \sqrt{100^2 + (-32)^2} = 105 \text{ c'est-à-dire que l'impédance } Z \text{ est égale à } 105\Omega$$

L'argument de $\underline{Z}$ est donné par $\tan \varphi = \frac{\text{Re}(\underline{Z})}{\text{Im}(\underline{Z})}$

$$\tan \varphi = \frac{-32}{100} = -0,32 \text{ soit } \varphi \approx -0,3 \text{ rad}$$

$$\underline{Z} = [105\Omega ; -0,3]$$

d) Préciser quelle grandeur est en avance de phase par rapport à l'autre

$$\text{On a la relation } \text{Arg}(\underline{u}) = \text{Arg}(\underline{Z}) + \text{Arg}(\underline{i})$$

$$\text{Arg}(\underline{Z}) = \varphi = \text{Arg}(\underline{u}) - \text{Arg}(\underline{i})$$

$$\varphi = -0,3 \text{ rad}$$

L'argument de l'impédance complexe, déphasage de l'intensité par rapport à la tension, prend une valeur négative $\varphi = -0,3 \text{ rad}$; on dit alors que l'intensité est en avance de 0,3rad de phase par rapport à la tension.

II 4- Diagramme d'impédance

Le diagramme d'impédance est la représentation de l'impédance complexe dans un plan complexe, c'est la représentation de Fresnel de l'impédance.

Pour un circuit RLC en série on prend l'intensité comme axe réelle ou référence des phases.

On a les relations :

$$\underline{u}_R = R\underline{i} ; \underline{u}_L = L \frac{d\underline{i}}{dt} = jL\omega \underline{i} \text{ et } \underline{u}_C = \frac{1}{C} \int \underline{i} dt = -\frac{j}{C\omega} \underline{i}$$

Donc on peut conclure que

$$\underline{Z}_R = R ; \underline{Z}_L = jL\omega = L\omega e^{j\frac{\pi}{2}} \text{ et } \underline{Z}_C = -\frac{j}{C\omega} = \frac{1}{C\omega} e^{-j\frac{\pi}{2}}$$

En notation polaire :

$$\underline{Z}_R = [R ; 0] ; \underline{Z}_L = \left[L\omega ; \frac{\pi}{2} \right] \text{ et } \underline{Z}_C = \left[\frac{1}{C\omega} ; -\frac{\pi}{2} \right]$$

Le diagramme d'impédance d'un circuit RLC en série s'obtient en représentant les impédances de chaque dipôle qui constitue le circuit.

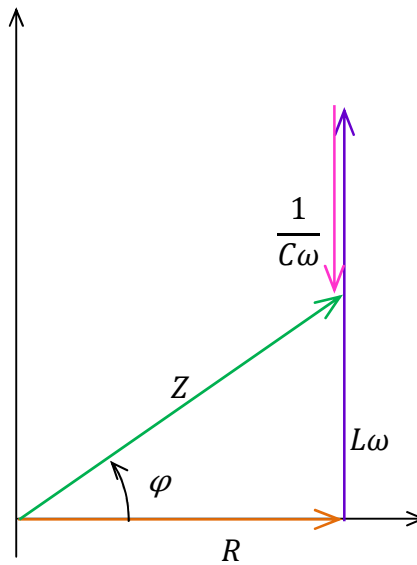


Figure 22 : Diagramme d'impédance cas où $L\omega > \frac{1}{C\omega}$

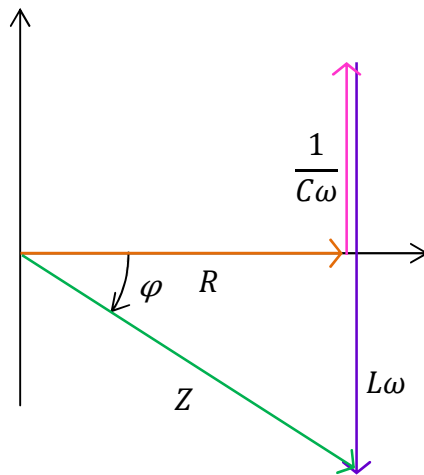


Figure 23 : Diagramme d'impédance cas où $L\omega < \frac{1}{C\omega}$

III- Résonance d'intensité, facteur de qualité, bande passante

III 1- Résonance d'intensité

On dit qu'il y a résonance lorsque l'intensité qui traverse le circuit RLC série prend une valeur maximale I_0 . L'intensité est maximale si l'impédance Z est minimale c'est-à-dire que la partie imaginaire de l'impédance complexe est nulle.

Donc, à la résonance :

$Z = R$: L'impédance Z est minimum

$$L\omega - \frac{1}{C\omega} = 0 \text{ d'où la pulsation à la résonance : } \omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}$$

$$I_0 = \frac{U}{R}$$

Par conséquent $\tan \varphi = 0$ et $\varphi = 0$ c'est-à-dire que i et u sont en phase.

