



**UNIVERSITE D'ANTANANARIVO**  
**ECOLE NORMALE SUPERIEURE**



DEPARTEMENT DE FORMATION INITIALE SCIENTIFIQUE

C.E.R PHYSIQUE-CHIMIE

**MEMOIRE DE FIN D'ETUDE POUR L'OBTENTION DU CERTIFICAT  
D'APTITUDE PEDAGOGIQUE DE L'ECOLE NORMALE SUPERIEURE**

**(C.A.P.E.N)**

**N° d'ordre 302/PC**

**ETUDE DES SYSTEMES  
LINEAIRES ELEMENTAIRES  
AVEC 'MIRA'**

Présenté par : **ROUEL MALALA Tahiry**

Année universitaire : 2010 – 2011





**UNIVERSITE D'ANTANANARIVO**  
**ECOLE NORMALE SUPERIEURE**



DEPARTEMENT DE FORMATION INITIALE SCIENTIFIQUE

C.E.R PHYSIQUE-CHIMIE

**MEMOIRE DE FIN D'ETUDE POUR L'OBTENTION DU CERTIFICAT  
D'APTITUDE PEDAGOGIQUE DE L'ECOLE NORMALE SUPERIEURE**

**(C.A.P.E.N)**

**N° d'ordre 302/PC**

**ETUDE DES SYSTEMES LINEAIRES  
ELEMENTAIRES AVEC 'MIRA'**

Présenté par : **ROUEL MALALA Tahiry**

**Soutenu le : 02 mai 2012**

**Président :** Monsieur RASOLONDRAMANITRA Henri, PhD.

Maitre de Conférences

**Juges :** Monsieur RATSIFARITANA Charles, PhD.

Maitre de Conférences

Monsieur RASTEFANO Elisée

Professeur

**Rapporteur :** Monsieur René Yves RASOANAIVO, PhD.

Maitre de Conférences

Année universitaire : 2010 – 2011

## REMERCIEMENT

En l'honneur de l'accomplissement du présent mémoire, je rends grâce à Dieu en qui demeure le courage et je me permets de témoigner ma gratitude, ma reconnaissance et mes sincères remerciements envers toutes les personnes qui y ont participé

Particulièrement

A Monsieur RASOLONDRAMANITRA Henri, PhD., Maitre de Conférences, qui nous a fait l'honneur de présider le jury de ce mémoire

A Monsieur RATSIFARITANA Charles, PhD., Maitre de Conférences qui nous fait l'honneur d'être membre du jury

A Monsieur RASTEFANO Elisée, Professeur, qui est aussi membre du jury

A Monsieur RASOANAIVO René Yves PhD., Maitre de Conférences, encadreur pédagogique qui a fait tout son possible pour m'aider à élaborer ce mémoire

A Monsieur ANDIAMBAHOAKA Zedidia, Maitre de Conférences à la faculté des Sciences de l'Université d'Antananarivo, qui a consacré ses temps précieux à m'aider à élaborer et parfaire le logiciel.

Mes amis qui n'ont pas hésité à offrir leur soutien moral, technique et financier.

Ma famille, mes parents qui ont tout donné pour l'accomplissement du mémoire de fin d'études du début jusqu'à la fin. Je leur témoigne ma plus profonde gratitude.

Merci à tous et que Dieu vous bénisse !



## RESUME

Nous avons opté pour l'étude des systèmes qui englobe la majeure partie du programme du second cycle du niveau secondaire. Cette approche est focalisée sur l'étude du comportement du système et l'évolution de ses différentes variables. Notre travail consiste à développer un logiciel 'MIRA' sous MATLAB /SIMULINK capable de représenter des graphiques, qui permettra de résoudre les problèmes liés au système dynamique linéaire. MIRA a pour but de réduire les problèmes liés aux mathématiques et d'améliorer l'enseignement apprentissage de la physique en exploitant le TIC (Technologie de l'information et de la Télécommunication). Dans la première partie est présentée les systèmes invariants linéaires. Dans la deuxième partie on aborde 'MIRA' : son élaboration, sa conception et sa présentation. Quelques exemples de travaux pratiques et des exercices sont présentés dans la troisième partie de l'ouvrage ; ces exercices et travaux pratiques sont surtout basés sur l'électricité. Un canevas de compte rendu est conçu spécialement pour accompagner les travaux pratiques.

## ABSTRACT

We chose to study the major part of system which is treated in high school. This topic is focused on the study of the state and the evolution of his parameter submitting under solicitation. This work consists in working out a software application called 'MIRA' under MATLAB/SIMULINK which can display graphics. MIRA is designed to reduce problems related to mathematics and improve learning physics by using information and communication technology (ICT). In the first part, we deal with dynamic linear system. In the second part, we talk about 'MIRA': its development, its design and its presentation. Some exercises and practical classes were made at the third part, to show how to use MIRA. The practical class is design with framework of proceedings.

## TABLE DES MATIÈRES

<b>REMERCIEMENT</b>	<b>i</b>
<b>RESUME</b>	<b>ii</b>
<b>ABSTRACT</b>	<b>iii</b>
<b>TABLE DES MATIÈRES</b>	<b>iv</b>
<b>LISTE DES ABREVIATIONS</b>	<b>v</b>
<b>LISTE DES FIGURES</b>	<b>vi</b>
<b>LISTE DES TABLEAUX</b>	<b>viii</b>
<b>INTRODUCTION</b>	<b>1</b>
<b>Première partie : les systèmes invariants linéaires</b>	<b>4</b>
<b>I. Les systèmes invariants linéaires</b>	<b>5</b>
I.1. Définition	5
I.2. Généralité	6
I.3. Analyse des systèmes linéaires	12
I.4. Analyses de la dynamique des systèmes invariants linéaires élémentaires	24
<b>Deuxième partie : conception – élaboration-présentation de ‘MIRA’</b>	<b>33</b>
<b>II. Conception-élaboration-présentation de ‘MIRA’</b>	<b>34</b>
II.1. Choix du titre	34
II.2. Présentation de MATAB SIMULINK	35
II.3. Elaboration de ‘MIRA’	36
II.4. Présentation de MIRA	38
II.5. Domaine d’application	50
II.6. Démarche d’utilisation	52
II.7. Avantage du logiciel	54
II.8. Limite	55
<b>Troisième partie : exploitation de ‘MIRA’ dans le domaine de l’enseignement</b>	<b>56</b>
<b>III. Exploitation de ‘MIRA’ dans le domaine de l’enseignement</b>	<b>57</b>
III.1. Méthode d’apprentissage	57
III.2. Exemples d’exercices et TP	63
<b>CONCLUSION</b>	<b>90</b>
<b>ANNEXES</b>	<b>92</b>
<b>BIBLIOGRAPHIE ET WEBOGRAPHIE</b>	<b>100</b>

## LISTE DES ABREVIATIONS

**Bmp** : bitmap

**Fcn** : function

**Jpeg** : joint photographic expert group

**MATLAB** : MATrix LABoratory

**MCR** : MATLAB Compiler Runtime

**TIC** : Technologie de l'Information et de la Télécommunication

**Tiff** : tagged image file format

**TP**: Travaux Pratiques

## LISTE DES FIGURES

<b>Figure 1. Schéma bloc d'un interrupteur électrique</b>	<b>6</b>
<b>Figure 2. Miroir pivotant ajustable</b>	<b>7</b>
<b>Figure 3. Représentation en schéma bloc</b>	<b>9</b>
<b>Figure 4. Représentation en schéma bloc d'un système linéaire</b>	<b>9</b>
<b>Figure 5. Schéma circuit RC</b>	<b>11</b>
<b>Figure 6. Organigramme d'analyse de système</b>	<b>13</b>
<b>Figure 7. Représentation d'un signal échelon</b>	<b>14</b>
<b>Figure 8. Erreur statique</b>	<b>15</b>
<b>Figure 9. Représentation d'un signal rampe</b>	<b>16</b>
<b>Figure 10. Erreur de trainage</b>	<b>16</b>
<b>Figure 11. Représentation d'un signal impulsion</b>	<b>17</b>
<b>Figure 12. Représentation du signal sinusoïdale</b>	<b>17</b>
<b>Figure 13. Transformé de Fourier d'un signal sinusoïdal</b>	<b>19</b>
<b>Figure 14. Les dépassements caractérisent l'amortissement</b>	<b>21</b>
<b>Figure 15. Evaluation du temps de réponse du système</b>	<b>22</b>
<b>Figure 16. Stabilité du système en fonction des pôles</b>	<b>23</b>
<b>Figure 17. Schéma bloc système du premier ordre</b>	<b>25</b>
<b>Figure 18. Réponse à un échelon d'un système du premier ordre</b>	<b>25</b>
<b>Figure 19. Réponse à une rampe d'un système du premier ordre</b>	<b>26</b>
<b>Figure 20. Réponse à une impulsion d'un système du premier ordre</b>	<b>27</b>
<b>Figure 21. Schéma bloc système du second ordre</b>	<b>28</b>
<b>Figure 22. Réponse indicielle d'un système de second ordre à fort amortissement</b>	<b>29</b>
<b>Figure 23. Réponse indicielle d'un système du second ordre à faible amortissement</b>	<b>30</b>
<b>Figure 24. Réponse des systèmes du second ordre à une rampe</b>	<b>31</b>
<b>Figure 25. Fenêtre MATLAB/SIMULINK R2011a</b>	<b>36</b>
<b>Figure 26. Représentation du projet</b>	<b>37</b>
<b>Figure 27. Représentation de l'enchaînement</b>	<b>37</b>
<b>Figure 28. Présentation générale de 'MIRA'</b>	<b>39</b>
<b>Figure 29. Accueil 'MIRA'</b>	<b>40</b>
<b>Figure 30. Interface de travail</b>	<b>42</b>
<b>Figure 31. Barre de menu 'fichier'</b>	<b>43</b>