III 2- Bande passante

On appelle bande passante à 3 dB (décibels), un domaine continu de pulsation ω de limite ω_1 et ω_2 tel que au limite de cette bande l'intensité commun vaudra $I = \frac{I_0}{\sqrt{2}}$.

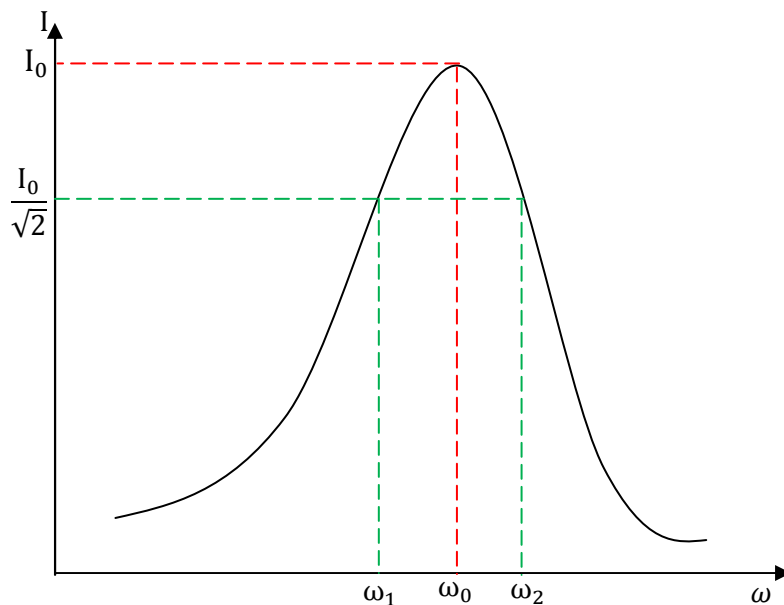


Figure 24 : Courbe de résonance d'un circuit RLC série

Valeur de $\Delta\omega$

La bande passante $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$ ($\omega_2 > \omega_1$) est telle que $I(\omega_2) = I(\omega_1) = \frac{I_0}{\sqrt{2}}$

$$I = \frac{I_0}{\sqrt{2}} = \frac{U}{R\sqrt{2}}$$

Pour ω_2 et ω_1 $Z = R\sqrt{2}$ ou encore $Z^2 = 2R^2$

$$R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2 = 2R^2 \text{ soit } R^2 - \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2 = 0$$

$$\left(R + L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)\left(R - L\omega + \frac{1}{C\omega}\right) = 0$$

$$LC\omega^2 + RC\omega - 1 = 0 \quad \text{ou} \quad -LC\omega^2 + RC\omega + 1 = 0$$

D'où les valeurs de ω_2 ; ω_1 et de $\Delta\omega$

$$\omega_2 = \frac{R}{2L} + \sqrt{\left[\left(-\frac{R}{2L}\right)^2 + \frac{1}{LC}\right]} \text{ et } \omega_1 = -\frac{R}{2L} + \sqrt{\left[\left(\frac{R}{2L}\right)^2 + \frac{1}{LC}\right]}$$

$$\Delta\omega = \frac{R}{L}$$

En termes de fréquence

$$\Delta f = \frac{R}{2\pi L}$$

La largeur de la bande passante varie avec la valeur de la résistance R.

Lorsque R est grande, $\Delta\omega$ est grande aussi et on a une bande large.

Lorsque R est faible, $\Delta\omega$ est faible aussi et on a une bande étroite.

III 3- Facteur de qualité

Le facteur de qualité Q et $\Delta\omega$ sont inversement proportionnels $Q = \frac{k}{\Delta\omega}$

Pour $k = \omega_0$

$$Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega} \text{ or } \Delta\omega = \frac{R}{L}$$

$$Q = \frac{L\omega_0}{R} = \frac{1}{RC\omega_0}$$

Le facteur de qualité caractérise l'acuité de la résonance.

IV- Puissance

IV 1- Puissance complexe

On définit la puissance complexe $\underline{P}$ par :

$$\underline{P} = \underline{u} \times \underline{i}^* \quad (2)$$

$\underline{i}^*$ est le conjugué de l'intensité complexe $\underline{i}$.

$$\underline{P} = UIe^{j\varphi_u}e^{-j\varphi_i} = UIe^{j\varphi_u - \varphi_i}$$

Or $\varphi = \varphi_u - \varphi_i$ donc on peut écrire $\underline{P} = UIe^{j\varphi}$

$$\underline{P} = UI \cos \varphi + jUI \sin \varphi$$

IV 2- Puissance moyenne

La partie réelle de la puissance complexe est appelée puissance moyenne ou puissance active.

$$P = UI \cos \varphi$$

UI est appelé puissance apparente.

$\cos \varphi$ est appelé facteur de puissance.

La puissance moyenne est exprimée en *watts* (W) dans le système SI.

Remarque

La partie imaginaire de la puissance complexe est appelé puissance réactive.