<b>Figure 32. Fenêtre ‘indication’</b>	<b>44</b>
<b>Figure 33. Fenêtre ‘exemple’</b>	<b>45</b>
<b>Figure 34. Fenêtre présentation</b>	<b>46</b>
<b>Figure 35. Fenêtre de travail</b>	<b>47</b>
<b>Figure 36. Message d’erreur des paramètres de temps</b>	<b>49</b>
<b>Figure 37. Schéma bloc d’un thermomètre</b>	<b>51</b>
<b>Figure 38. Schéma de la régulation de la température d’une pièce</b>	<b>52</b>
<b>Figure 39. Démarche d’utilisation de ‘MIRA’</b>	<b>53</b>
<b>Figure 40. Exemple dans ‘MIRA’</b>	<b>59</b>
<b>Figure 41. Énoncé de l’exercice de simulation</b>	<b>60</b>
<b>Figure 42. Exemple : Etude du dipôle RC soumis à un échelon de tension</b>	<b>61</b>
<b>Figure 43. Exploitation de ‘MIRA’ : ‘entrée des paramètres’</b>	<b>62</b>
<b>Figure 44. Figure de réponse d’un circuit RC soumis à un échelon de tension</b>	<b>63</b>
<b>Figure 45. circuit oscillant LC</b>	<b>64</b>
<b>Figure 46. Étude du circuit oscillant LC avec MIRA</b>	<b>67</b>
<b>Figure 47. Schéma d’un circuit RC</b>	<b>68</b>
<b>Figure 48. Charge et décharge d’un condensateur</b>	<b>70</b>
<b>Figure 49. Circuit RLC sérié</b>	<b>73</b>
<b>Figure 50. Schéma bloc du circuit RLC</b>	<b>73</b>
<b>Figure 51. Oscillation libre</b>	<b>75</b>
<b>Figure 52. Oscillation pseudo périodique</b>	<b>76</b>
<b>Figure 53. Régime peu amorti</b>	<b>77</b>
<b>Figure 54. Régime apériodique</b>	<b>78</b>
<b>Figure 55. Schéma du circuit RL</b>	<b>81</b>
<b>Figure 56. Schéma bloc du circuit RL</b>	<b>81</b>
<b>Figure 57. Circuit RL soumis à un échelon de tension</b>	<b>83</b>
<b>Figure 58. Détermination de <math>\tau</math></b>	<b>85</b>
<b>Figure 59. Détermination de <math>\tau</math> par la méthode de la tangente</b>	<b>86</b>
<b>Figure 60. Première page du canevas de compte rendu</b>	<b>87</b>
<b>Figure 61. Forme générale du compte rendu de TP : ‘canevas’</b>	<b>88</b>

## LISTE DES TABLEAUX

<b><i>Tableau 1. Tableau récapitulatif caractéristique des signaux d'entrées.....</i></b>	<b><i>20</i></b>
<b><i>Tableau 2. Fiche technique de 'MIRA'.....</i></b>	<b><i>38</i></b>

## <sup>1</sup>INTRODUCTION

La physique a pour but essentiel de mieux connaître le monde qui nous entoure par le biais de l'analyse des réalités et de l'effort pour comprendre et expliquer. Pour mieux expliquer les différents phénomènes se passant dans notre environnement, il nous faut pratiquer une démarche expérimentale. Cette démarche expérimentale nécessite une attitude spécifique adoptée qui est l'attitude scientifique. De ce fait, interpréter les différents phénomènes nécessite et requiert des connaissances et des compétences de bases comme les mathématiques que nous devons maîtriser. Il n'existe aucun domaine de la physique qui ne fasse pas appel aux mathématiques. Certes, l'expression des lois de la physique sont tous en terme mathématique, ce qui rend difficile pour les élèves la compréhension des phénomènes physiques. En effet, la résolution de certains problèmes physiques du niveau secondaire nécessite un niveau de mathématique élevé incluant les équations différentielles. De plus, la physique requiert un certain raisonnement des plus concis puisque interpréter les phénomènes naturels sont la base de la matière. De ce fait, les mathématiques constituent un obstacle majeur pour les élèves à la compréhension de phénomène physique.

L'enseignement de la physique doit être essentiellement expérimental. Pourtant la plupart de nos lycées sont mal équipés en matériel didactique ou n'en possèdent pas du tout. Alors l'enseignement de la physique se fait en général théoriquement. Actuellement, avec le développement des nouvelles technologies, l'utilisation du TIC (technologie de l'information et de la Communication) est devenue incontournable. L'utilisation des TIC par le biais de logiciel peut donc contribuer à l'amélioration et au développement de l'enseignement /apprentissage de la physique.

En considérant ces faits, nous avons opté pour l'étude des systèmes qui englobe la majeure partie du programme du second cycle du niveau secondaire. Cette approche est focalisée sur l'étude du comportement du système et l'évolution de ses différentes variables. Notre travail consiste à développer un logiciel sous MATLAB /SIMULINK<sup>1</sup> capable de représenter des graphiques, qui permettra de résoudre les problèmes liés au système dynamique linéaire. Lorsqu'on dispose d'un modèle d'un système physique tel les systèmes

---

<sup>1</sup> MATLAB sera présenté à la page 35



linéaires relatifs au processus dynamique continu et invariant dans le temps : l'étape première consiste à étudier son comportement. Cela signifie qu'il faut caractériser son état et son évolution par sa réponse à différent signal d'entrée. De ce fait, on procède par deux approches : il y a l'étude temporelle du système et l'étude fréquentielle.

MATLAB /SIMULINK est un logiciel interactif permettant de réaliser des calculs numériques ainsi que des visualisations graphiques. Il possède un vaste ensemble de procédures programmées et directement utilisables par une simple instruction. MATLAB/SIMULINK est un outil précieux pour le scientifique puisqu'il permet des visualisations de données rapides et précises ; de plus il permet de réaliser facilement des programmes complexes.

Dans l'étude des systèmes linéaires, nous allons étudier précisément les systèmes invariants dynamiques linéaires élémentaires référant au système du premier ordre et du second ordre. Cela est dû au fait que la plupart des équations différentielles étudiées au lycée est linéaire.

Dans cette optique l'objectif premier de ce mémoire intitulé '**Etude des systèmes linéaires élémentaires avec 'MIRA'**' est d'abord d'aider les élèves à comprendre le monde technique qui nous entoure, et aussi de contribuer à l'évolution de l'enseignement de la physique dans les lycées, ensuite d'atténuer les problèmes liées aux mathématiques qui constituent un blocage majeur dans l'étude du comportement du système ; et enfin, de limiter les problèmes de matériels didactiques qui sont des supports indispensables pour le bon déroulement d'une séquence d'apprentissage.

Notre logiciel doit répondre à différents critères :

- D'abord que le logiciel doit être ergonomique ;
- Ensuite, au niveau de la taille et qualité d'image : l'image doit être nette et la taille du logiciel doit être légère.
- Enfin, il doit être accessible à tous ceux qui ont besoin de lui.

Ce travail se divise en trois parties bien distinctes. Nous allons voir dans la première partie les généralités concernant les systèmes invariants linéaires, ensuite on verra comment analyser la dynamique des systèmes linéaires et enfin nous allons terminer par l'étude des

systèmes élémentaire

Dans la deuxième partie, on parlera du logiciel proprement dit ‘MIRA’ : ses différentes fonctionnalités, sa mode de conception, son domaine d’utilisation et la démarche pour l’utiliser.

Dans la troisième partie, on abordera l’exploitation proprement dite de ‘MIRA’ dans le domaine de l’enseignement dans le second cycle du niveau secondaire. Pour ce faire, nous allons donner des exemples d’exercices et de travaux pratiques.

*Première partie : les  
systèmes invariants linéaires*

Un système est défini par ses constituants et les interactions qui existent entre eux, l'ensemble représentant une entité individualisée. L'importance de la notion de système réside dans sa généralité. En effet, un système peut être de nature quelconque : mécanique, électrique, biologique, chimique.

On s'intéressera principalement à l'étude des systèmes linéaires invariants dans le temps. Par invariance dans le temps, on entend que les paramètres du modèle sont constants et indépendants du temps. Mathématiquement, un système invariant linéaire est gouverné par des équations différentielles linéaires à coefficients constants. Ces équations différentielles relient la sortie à l'entrée. L'identification des grandeurs d'entrée et de sortie pour un processus ainsi que l'établissement d'équations les reliant constituent l'étape de modélisation mathématique du système à étudier.

Dans cette première partie nous allons voir les généralités concernant les systèmes linéaires, ensuite on va savoir comment analyser les systèmes invariants linéaires et enfin nous allons voir en détail l'analyse temporelle des systèmes du premier ordre et du second ordre. Nous limiterons notre étude aux systèmes linéaires monovariables continus et invariants.

## **I. Les systèmes invariants linéaires**

[1], [2], [3], [4], [5], [6], [7], [8], [9], [10], [11], [12]

### **1.1. Définition** [1]

#### **a. Système dynamique :**

On appelle système dynamique un système dont l'étude ne peut être réalisée qu'en prenant en compte les valeurs passées du phénomène. Les grandeurs de sortie dépendent des valeurs présentes et passées des grandeurs d'entrées.