⁽²⁾ Puisqu'on réduit l'expression complexe de l'intensité et de la tension complexe par leurs valeurs efficaces complexe donc on peut retenir la définition de la puissance complexe $\underline{P} = \underline{u} \times \underline{i}^*$

II- SUGGESTION D'EVALUATION FORMATIVE

Nous concevons les exercices suivants pour illustrer le cours concernant le circuit en régime sinusoïdal forcé, d'autre part pour étudier le circuit RLC série en régime sinusoïdal forcé au moyen des nombres complexes.

Enoncé de l'exercice 1 :

Un circuit est composé d'un résistor de résistance R , une bobine d'inductance L et un condensateur de capacité C . Ces trois éléments sont branchés en série et alimentés par une tension alternative sinusoïdale de fréquence $N=100\text{Hz}$. L'intensité i est prise comme référence des phases et les tensions aux bornes de chaque élément R , L et C sont respectivement :

$$\underline{u}_R = [10\text{V} ; 0] ; \underline{u}_L = \left[31,4\text{V} ; \frac{\pi}{2}\right] \text{ et } \underline{u}_C = \left[10,6\text{V} ; -\frac{\pi}{2}\right]$$

- 1- Calculer la tension complexe $\underline{u}$ délivrée par le générateur.
- 2- Montrer que l'impédance complexe $\underline{Z}$ est : $\underline{Z} = \left[R + j\left(2\pi N L - \frac{1}{2\pi N C}\right)\right]$
- 3- La valeur de la résistance $R=100\Omega$, de l'inductance $L=0,5\text{H}$ et du condensateur $C=15\mu\text{F}$. Calculer l'impédance complexe $\underline{Z}$.
- 4- En déduire la valeur de l'intensité complexe $\underline{i}$ et préciser si l'intensité i est en avance ou en retard de phase par rapport à la tension u .
- 5- Montrer que u et i sont en phase si $N = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$. Calculer cette valeur.

Solution de l'exercice 1 :

1- Tension complexe délivrée par le générateur

Les trois éléments du circuit sont montés en série donc la tension complexe aux bornes du générateur est égale à la somme des tensions complexes de chaque élément du circuit.

$$\underline{u} = \underline{u}_R + \underline{u}_L + \underline{u}_C \quad (1)$$

$$\underline{u}_R = [10\text{V} ; 0] = 10(\cos 0 + j \sin 0) = 10$$

$$\underline{u}_L = \left[31,4\text{V} ; \frac{\pi}{2}\right] = 31,4 \left(\cos \frac{\pi}{2} + j \sin \frac{\pi}{2}\right) = 31,4j$$

$$\underline{u}_C = \left[10,6V ; -\frac{\pi}{2} \right] = 10,6 \left(\cos -\frac{\pi}{2} + j \sin -\frac{\pi}{2} \right) = -10,6j$$

$$\underline{u} = 10 + 31,4j - 10,6j = 10 + 20,8j$$

$$\underline{u} = 10 + 20,8j$$

2- Montrons que $\underline{Z} = \left[R + j \left(2\pi NL - \frac{1}{2\pi NC} \right) \right]$

Les trois éléments du circuit sont montés en série donc l'intensité est la grandeur commune aux trois éléments. La relation (1) peut s'écrire alors sous la forme $\underline{u} = \underline{Z} \cdot \underline{i}$.

Pour avoir une relation pareille à la loi d'ohm complexe $\underline{u} = \underline{Z} \cdot \underline{i}$ il faut mettre les tensions complexes aux bornes de chaque dipôle qui constitue le circuit sous la forme $\underline{u}_X = \underline{Z}_X \cdot \underline{i}$

$$\underline{u}_R = R \cdot \underline{i}; \underline{u}_L = jL\omega \cdot \underline{i} \text{ et } \underline{u}_C = -\frac{j}{C\omega} \cdot \underline{i}$$

La relation (1) devient alors :

$$\underline{u} = R \cdot \underline{i} + jL\omega \cdot \underline{i} - \frac{j}{C\omega} \cdot \underline{i} = \left[R + j \left(L\omega - \frac{1}{C\omega} \right) \right] \underline{i}$$

Donc l'impédance complexe du circuit est :

$$\underline{Z} = R + j \left(L\omega - \frac{1}{C\omega} \right)$$

Remplaçons la pulsation ω par $2\pi N$, il vient :

$$\underline{Z} = R + j \left(2\pi NL - \frac{1}{2\pi NC} \right)$$

Ce qu'il fallait démontrer.

3- Calcul de l'impédance complexe $\underline{Z}$

On a vu que $\underline{Z} = R + j \left(2\pi NL - \frac{1}{2\pi NC} \right)$

Il suffit de remplacer R, L, C et N par leurs valeurs respectives pour avoir la valeur de l'impédance complexe $\underline{Z}$.

$$2\pi NL = 2\pi \times 100 \times 0,5 \approx 314\Omega$$

$$\frac{1}{2\pi NC} = \frac{1}{2\pi \times 100 \times 15 \cdot 10^{-6}} \approx 106\Omega$$

$$\text{Donc } \underline{Z} = 100 + (314 - 106)j = 100 + 208j$$

$$\underline{Z} = 100 + 208j$$

4- Valeur de l'intensité complexe $\underline{i}$

Connaissant la valeur de la tension complexe aux bornes du circuit et celle de l'impédance complexe, on peut calculer la valeur de l'intensité complexe en utilisant la loi d'Ohm complexe.

$$\underline{u} = \underline{Z} \cdot \underline{i} \text{ soit } \underline{i} = \frac{\underline{u}}{\underline{Z}}$$

Pour faciliter le calcul, mieux vaut exprimer l'impédance complexe et l'intensité complexe sous sa forme exponentielle ou sous sa forme polaire.

$$\underline{u} = 10 + 20,8j = [23V ; 0,45\text{rad}] = 23e^{0,45j}$$

$$\underline{Z} = 100 + 208j = [230\Omega ; 0,45\text{rad}] = 230e^{0,45j}$$

$$\underline{i} = \frac{23e^{0,45j}}{230e^{0,45j}} = 0,1$$

$$\underline{i} = 0,1$$

Pour connaître si l'intensité est en avance ou en retard de phase par rapport à l'intensité il faut calculer le déphasage φ de l'intensité par rapport à la tension.

$$\varphi = \varphi_u - \varphi_i$$

$$\underline{u} = 23e^{0,45j} \text{ soit } \varphi_u = 0,45 \text{ rad}$$

$$\underline{i} = 0,1 \text{ .L'intensité complexe est une réelle pure donc } \varphi_i = 0 \text{ rad}$$

$$\varphi = 0,45 - 0 = 0,45 \text{ rad}$$

$\varphi > 0$ donc la tension est en avance de phase par rapport à l'intensité c'est-à-dire que l'intensité est en retard de phase par rapport à la tension.

5- Montrons que i et u sont en phase pour $N = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$

i et u sont en phase lorsqu'on est à la résonance c'est-à-dire que lorsque la partie imaginaire de l'impédance complexe s'annule.

La partie imaginaire de l'impédance complexe est $2\pi N L - \frac{1}{2\pi N C}$ (2)

Démontrons alors que (2) s'annule pour $N = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$

$$\frac{2\pi L}{2\pi\sqrt{LC}} - \frac{1}{2\pi \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} C} = \frac{L}{\sqrt{LC}} - \frac{\sqrt{LC}}{C} = \sqrt{\frac{L^2}{LC}} - \sqrt{\frac{LC}{C^2}}$$

$$\sqrt{\frac{L^2}{LC}} - \sqrt{\frac{LC}{C^2}} = \sqrt{\frac{L}{C}} - \sqrt{\frac{L}{C}} = 0$$

La partie imaginaire de l'impédance complexe s'annule lorsque $N = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$ donc i et u sont en phase pour cette fréquence.

Calcul de N

Remplaçons L et C par ses valeurs

$$N = \frac{1}{2\pi\sqrt{0,5 \times 15 \cdot 10^{-6}}} \approx 58Hz$$

$N = 58Hz$

Enoncé de l'exercice 2 :

Un générateur de fréquence réglable N maintient entre ses bornes A et B une tension alternative $u(t) = U\sqrt{2} \cos \omega t$. On branche en série entre A et B une bobine d'inductance L et de résistance r , un condensateur de capacité C et un conducteur ohmique de résistance R' . On donne $U=2,8V$; $L=35mH$; $r=12\Omega$; $C=10\mu F$ et $R'=30\Omega$.

- 1- La fréquence de la tension est réglée à la valeur $N = 50Hz$
 - a) Donner l'expression complexe de la tension $\underline{u}(t)$.
 - b) Donner la relation liant la tension complexe $\underline{u}$ aux bornes de AB et l'intensité complexe $\underline{i}$ du courant qui traverse AB.
 - c) Déterminer l'impédance complexe de la portion du circuit AB.
 - d) Calculer l'impédance Z et le déphasage φ entre l'intensité et la tension.
 - e) En déduire l'expression complexe de $\underline{i}$.
- 2-
 - a) Déterminer la valeur maximale I_0 de l'intensité du courant et la valeur de la fréquence N_0 correspondante de la fréquence.
 - b) Que devient la valeur du déphasage entre l'intensité et la tension pour cette valeur de fréquence N_0 .
 - c) Calculer le facteur de qualité Q_0 pour N_0 .
 - d) En déduire la largeur de la bande passante.
 - e) Exprimer la valeur efficace I de l'intensité du courant pour une valeur de fréquence N en fonction de N, N_0, I_0 et Q_0 .