#### **b. Signaux causals :**

Un signal causal est défini par :

$$s(t)=0 \text{ pour } t<0 \quad (1)$$

Un signal est dit causal si ce signal est nul quand  $t<0$

c. Systèmes monovariabiles :

Un système monovariable est un système présentant une seule entrée  $e(t)$  et une seule sortie  $s(t)$ .

*1.2. Généralité*

Pour les systèmes dynamiques, la ‘cause’ est représentée par les signaux d’entrée, tandis que le signal de sortie représente ‘l’effet’. Un signal d’entrée correspond à une commande ou à une perturbation. Une perturbation étant une variable indépendante qui influence les grandeurs de sortie indépendamment de l’objectif conduite.

Ainsi, un système dynamique causal est un système qui ne répond pas avant d’être excité. Dans les chapitres à venir, lors de l’analyse des systèmes invariants linéaires continus, on ne considère que les signaux causals.

a. Exemple de systèmes linéaires

Nous allons prendre quelques exemples de système linéaire comme l’interrupteur et le miroir pivotant.

i. Interrupteur électrique

Considérons l’interrupteur électrique : c’est le système de commande réglant le passage de l’électricité.

On considère l’action de mettre l’interrupteur dans la position arrêt ou marche comme étant le signal d’entrée. C’est à dire que le signal d’entrée ne peut prendre que deux état : marche ou arrêt. Le signal de sortie est le passage ou non passage du courant électrique.

On a le système représenté par la figure1 ci-dessous :



Figure 1. Schéma bloc d’un interrupteur électrique

## ii. Miroir pivotant

Dans le cas d'un miroir pivotant selon la figure 2.

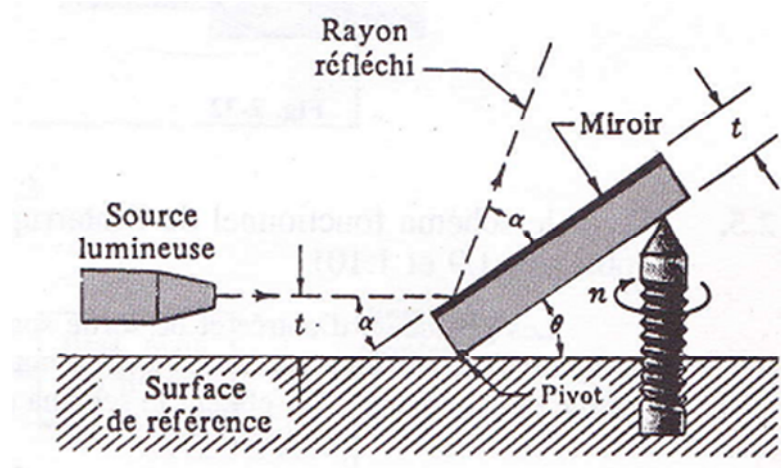


Figure 2. Miroir pivotant ajustable [2]

La grandeur d'entrée est l'angle d'inclinaison  $\theta$  qui peut être modifié en serrant la vis et la grandeur de sortie est le paramètre angulaire  $(\theta + \alpha)$  du faisceau réfléchi par le miroir, pris comme surface de référence. Puisque le rayon incident est pris parallèle à la surface de référence, alors  $\alpha = \theta$ . Donc la grandeur de sortie vaut  $2\theta$ .

Il existe beaucoup de types de systèmes linéaires mais nous allons spécialement nous focaliser sur les systèmes dynamiques élémentaires qu'on étudiera en profondeur plus tard.

### b. Représentation de systèmes linéaires

#### i. Représentation par équation différentielle

Un système dynamique linéaire peut être représenté par une équation différentielle selon l'équation 2 à coefficients constants liant les grandeurs d'entrée et de sortie.

(Voir annexe 1)

$$b_m \frac{d^m y}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} y}{dt^{m-1}} + \dots + b_2 \frac{d^2 y}{dt^2} + b_1 \frac{dy}{dt} + b_0 y = a_n \frac{d^n x}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \dots + a_2 \frac{d^2 x}{dt^2} + a_1 \frac{dx}{dt} + a_0 x \quad (2)$$

Où  $b_1, b_2, \dots, b_m$  et  $a_1, a_2, \dots, a_n$  sont des constantes.

Pour connaître la réponse à une entrée, la résolution de l'équation différentielle est

nécessaire. Nous allons faire une résolution graphique de la solution de l'équation différentielle élémentaire.

- Equation différentielle des systèmes invariants linéaires élémentaires :

On parle de systèmes dynamiques élémentaires lorsqu'on aborde les systèmes du premier ordre et du second ordre, dont on étudiera spécialement ici.

Pour les systèmes du premier ordre on a l'équation du type :

$$\tau \frac{ds(t)}{dt} + s(t) = K.e(t) \quad (3)$$

$\tau$ : constante de temps positive  
 $K$ : gain statique  
 $s(t)$  : grandeur de sortie  
 $e(t)$  : grandeur d'entrée

Pour les systèmes du second ordre on a l'équation du type :

$$a_2 \frac{d^2 s(t)}{dt^2} + a_1 \frac{ds(t)}{dt} + a_0 s(t) = Ke(t) \quad (4)$$

Soit sous la forme canonique

$$\frac{1}{\omega_n^2} \frac{d^2 s(t)}{dt^2} + \frac{2z}{\omega_n} \frac{ds(t)}{dt} + s(t) = Ke(t) \quad (5)$$

Avec :

$\omega_n$  : Pulsation propre du système non amorti  
 $K$  : gain statique  
 $z$  : facteur d'amortissement

## ii. Représentation par schéma fonctionnel

La représentation par schéma fonctionnel ou plus précisément le schéma bloc permet de représenter de manière graphique un système linéaire. Un schéma bloc consiste en une représentation graphique abrégé des relations de cause à effet entre le signal d'entrée et le signal de sortie d'un système physique.

On inscrit à l'intérieur du rectangle représentant l'élément, la description ou le nom de l'organe ainsi que le symbole de l'opération mathématique à effectuer sur le signal d'entrée pour obtenir un signal de sortie. Les flèches indiquent le sens dans lequel l'information ou le signal se transmettent.

Le bloc, selon la figure 3, possède une entrée E et une sortie S ; H est la fonction de transfert du bloc.

L'entrée E et la sortie S sont liées par la relation :  $S=H.E$

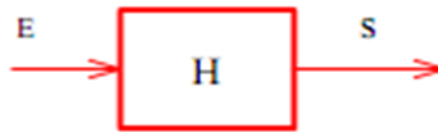


Figure 3. Représentation en schéma bloc

Pour notre système on a le schéma suivant :

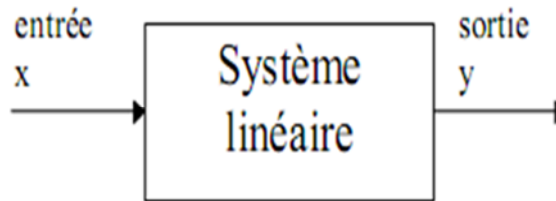


Figure 4. Représentation en schéma bloc d'un système linéaire

### iii. Représentation par fonction de transfert

Un système linéaire continu invariant est décrit par une équation différentielle de la forme de l'équation (2):

Les transformées de Laplace respectives de l'entrée et de la sortie sont :

$$y(t) \longrightarrow Y(p) \quad (6)$$

$$x(t) \longrightarrow X(p) \quad (7)$$

D'où en appliquant à l'équation (2) la transformée de Laplace (voir annexe 2) aux deux membres de l'égalité, on a :



$$b_m p^m Y(p) + b_{m-1} p^{m-1} Y(p) + \dots + b_1 p Y(p) + b_0 Y(p) = a_n p^n X(p) + a_{n-1} p^{n-1} X(p) + \dots + a_1 p X(p) + a_0 X(p) \quad (9)$$

$$(b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \dots + b_1 p + b_0) Y(p) = (a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0) X(p) \quad (10)$$

$$H(p) = \frac{Y(p)}{X(p)} = \frac{(a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0)}{(b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \dots + b_1 p + b_0)} \quad (11)$$

$H(p)$  est la fonction de transfert ou transmittance du système

La représentation par le schéma fonctionnel et la fonction de transfert donnent un aperçu sur les caractéristiques principales du système sans résoudre l'équation différentielle.

La représentation par schéma bloc est déduite de la représentation par la transformée de Laplace. La fonction de transfert globale peut être déterminée à partir du schéma bloc ou de la représentation par Laplace.

### c. Caractérisation de la dynamique des systèmes

i. Variable temporelle : cette variable est notée  $t$ .

ii. Variable d'entrée ou commande :

Cette variable est le signal d'entrée du système considéré qui est complètement indépendant du système et de son évolution. La grandeur d'entrée est modélisée à travers une fonction.

iii. Variable de sortie ou l'effet :

C'est la variable dont l'évolution dépend du système et est modélisée à travers une fonction aussi comme la variable d'entrée.

iv. Exemple :

Considérons l'exemple suivant : un circuit  $\{RC\}$  composé d'un résistor  $R$  et d'un condensateur  $C$ . Dans ce circuit,  $U_e$  et  $U_s$  sont respectivement tension d'entrée et tension de sortie.