Solution de l'exercice 2 :

- 1- a) Expression complexe de la tension $\underline{u}(t)$

On sait que pour $u(t) = U\sqrt{2} \cos(\omega t + \varphi_u)$, $\underline{u} = Ue^{j\varphi_u}$

Ici $u(t) = U\sqrt{2} \cos \omega t$ avec $U = 2,8V$ et $\varphi_u = 0rad$ donc on a :

$$\underline{u} = 2,8 \quad (1)$$

- b) Relation liant la tension complexe $\underline{u}$ aux bornes de AB et l'intensité complexe $\underline{i}$ du courant qui traverse AB

Pour établir l'équation différentielle de ce circuit nous allons suivre cette démarche :

- faire le schéma et orienter le circuit
- écrire les tensions complexes aux bornes de chaque dipôle qui constitue le circuit
- appliquer la loi d'additivité des tensions (loi des mailles)

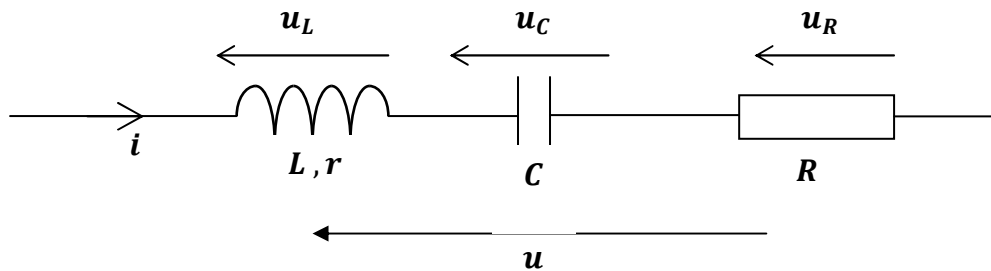


Figure 25 : Schéma du circuit RLC de l'exercice 1

- Tension complexe aux bornes de la bobine

Puisque la bobine est caractérisé ici par son inductance L et sa résistance r donc :

$$\underline{u}_L = r\underline{i} + jL\omega\underline{i}$$

- Tension complexe aux bornes du condensateur

$$\underline{u}_C = -\frac{j}{C\omega}\underline{i}$$

- Tension complexe aux bornes du conducteur ohmique

$$\underline{u}_R = R'\underline{i}$$

Les trois éléments du circuit sont montés en série donc :

$$\underline{u} = \underline{u}_L + \underline{u}_C + \underline{u}_R$$

$$\underline{u} = r\underline{i} + jL\omega\underline{i} - \frac{j}{C\omega}\underline{i} + R'\underline{i}$$

Posant $R = r + R'$

En arrangeant les termes on obtient :

$$\underline{u} = \left[R + j \left(L\omega - \frac{1}{C\omega} \right) \right] \underline{i} \quad (2)$$

Application numérique :

- $R = r + R' = 12\Omega + 30\Omega = 42\Omega$
- $L\omega - \frac{1}{C\omega} = (35 \cdot 10^{-3} \times 2 \times 50\pi) - \frac{1}{10 \cdot 10^{-6} \times 2 \times 50\pi} \approx 307\Omega$

$$\underline{u} = (42 - 307j)\underline{i} \quad (3)$$

c) Impédance complexe du circuit AB

La loi d'ohm complexe s'écrit $\underline{u} = \underline{Z} \cdot \underline{i}$

A partir de la relation (2) dans 1-b) on obtient

$$\underline{Z} = R + j\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)$$

$$\underline{Z} = 42 - 307j \quad (4)$$

d) Impédance Z et déphasage entre u et i

- Impédance Z

L'impédance Z est le module de l'impédance complexe donc on obtient Z en calculant le module de (4)

$$\underline{Z} = 42 - 307j$$

$$Z = \sqrt{42^2 + (-307)^2} \approx 310\Omega$$

$$Z = 310\Omega$$

- Déphasage φ entre la tension et l'intensité

Le déphasage φ entre la tension et l'intensité est l'argument de l'impédance complexe. φ est donné par $\tan \varphi = \frac{\text{Im}(\underline{Z})}{\text{Re}(\underline{Z})}$

$$\tan \varphi = \frac{-307}{42} \approx -7,31$$

Donc $\varphi = -1,43 \text{ rad}$

$$\varphi = -1,43 \text{ rad}$$

L'impédance complexe $\underline{Z}$ peut s'écrire aussi :

$$\underline{Z} = [310 ; -1,43] \text{ ou encore } \underline{Z} = 310e^{-1,43j}$$

e) Expression de l'intensité complexe $\underline{i}$

On a $\underline{Z} = 42 - 307j$ qui s'écrit en forme exponentielle $\underline{Z} = 310e^{-1,43j}$ et $\underline{u} = 2,8$

On peut tirer l'expression de l'intensité complexe à partir de la loi d'ohm complexe $\underline{u} = \underline{Z} \cdot \underline{i}$

On a : $\underline{i} = \frac{\underline{u}}{\underline{Z}}$

$$\underline{i} = \frac{2,8}{310e^{-1,43j}} \approx 0,009e^{+1,43j}$$

$$\underline{i} = 9e^{1,43j} \text{ (mA)}$$

mA indique que I est exprimée en milliampère.

2- a) Valeur maximale I_0 de l'intensité

La valeur maximale I_0 de l'intensité correspond à la valeur de l'intensité à la résonance.