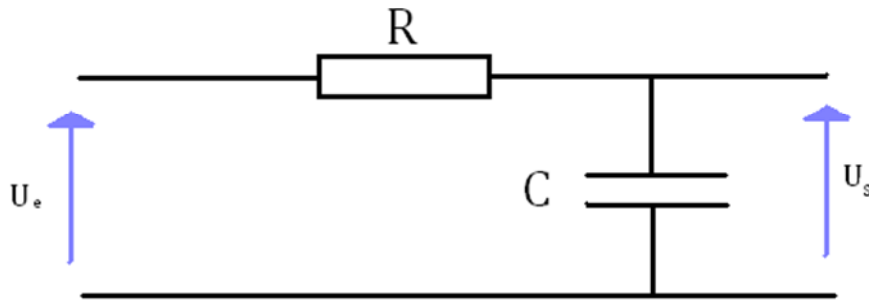


Figure 5. Schéma circuit RC

Le système est décrit par les équations suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} u_e(t) = R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} \\ u_s(t) = \frac{q}{C} \end{array} \right. \quad (12)$$

$$(13)$$

Ce sont les équations de changement d'état du système, soit les fonctions de transition du système {RC} où  $q(t)$  est la charge électrique du condensateur qui est une variable d'état du système

En utilisant  $T=RC$  alors on a

$$\left\{ \begin{array}{l} T \frac{dq}{dt} + q(t) = C u_e(t) \\ u_s(t) = \frac{1}{C} q(t) \end{array} \right. \quad (14)$$

$$(15)$$

La condition initiale est définie par :  $q(t_0)=q_0$

La solution de cette équation, qui explicite la variable d'état et la sortie du système est une fonction de transition de sortie.

Les différentes caractéristiques de ce système sont :

- ❖ Variable temporelle :  $t$
- ❖ Variable d'entrée :  $U_e$
- ❖ Variable de sortie :  $U_s$
- ❖ Variable d'état :  $R, C, q$

- ❖ Fonction de transition d'état : définie par les équations (14) et (15)
- ❖ Fonction de sortie : c'est la solution de l'équation différentielle.

### I.3. Analyse des systèmes linéaires

A priori, le système peut être considéré comme une boîte noire. Il est dès lors important, en premier lieu, de distinguer les grandeurs d'entrée ('inputs') et les grandeurs de sortie ('outputs') du système étudié. Ensuite, il importe d'essayer de déterminer les relations qui les relient et de connaître la nature et les modes d'interaction avec l'environnement.

Par grandeur de sortie, on entend la grandeur que l'on souhaite observer. Par grandeur d'entrée, on entend les signaux qui permettent d'agir sur le système, c'est-à-dire qui affectent l'état de sa grandeur de sortie. La grandeur de sortie peut être modifiée par l'action des grandeurs d'entrées ou sous l'effet de perturbations provenant de l'environnement ou encore sous l'effet de la variation des constituants du système lui-même.

Les étapes de l'analyse du système sont présentées dans la figure 6.

L'analyse de système linéaire passe par différents étapes. D'abord, il faut identifier le système. Ensuite identifier tous les paramètres liés au système pour établir son équation différentielle. Nous entrons ensuite dans la phase de la modélisation. Pour modéliser un système, il faut le représenter via le schéma fonctionnel ou le schéma bloc. Vient ensuite la sollicitation par des signaux typiques, cela consiste à soumettre le système aux différents signaux canoniques pour connaître sa performance. De ce fait, on connaît le comportement du système vis-à-vis de la commande. Enfin, on fait le réglage nécessaire à la performance souhaitée. Dans les trois dernières parties, on a fait une simulation.

#### a. Type d'analyse

L'analyse d'un système linéaire a pour objectif de comparer les performances des systèmes. Deux types d'analyses peuvent être effectués à savoir l'analyse temporelle et l'analyse fréquentielle.

##### i. Analyse temporelle

L'entrée est un signal qui varie en fonction du temps, elle permet d'évaluer les performances en rapidité, précision et stabilité.

# NOTATION-SIMULATION

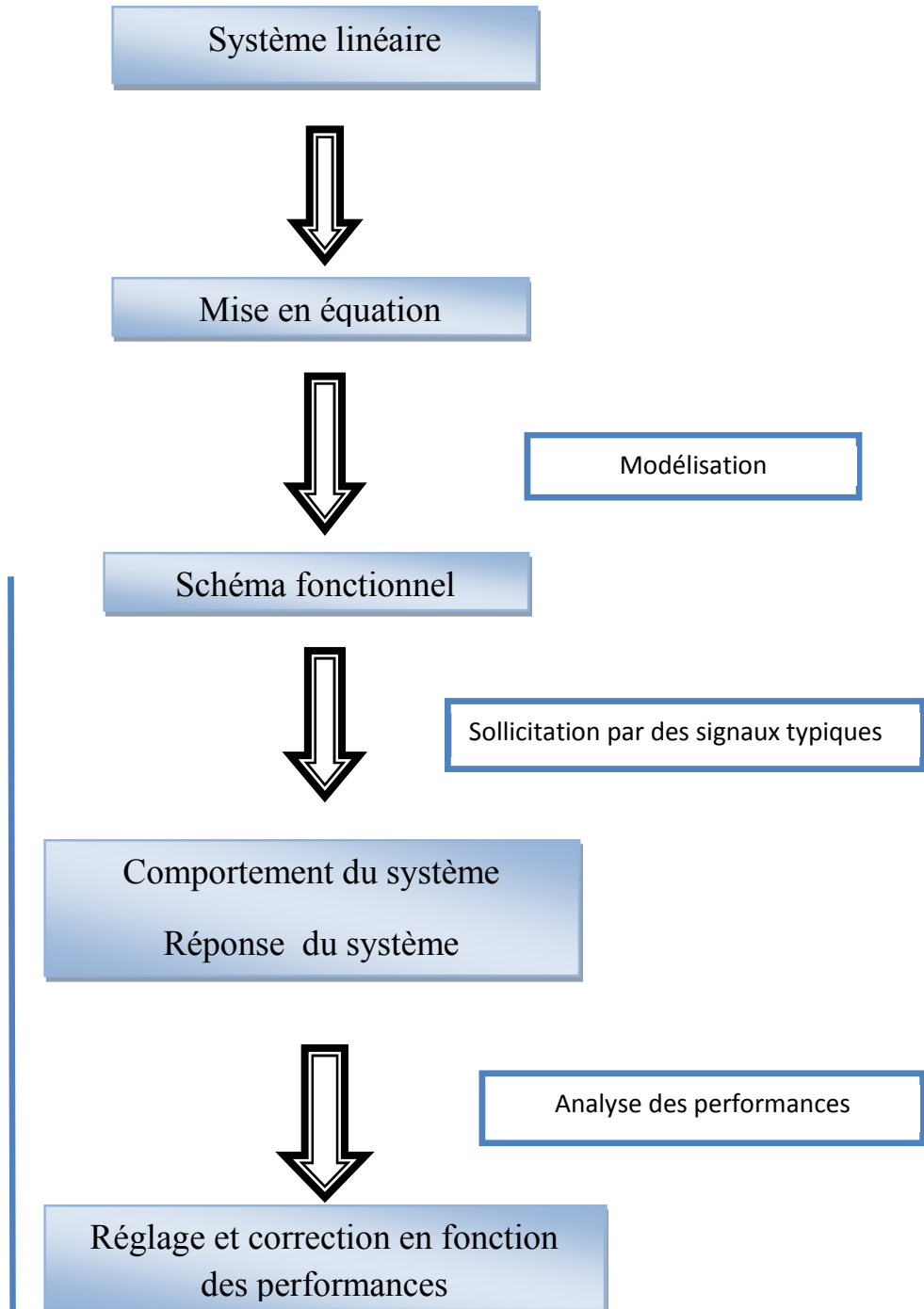


Figure 6. Organigramme d'analyse de système

- Pour évaluer la stabilité d'un système on utilise l'entrée 'impulsion'.
- Pour connaître la précision du système on utilise l'entrée 'échelon'.
- Pour savoir l'évolution du système on utilise l'entrée 'rampe'.

- Les différents signaux d'entrée pour une analyse temporelle :

♦ Signal échelon

La fonction échelon permet de soumettre le système à une entrée constante depuis  $t=0$ .

L'équation de l'échelon s'écrit :

$$e(t) = Au(t) \quad (14)$$

$u(t)$  : fonction de Heaviside:

$$(15)$$

$$\begin{cases} \text{pour } t < t_0 & u(t) = 0 \\ \text{pour } t \geq t_0 & u(t) = 1 \end{cases}$$

$$(16)$$

La fonction échelon est représentée par la figure 7.

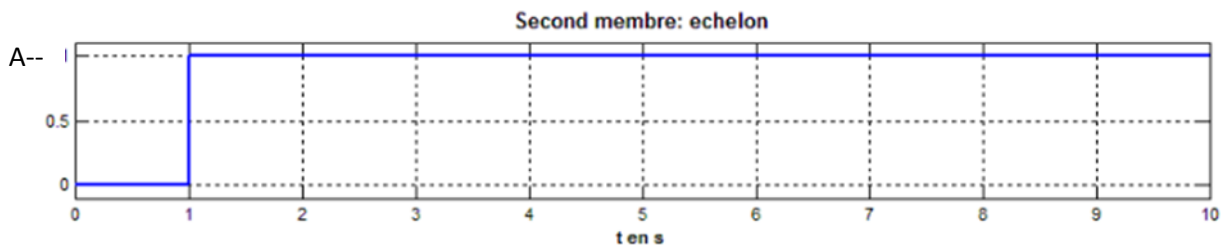


Figure 7. Représentation d'un signal échelon avec 'MIRA'

Lorsqu'on applique un échelon à l'entrée d'un système, il s'agit d'une brutale variation d'amplitude qui passe de zéro à A. La sortie du système ne peut suivre instantanément cette brusque variation, et on observe une phase transitoire, qui met en évidence certaines caractéristiques du système. La réponse à un échelon est appelée réponse indicielle

Par ailleurs, on peut observer le comportement en régime établi et définir ainsi

d'autres caractéristiques du système tel que l'erreur statique représenté par la figure 8.