Cette valeur I_0 est égale à : $I_0 = \frac{U}{R}$ avec $R = r + R'$ alors

$$I_0 = \frac{U}{R} \quad (5)$$

Application numérique :

$$I_0 = \frac{2,8}{12 + 30} \approx 0,066A = 66mA$$

$$I_0 = 66mA$$

Valeur N_0 de la fréquence

A la résonance la partie imaginaire de l'impédance complexe s'annule ; alors $(L\omega - \frac{1}{C\omega}) = 0$

$$\left(L\omega_0 - \frac{1}{C\omega_0}\right) = 0 \text{ est équivalent à } L\omega_0 = \frac{1}{C\omega_0} \text{ soit } \omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}$$

La fréquence N est reliée à la pulsation par la relation $\omega = 2\pi N$ donc $N = \frac{\omega}{2\pi}$

$$N_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{1}{LC}}$$

Application numérique :

$$N_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{1}{35 \cdot 10^{-3} 10 \cdot 10^{-6}}} \approx 269 \text{ Hz}$$

$$N_0 = 269 \text{ Hz}$$

b) Valeur du déphasage φ pour N_0

A la résonance l'intensité du courant et la tension sont en phase alors $\varphi = 0 \text{ rad}$

$$\varphi = 0 \text{ rad}$$

c) Valeur du facteur de qualité Q_0

Pour N_0

$$Q_0 = \frac{L\omega_0}{R} = \frac{2\pi N_0 L}{R} \text{ ou encore } Q_0 = \frac{1}{RC\omega_0} = \frac{1}{2\pi N_0 RC}$$

Application numérique :

$$Q_0 = \frac{2\pi \times 269 \times 35 \cdot 10^{-3}}{12 + 30} \approx 1,34$$

$$Q_0 = 1,34$$

d) Largeur de la bande passante

La largeur de la bande passante est telle que

$$\Delta\omega = \frac{R}{L}$$

$$\Delta\omega = \frac{R}{L} = \frac{R\omega_0}{L\omega_0} \text{ avec } \frac{L\omega_0}{R} = Q_0 \text{ alors on obtient}$$

$$\Delta\omega = \frac{\omega_0}{Q_0} = \frac{2\pi N_0}{Q_0}$$

Application numérique :

$$\Delta\omega = \frac{2\pi \times 269}{1,34} \approx 1261 \text{ Hz}$$

$\Delta\omega = 1261 \text{ Hz}$

e) Expression de la valeur efficace I en fonction de N, N₀, I₀ et Q₀

On peut calculer la valeur de l'intensité efficace en calculant le module de l'intensité complexe.

D'après (2) on a :

$$\underline{u} = \left[R + j \left(L\omega - \frac{1}{C\omega} \right) \right] \underline{i} \quad \text{soit} \quad \underline{i} = \frac{\underline{u}}{R + j \left(L\omega - \frac{1}{C\omega} \right)}$$

$$|\underline{i}| = I = \frac{|\underline{u}|}{\left| R + j \left(L\omega - \frac{1}{C\omega} \right) \right|} = \frac{U}{\sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega} \right)^2}}$$

Pour faire apparaître I₀ on met U en fonction de I₀

$$I_0 = \frac{U}{R} \quad \text{soit} \quad U = I_0 R$$

Donc

$$I = \frac{I_0 R}{\sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega} \right)^2}} = \frac{I_0}{\sqrt{1 + \left(\frac{L\omega}{R} - \frac{1}{RC\omega} \right)^2}}$$

On a aussi

$$Q_0 = \frac{L\omega_0}{R} = \frac{1}{RC\omega_0}$$

Faisons apparaître Q₀ dans $\frac{L\omega}{R}$ et $\frac{1}{RC\omega}$

$$\frac{L\omega}{R} = \frac{L\omega\omega_0}{R\omega_0} = Q_0 \frac{\omega}{\omega_0} \text{ et } \frac{1}{RC\omega} = \frac{\omega_0}{RC\omega\omega_0} = Q_0 \frac{\omega_0}{\omega}$$

Le module de $\underline{i}$ devient :

$$I = \frac{I_0}{\sqrt{1 + \left(Q_0 \frac{\omega}{\omega_0} - Q_0 \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}} = \frac{I_0}{\sqrt{1 + Q_0^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}} \quad (6)$$

Or $\omega = 2\pi N$ donc le rapport de deux pulsations est gale au rapport de deux fréquences car le terme 2π se simplifie.

En remplaçant les rapports de pulsation par les rapports de fréquence dans (6) on obtient l'expression de I en fonction de N, N_0, I_0 et Q_0

$$I = \frac{I_0}{\sqrt{1 + Q_0^2 \left(\frac{N}{N_0} - \frac{N_0}{N}\right)^2}}$$

CONCLUSION

“Ecrire correctement un résultat numérique”, “Appliquer les lois mathématiques sur les phénomènes physiques” font parmi des objectifs de l’enseignement des sciences physiques au lycée. Afin d’atteindre ces objectifs, il faut bien choisir la méthode mathématique qu’on devrait utiliser pour résoudre un problème de physique.

Dans ce travail nous avons étudié le mécanisme d’utilisation des nombres complexes en électricité dans le but d’illustrer le lien entre les notions des nombres complexes et les cours d’électricité, et d’appliquer les nombres complexes pour décrire, analyser et résoudre des problèmes d’électricité.

Au début, nous avons mis en évidence l’utilisation des nombres complexes dans les circuits à courant alternatif sinusoïdal. Cette mise en évidence nous a permis de relever l’importance et les avantages de l’utilisation des nombres complexes par rapport à d’autre méthode, comme l’utilisation des fonctions sinusoïdales de temps, dans la résolution des problèmes d’électricité.

C’est la facilité apportée par les nombres complexes qui nous a orienté notre attention à intégrer l’étude des circuits à courant alternatif à l’aide des nombres complexes dans le programme de la classe terminale scientifique. Après avoir apporté quelques modifications sur le programme du chapitre concerné, nous avons élaboré un cours sur le chapitre et suggéré des exercices d’évaluation pour l’application.

L’utilisation des nombres complexes en physique a été déjà remarquée par des mathématiciens et des physiciens depuis plusieurs années. A part l’électricité, il y a plusieurs parties de la physique qu’on peut étudier avec les nombres complexes. Nous encourageons nos cadets de poursuivre ce travail en vue de savoir comment les nombres complexes interviennent d’une manière fondamentale en physique.

ANNEXE

Extrait du programme de physique de la classe terminale scientifique

- Circuit en régime sinusoïdal forcé

Objectif général : L'élève doit être capable de :

- Déterminer les grandeurs caractéristiques de la réponse d'un circuit (R, L, C) à une excitation sinusoïdale

Objectifs spécifiques	Contenus	Observations
• Etablir l'équation différentielle d'un circuit RLC • Résoudre cette équation par la méthode de Fresnel • Définir son impédance	• Oscillations forcées en régime sinusoïdal d'un circuit RLC série ; impédance.	• On notera qu'il faut parler de phase et non plus de déphasage φ : Si $u(t) = U_m \cos(\omega t + \varphi)$ $i(t) = I_m \cos \omega t$ • φ est la phase de $i(t)$ par rapport à $u(t)$, mais en faisant remarquer que φ est une grandeur algébrique
• Définir la réponse d'un circuit (RLC) à une excitation sinusoïdale forcée : fréquence, résonance d'intensité, bande passante à 3db,	• Résonance d'intensité, bande passante, facteur de qualité.	• les applications de la résonance sont dégagées de manière pratique, à partir du réglage d'un récepteur radio sur une station.

facteur de qualité • Définir les grandeurs efficaces (Intensité et tension) • Définir la puissance moyenne et le facteur de puissance	• Intensité et tensions efficaces. Puissance, facteur de puissance.	• On pourra prendre l'exemple des tensions efficaces de la JIRAMA (110V, 220V). • En utilisant le calcul d'intégrale, on établira l'expression de la puissance moyenne. • On mettra en exergue que dans un circuit RLC série, la puissance moyenne consommée l'est uniquement par effet Joule et vaut RI^2
---	---	---

Extrait du programme de mathématique de la classe terminale scientifique

- Ensemble C des nombres complexes

Objectifs généraux : L'élève doit être capable de (d')

- Maîtriser les calculs sur les nombres complexes ;
- Faire le lien entre un nombre complexe et sa représentation géométrique ;

Objectifs spécifiques	Contenus	Observations
L'élève doit être capable de (d') • Effectuer toutes les opérations dans C • Déterminer la partie réelle, la partie imaginaire, le conjugué d'un nombre complexe donné. • Connaître et utiliser la définition et les propriétés essentielles du conjugué d'un nombre complexe • Calculer le module d'un nombre complexe écrit	• Forme algébrique • Somme, produit, quotient de deux nombres complexes. • Conjugué d'un nombre complexe - Définition et propriétés - Module d'un nombre complexe • Interprétation géométrique - Image d'un nombre complexe	On admettra l'existence d'un ensemble C contenant R et vérifiant : - C est muni d'une addition et d'une multiplication qui prolongent celles de R et qui suivent les mêmes règles de calcul ; - Il existe dans C un élément noté i tel que $i^2 = -1$ - Tout élément de C s'écrit de manière unique sous la forme $a + ib$ où a et b sont des réels.

sous sa forme algébrique • Utiliser dans les calculs les propriétés essentielles du module d'un nombre complexe • Déterminer l'ensemble des points M dont les affixes vérifient une condition donnée • Passer de la forme trigonométrique à la forme algébrique et réciproque • Calculer l'argument et le module d'un produit, d'un quotient et d'une puissance. • Trouver les racines n-ième d'un nombre complexe (arcs solutions) • Calculer l'angle de deux vecteurs dont on connaît les affixes	- Affixe d'un point, d'un vecteur - Interprétation de la somme, du conjugué, du module • Forme trigonométrique : - Module et argument - Formule de Moivre - Racine n-ième d'un nombre complexe - Interprétation géométrique du produit, du quotient.	Les éléments de $\mathbb{C}$ sont appelés des nombres complexes • Sans insister sur la structure de corps dans sa généralité, on montrera les propriétés qui confèrent à $\mathbb{C}$ la structure de corps. • On mettra en valeur les idées qui ont conduit à l'introduction des nombres complexes et on soulignera leur rôle en géométrie plane.
---	--	--