♦ Signal rampe

Ce signal, représenté par la figure 9, est le signal de base permettant d'analyser la réponse d'un système en poursuite et son équation est de la forme :

$$e(t) = a \cdot t \cdot u(t) \quad (17)$$

Où  $u(t)$  est la fonction de Heaviside ;

<sup>2</sup> $a$  est la pente de la droite

Ce signal va permettre d'observer la façon dont le système suit l'évolution du signal d'entrée, et mettre ainsi en évidence le phénomène de vitesse. C'est très utile pour caractériser les systèmes suiveurs c'est-à-dire que la grandeur de sortie suit la grandeur de l'entrée

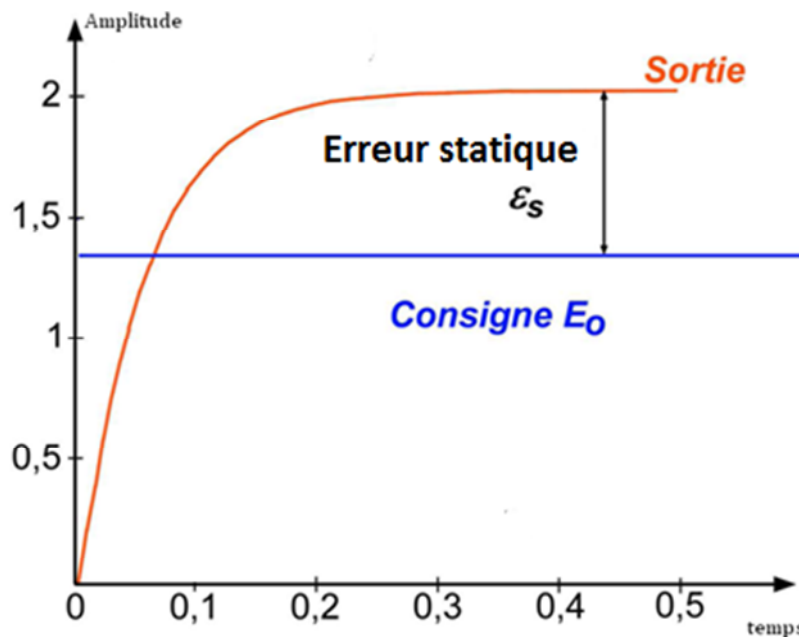


Figure 8. Erreur statique

<sup>2</sup>  $a$ : pente de la droite est définie comme le rapport des différences des ordonnées et la différence des abscisses ;  $a = \frac{\Delta y}{\Delta x}$

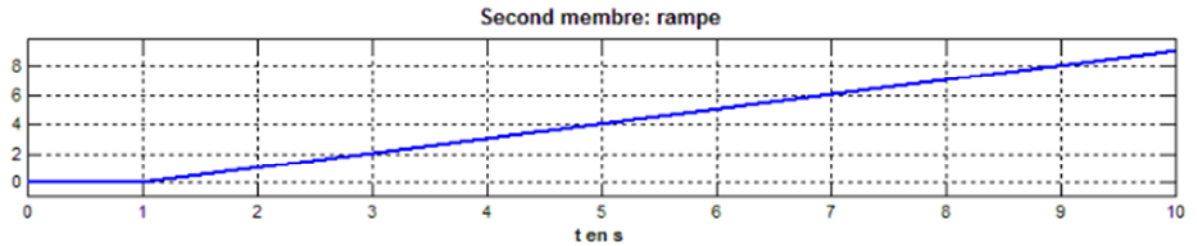


Figure 9.Représentation d'un signal rampe avec 'MIRA'

La réponse à une rampe permet la mise en évidence de l'erreur en poursuite d'un système suiveur.

On caractérise comme indiqué sur la figure ci-dessous, l'erreur de traînage, que l'on observe en régime permanent. L'erreur de traînage ou erreur en vitesse, participe aussi à la précision d'un système, que l'on peut améliorer par des corrections.

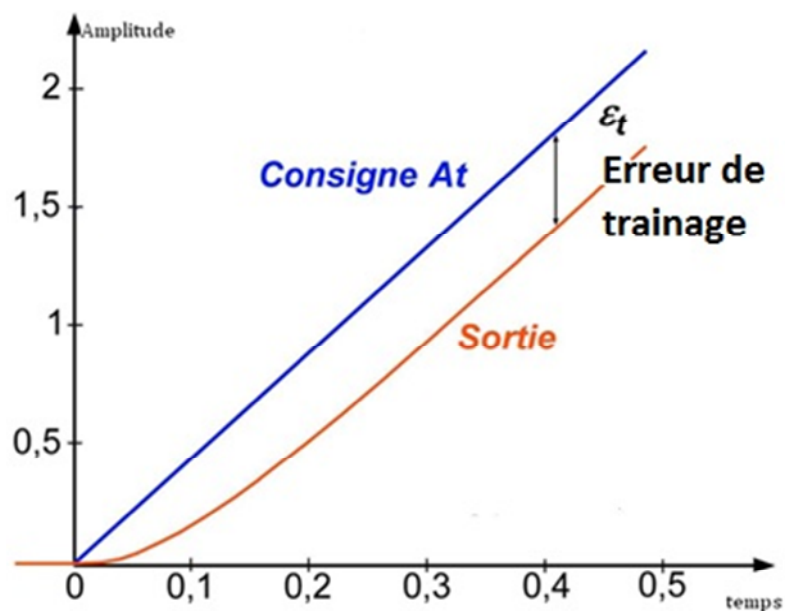


Figure 10. Erreur de traînage

#### ♦ Signal impulsion

Cette fonction difficile à réaliser et représenter par la figure 11 physiquement permet de simuler l'effet d'une action s'exerçant durant un temps très bref (choc; impulsion). Son équation est de la forme :

$$\forall t \neq 0,$$

(18)

$$\begin{cases} \delta(t) = 0 \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t).dt = 1 \end{cases}$$

(19)

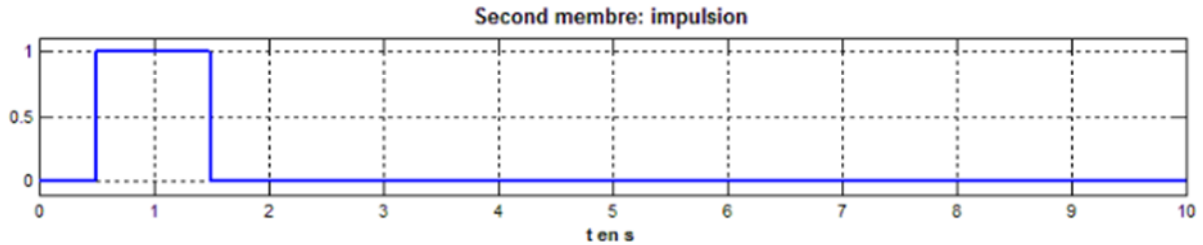


Figure 11. Représentation d'un signal impulsion avec 'MIRA'

En pratique on ne peut que générer une impulsion proche de la fonction de Dirac (voir annexe 3), qui modélise alors une action qui s'exerce pendant un temps très court (Choc, secousse...). La réponse à une impulsion de Dirac, réponse impulsionnelle, est très intéressante en théorie, permettant de caractériser parfaitement le système au niveau de la stabilité.

## ii. Analyse fréquentielle

- Signal sinusoïdal

Ce signal est le signal de base de l'étude fréquentielle des systèmes linéaires, c'est à dire la réponse en fréquence du système. Il est représenté par la figure 12.

$$e(t) = K.\sin(\omega t).u(t) \quad (20)$$

$\left\{ \begin{array}{l} K : \text{l'amplitude} \\ \omega : \text{pulsation ou fréquence angulaire} \end{array} \right.$

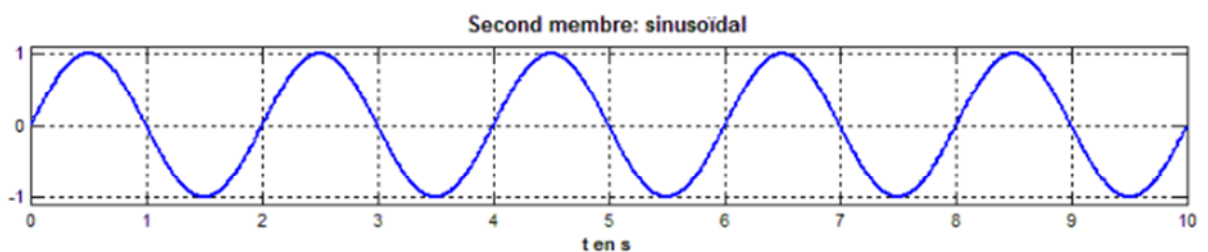


Figure 12. Représentation du signal sinusoïdale



NB : on peut aussi faire une étude temporelle avec un signal harmonique ou sinusoïdale.