BIBLIOGRAPHIE

- [1] Beauvillain, R. (1986). *Circuits électriques et électroniques*. Paris : Lavoisier.
- [2] Bertin, M. (1987). *Cours de physique : Electromagnétisme 2, électrocinétique et éléments d'électronique*. Paris : Bordas.
- [3] Chagnon, C. (2003). *Cours de génie électrique*. Paris : Ellipses.
- [4] Finot, T (2009). *Physique Chimie PTSI*. Paris : Ellipses.
- [5] Fraudet, H. (1978). *Cours d'électricité*. Paris : Eyrolles.
- [6] Hebert, W. (1988). *Circuits électriques à courant alternatif*. Paris : Bordas.
- [7] Hulin, M. (1991). *Les bases de l'électromagnétisme*. Paris : Dunod.
- [8] Ingrao, B. (2003). *Les nombres complexes, origine, essai sur leur statut épistémologique*.
Exposé fait le 26 mars 2003 Groupe Histoire des Mathématiques Irem de Clermont-Ferrand.
- [9] Niard, J. (1970). *Circuits électriques*. Paris : Masson & C^{ie}.
- [10] Niard, J. (1986). *Electricité*. Paris : Hérissé.
- [11] Quaranta, L. (1993). *Electrocinétique*. Paris : Masson.
- [12] Queyrel, J. (1995). *Précis de physique électrocinétique MPSI, PCSI, PTSI*.
- [13] RAZAFIMAHANDRY, R. (1988). *Conception des exercices sur les oscillateurs électriques et mécaniques avec vérification expérimentale des résultats théoriques*. Mémoire CAPEN à l'ENS Antananarivo
- [14] Smith, K. (1992). *Electrical Circuits - An Introduction*. Cambridge University press.
- [15] U.E.R.P (1998), Programme officiel de la classe Terminale

WEBOGRAPHIE

[1] Brouchier, F. *Représentation complexe des fonctions sinusoïdales du temps.*

<http://static.brouchier.com/Physique/Amplitudes-complexes.pdf>

[2] Délèze, M. *Circuits électriques à courants alternatifs stationnaires et nombres complexes.*

http://www.collegedusud.ch/app/applmaths/cours/complexes/1-circuit_RLC_serie.pdf

[3] Laroche, E. (2006). *Electrotechnique Licence Physique et Applications Spécialité Ingénierie.*

<http://eavr.u-strasbg.fr/perso/edouard/Student>

[4] Lavau, G. (2009). *Les nombres complexes.* <http://pagesperso-orange.fr/lavau/index.htm>

[5] Piou, M. *Dipôles électriques passifs linéaires – Impédances.*

<http://www.iutenligne.net/.../DL-001051-04-05.01.00.pdf>

[6] Roussel, J (2007). *Electrocinétique.* <http://perso.ensc-rennes.fr/jimmy.roussel/>

[7] Sincère, F. *Utilisation pratique des nombres complexes en Electricité et Electronique.*

<http://pagesperso->

[orange.fr/fabrice.sincere/divers/nombres%20complexes/cours%20nombres%20complexes.p
df](http://pagesperso-orange.fr/fabrice.sincere/divers/nombres%20complexes/cours%20nombres%20complexes.pdf)

[8] Tisserant, S. Cours d'électrocinétique.

<http://marpix1.in2p3.fr/calor/my-web/elec1/elec1.html>

« MECANISME D'UTILISATION DES NOMBRES COMPLEXES EN ELECTRICITE »

RESUME

Ce mémoire intitulé “Mécanisme d'utilisation des nombres complexes en électricité” a été conçu dans le but de faire le lien entre les notions des nombres complexes et les cours d'électricité et d'utiliser les nombres complexes pour décrire, analyser et résoudre des problèmes d'électricité.

Dans cet ouvrage, nous avons mis en évidence l'utilisation des nombres complexes en électricité pour illustrer leur importance et leur avantage. De plus, nous avons essayé aussi de proposer une fiche pédagogique sur le chapitre “Circuit en régime sinusoïdal forcé” accompagnée de quelques exercices d'évaluations pour la classe de terminale scientifique en vue d'intégrer l'utilisation des nombres complexes en électricité au lycée.

Mots clés : *Nombres complexes, Electricité, Circuit en régime sinusoïdal forcé, Circuit RLC, Loi d'Ohm complexe, Impédance complexe.*

Nombre de pages : 94

Nombre de figures : 25

Nombre de tableaux : 3

Directeur de mémoire : RASOANAIVO René Yves

Auteur : RAVELOARISON Hasina Mampianina

Tel : 033.03.143.63