### Analyse spectrale :

Un **spectre** [figure 13] est un graphe dans lequel sont représentées les amplitudes et les fréquences de toutes les composantes vibratoires élémentaires induites par le fonctionnement d'une machine. Chaque composante est représentée par un segment vertical appelé **raie** dont l'abscisse représente la fréquence et l'ordonnée, l'amplitude.

Notons que dans certains cas (raies confondues et dépassant largement du signal, ...) nous ne parlons plus de raie, mais de **pic**.

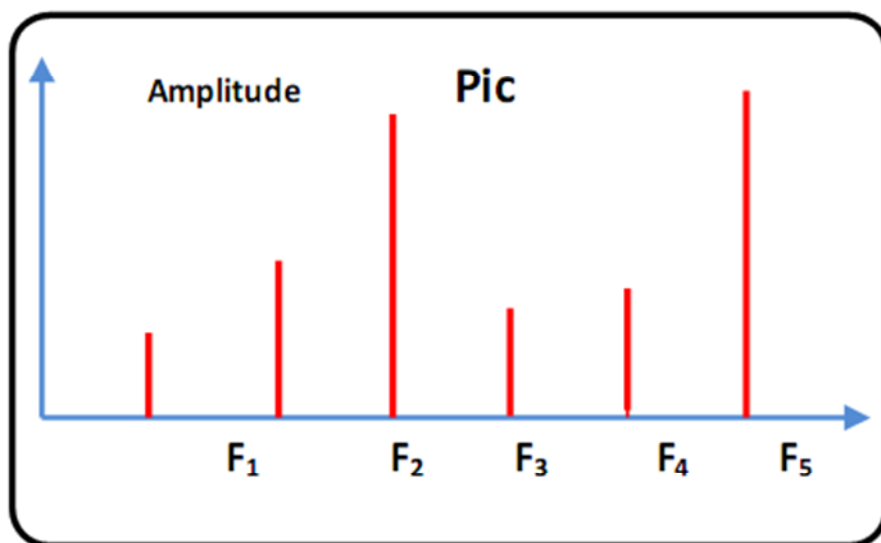


Figure 13. Exemple de spectre

Les spectres issus de signaux vibratoires réels sont très riches en raison du grand nombre de sources vibratoires présentes dans une machine. Par suite, les informations intéressantes dans le spectre ne correspondent pas forcément aux fréquences présentant des maxima d'amplitude. Des raies spectrales d'amplitude faibles au regard des autres peuvent

être d'un intérêt de premier plan pour le diagnostic. Afin de pouvoir les visualiser, on utilise pour la représentation des spectres en fréquences une échelle logarithmique des amplitudes du signal. Ce type de représentation présente l'avantage de favoriser l'affichage des petites amplitudes et est donc recommandé.

**Bref, le spectre d'un signal est la représentation en fonction de la fréquence des amplitudes des différentes composantes présentes dans le signal.**

Le spectre d'un signal nous renseigne donc sur les différentes composantes fréquentielles qu'il contient.

A titre d'exemple, on considère le transformé de Fourier d'un signal sinusoïdal (figure 14) :

$$s(t) = S \cos(\omega_0 t) \quad (21)$$

$$S(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) e^{-j2\pi f t} dt = S \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(2\pi f_0 t) e^{-j2\pi f t} dt \text{ avec } \cos(2\pi f_0 t) = \frac{e^{j2\pi f_0 t} + e^{-j2\pi f_0 t}}{2} \quad (22)$$

$$S(f) = S \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{j2\pi f_0 t} + e^{-j2\pi f_0 t}}{2} e^{-j2\pi f t} dt = \frac{S}{2} \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j2\pi f_0 t} \cdot e^{-j2\pi f t} dt + \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j2\pi f_0 t} \cdot e^{-j2\pi f t} dt \right] \quad (23)$$

$$S(f) = \frac{S}{2} (TF[e^{j2\pi f_0 t}] + TF[e^{-j2\pi f_0 t}]) \quad (24)$$

$$\text{D'où } TF[S \cos 2\pi f_0 t] = \frac{S}{2} [\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)] \quad (25)$$

Avec  $\delta$  : fonction de Dirac

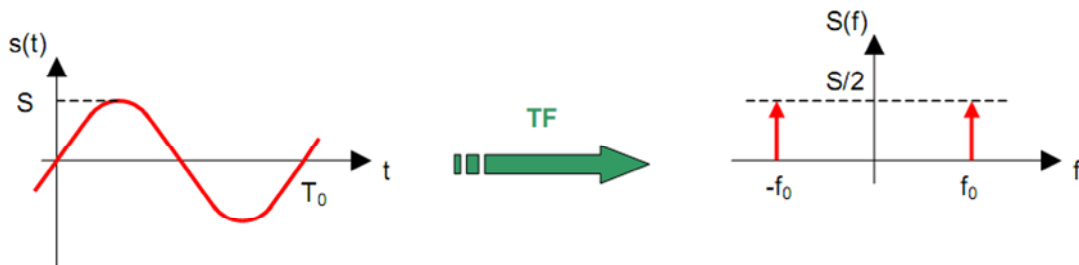


Figure14. Transformé de Fourier d'un signal sinusoïdal

C'est cela qu'on va faire dans l'analyse fréquentielle de notre système. On va faire une représentation spectrale de l'amplitude en fonction de la pulsation à l'échelle logarithmique.

Tableau 1. Tableau récapitulatif caractéristique des signaux d'entrées

Signal	Echelon	Impulsion	rampe	Sinusoïdale
Réalisation physique	Mise sous tension d'un appareil	Fermeture brève d'un interrupteur	missile	Générateur de signal
Domaine d'utilisation	Signal test le plus simple à réaliser	Système ne pouvant pas être excité pendant un temps assez important	Système suiveur	Pour une analyse fréquentielle

#### b. Evaluation des performances

Pour juger les performances d'un système, on est conduit à déterminer ses réponses aux entrées typiques.

Les critères permettant de qualifier et quantifier les performances du système sont :

- La stabilité
- La précision
- La rapidité
- L'amortissement

#### i. Régime transitoire

Lorsqu'un système est soumis à l'un des entrées définis ci-dessus. Il lui faut en règle générale un certain temps pour atteindre son régime permanent. Pendant ce temps, on dit qu'il est en régime transitoire.

Le régime transitoire est très important à connaître parce que :

- ❖ Un régime transitoire trop peu amorti est en outre gênant parce que l'écart prend des valeurs instantanées importantes.
- ❖ Si le transitoire est trop lent, c'est que le système met trop de temps pour s'adapter à son entrée.

De ce fait schématiquement, il est désirable que le régime transitoire d'un système soit :

- Bien amorti
- Assez rapide

- Amortissement

On caractérise le degré d'amortissement d'un transitoire  $s(t)$  par les dépassements successifs de la réponse unitaire. On considère surtout le premier dépassement qui est représenté par la figure 15.

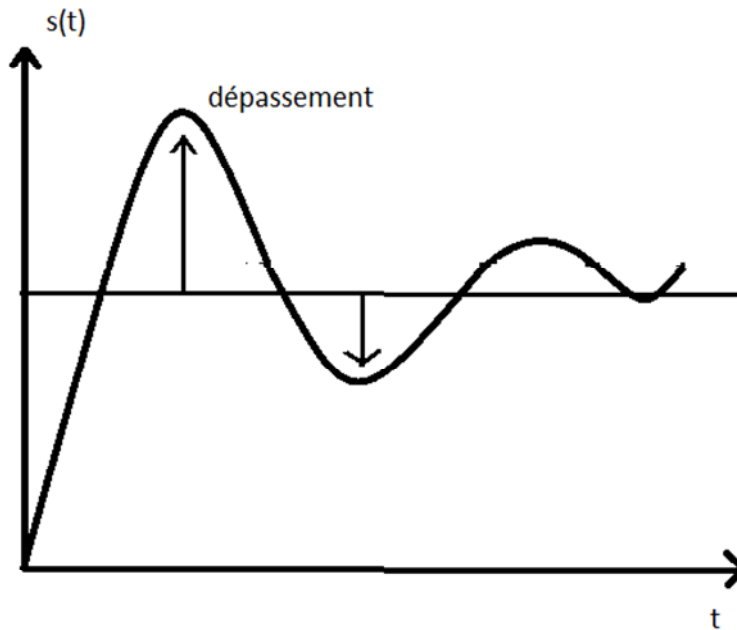


Figure15. Les dépassements caractérisent l'amortissement

- Rapidité

La condition que le système soit suffisamment rapide s'exprime en stipulant que le temps de réponse soit suffisamment court. Le temps de réponse est défini comme le temps au bout duquel la réponse du système atteint à 5% près sa valeur finale pour une excitation unitaire. C'est le temps après lequel le système ne s'écarte pas de plus de  $\pm 5\%$  de son état permanent. [Figure 16]

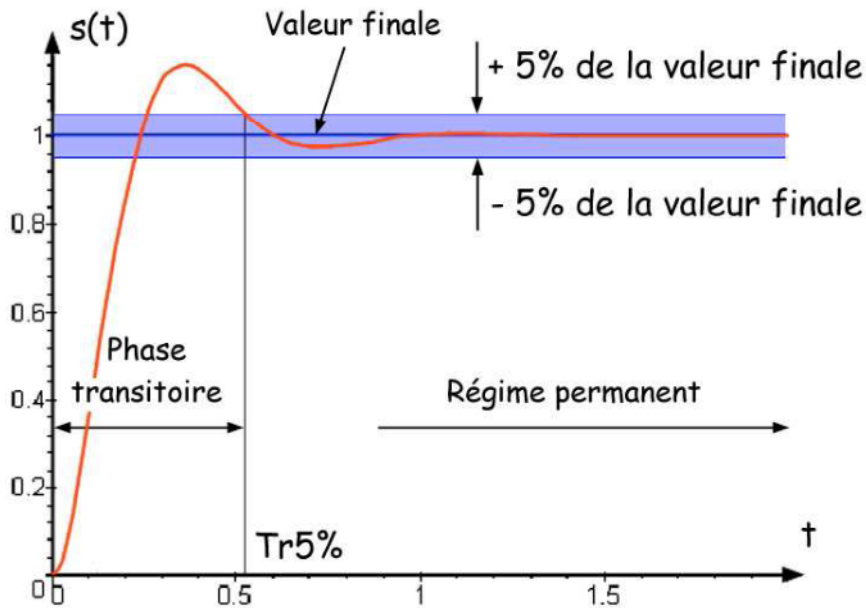


Figure 16. Evaluation du temps de réponse du système

## ii. Régime permanent

Soumis à une de l'un des quatre entrées typiques précédentes, le système finit toujours par présenter une sortie appartenant à un de ces types. On dit alors qu'il atteint son régime définitif ou permanent.

Si en régime permanent, la sortie diffère de l'entrée, on dit qu'il y a une erreur ou écart permanente, ou une erreur en régime définitif : c'est la précision du système.

La précision caractérise l'aptitude d'un système à atteindre la valeur de sortie souhaitée. L'écart entre la consigne (sortie attendue) et la sortie (sortie réelle) se caractérise donc de la manière suivante:

$$\varepsilon(t) = e(t) - s(t) \text{ et on envisage la valeur de } \varepsilon \text{ pour } t \quad (\text{régimes permanents})$$

L'écart est exprimé dans l'unité de la grandeur de sortie, ou encore en pourcent (%). On peut alors envisager l'écart à la sortie du comparateur, ce qui est équivalent. On distingue différents types d'erreur, en fonction du signal d'entrée.

Dans le cas de l'échelon on a l'erreur statique et dans le cas de la rampe on a l'erreur de trainage.

- Stabilité

Un système est stable si à une entrée bornée correspond une sortie bornée.

Un système réel instable oscille jusqu'à la destruction, ces oscillations peuvent dans le cas général être limitées par les différentes saturations et laisser croire que la sortie du système est bornée, le système ne peut plus être considéré comme linéaire.

La condition fondamentale de stabilité d'un système est que les pôles de sa fonction de transfert avec leur partie réelle négative c'est-à-dire soient situés dans le demi-plan complexe gauche, si au moins un des pôles a sa partie réelle positive, c'est-à-dire situé à droite, il y a instabilité. [Figure 17]

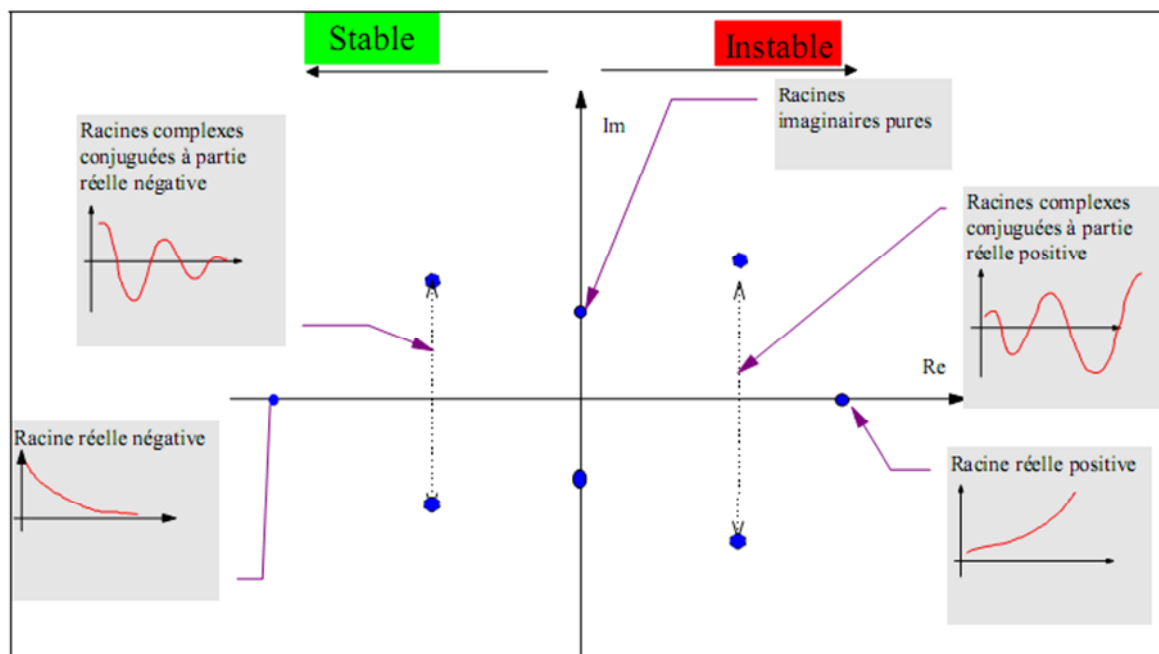


Figure 17. Stabilité du système en fonction des pôles

Etudier la réponse libre d'un système, revient à écarter le système de sa position d'équilibre et à analyser sa réponse. Un système stable a tendance à revenir dans sa position d'équilibre, un système instable a tendance à s'en écarter, un système qui ne revient pas dans sa position d'équilibre mais ne s'en écarte pas est dit juste instable.

◆ Condition de stabilité

Un système est stable si sa transmittance  $H(p)$  n'a que des pôles à partie réelle négative, c'est-à-dire situés dans la moitié gauche du plan complexe.

$$H(p) = K \frac{(p - z_1)(p - z_2) \dots (p - z_n)}{(p - p_1)(p - p_2) \dots (p - p_m)} \quad (26)$$

Les racines  $z_i$  du numérateur sont réelles ou complexes conjuguées et s'appellent des zéros

Les racines  $p_i$  du dénominateur sont réelles ou complexes conjuguées et s'appellent des pôles

La transmittance du système est entièrement déterminée par la constante  $K$ , les zéros  $z_i$  et les pôles  $p_i$ .

#### 1.4. Analyses de la dynamique des systèmes invariants linéaires élémentaires

##### a. Système du premier ordre

###### i. Définition

On appelle système du premier ordre, tout système régi par une équation différentielle linéaire à coefficients constants du premier ordre selon l'équation (3).

###### ii. Fonction de transfert

En appliquant la transformation de Laplace à l'équation 3, on obtient:

$$\tau \cdot pS(p) + S(p) = K \cdot E(p) \quad (27)$$

Où  $E(p)$  et  $S(p)$  sont respectivement la transformé de Laplace de  $e(t)$  et  $s(t)$ .

La fonction de transfert est défini par:

$$H(p) = \frac{K}{1 + \tau \cdot p} \quad (28)$$

où  $\tau$  : constante de temps et  $p$  : paramètre de Laplace

###### iii. Schéma bloc

Le schéma bloc d'un système du premier ordre est de la forme suivante.

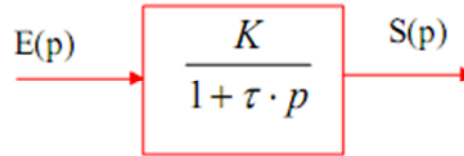


Figure 18. Schéma bloc système du premier ordre

#### iv. Etude temporelle

- Réponse à un échelon

Pour toutes les réponses indicielles à un échelon [figure 19], on définit :

Régime permanent

$$s_p(t) = s(t) \quad \forall t \gg t_r \quad (s_p(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} s(t))$$

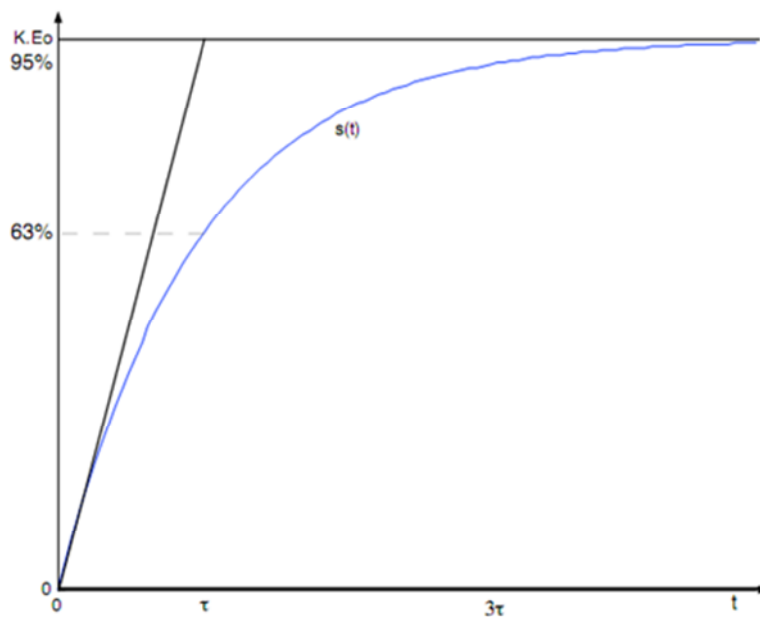


Figure 19. Réponse à un échelon d'un système du premier ordre

Sur son tracé ci-dessus, on peut noter :

$$- s(\tau) = 0,632 K E_0$$

$$- \lim_{t \rightarrow \infty} s(t) = K E_0$$



- la tangente à l'origine a une pente de  $\frac{K.E_0}{\tau}$

- temps de réponse à 5%  $\approx 3\tau$

- Réponse à une rampe

L'entrée est une rampe de pente  $a$  :  $e(t) = a.t.u(t)$ .

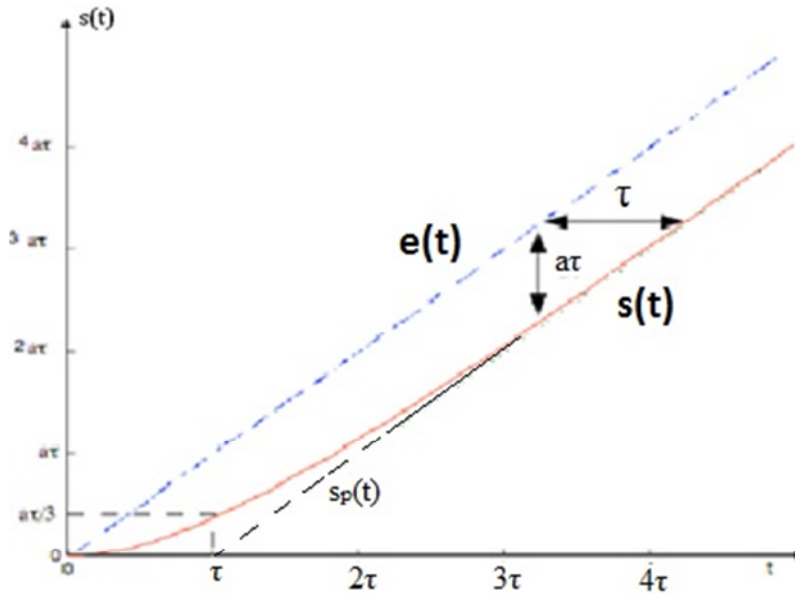


Figure 20. Réponse à une rampe d'un système du premier ordre

Les caractéristiques de cette réponse sont :

-régime permanent est  $s_p(t) = K.a.(t - \tau)$  (29)

-si  $K=1$ , la sortie  $s(t)$  suit l'entrée avec un retard constant

-si  $K \neq 1$ ,  $s_p(t)$  et  $e(t)$  n'ont pas la même pente. Ils divergent

- Réponse à une impulsion

L'entrée est donnée par

$$e(t) = E_0.\delta(t).$$

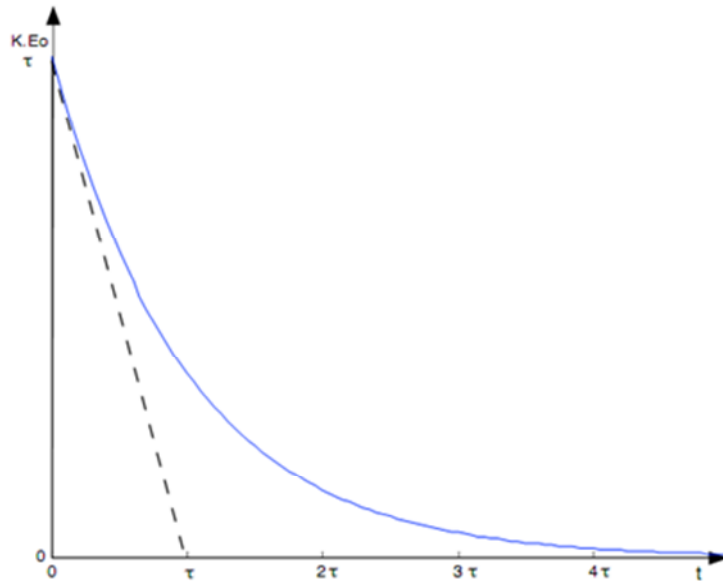


Figure 21. Réponse à une impulsion d'un système du premier ordre

#### b. Système du second ordre

##### i. Définition

On appelle système du second ordre tout système régi par une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants selon l'équation (5)

##### ii. Fonction de transfert

Si les conditions initiales sont :

$$s(0)=0$$

$$\text{et } s'(0)=0,$$

après avoir appliqué la transformé de Laplace sur (5) on obtient les résultats suivants :

$$\frac{1}{\omega_n^2} p^2 S(p) + \frac{2z}{\omega_n} p S(p) + S(p) = K.E(p) \quad (30)$$

$$\left( \frac{1}{\omega_n^2} p^2 + \frac{2z}{\omega_n} p + 1 \right) S(p) = K.E(p) \quad (31)$$

donc la fonction de transfert est:

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{K}{\frac{1}{\omega_n^2} p^2 + \frac{2z}{\omega_n} p + 1} \quad (32)$$

### iii. Schéma bloc

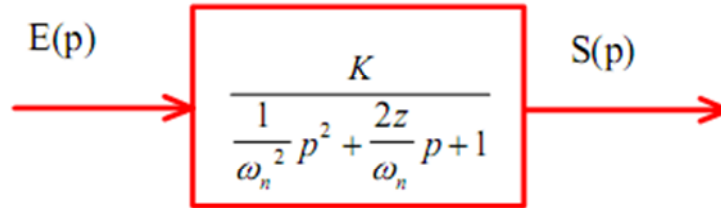


Figure 22. Schéma bloc système du second ordre

### iv. Etude temporelle

La fonction de transfert du système est de la forme :

$$H(p) = \frac{K}{\frac{p^2}{\omega_n^2} + \frac{2zp}{\omega_n} + 1} \quad (33)$$

Avec K : gain statique du système

$\omega_n$  : pulsation naturelle

$z$  = coefficient d'amortissement

- Réponse à un échelon

◆ Pour  $z > 1$

On parle de système à fort amortissement représenté par la figure 23. Les deux pôles réels  $p_1$  et  $p_2$  donnent une réponse qui sera la somme de deux exponentielles. Pour une entrée

$$e(t) = E_0 u(t) \rightarrow E(p) = E_0 p,$$

la sortie est donnée par :

$$H(p) = \frac{K E_0 \omega_n^2}{(p - p_1)(p - p_2)} \quad (34)$$

$$s(t) = K E_0 \left[ 1 - \frac{\tau_1}{\tau_1 - \tau_2} e^{-\frac{t}{\tau_1}} + \frac{\tau_2}{\tau_1 - \tau_2} e^{-\frac{t}{\tau_2}} \right] u(t) \quad (35)$$

Avec  $p_1 = -\frac{1}{\tau_1}$  et  $p_2 = -\frac{1}{\tau_2}$

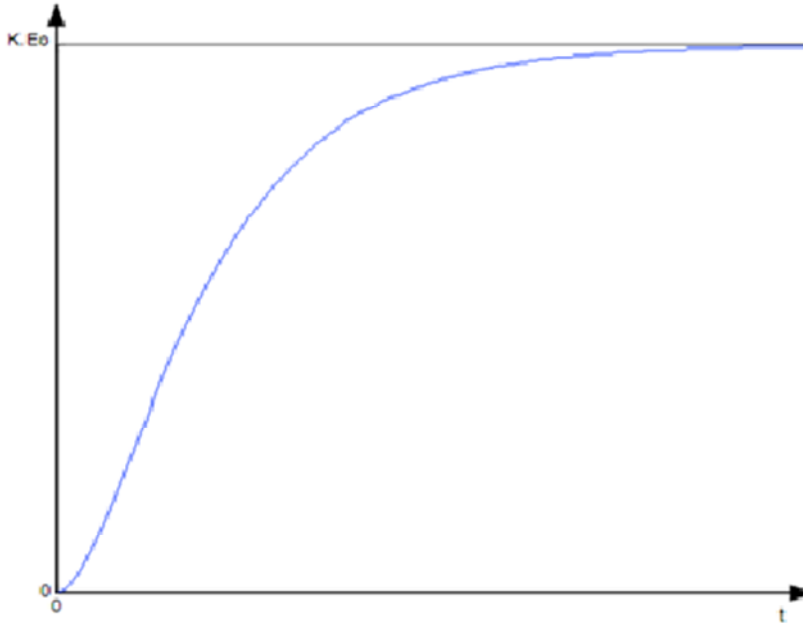


Figure 23. Réponse indicielle d'un système de second ordre à fort amortissement

Les caractéristiques de cette réponse sont :

-le régime permanent est :  $s_p(t) = K.E_0$

-à l'origine, la tangente est horizontale

◆ Pour  $z=1$

Par rapport au cas précédent, les pôles sont confondus.

$$H(p) = \frac{K \omega_n^2}{(p + \omega_n)^2}, \quad (36)$$

$$s(t) = K E_0 \left[ 1 - (1 + \omega_n t) e^{-\frac{t}{\tau_n}} \right] u(t) \quad (37)$$

La courbe de réponse ressemble à la courbe obtenue au paragraphe précédent, mais la croissance est plus rapide.

◆ Pour  $z < 1$

On parle de système à faible amortissement [figure 24]. Les pôles sont complexes conjugués. La réponse temporelle est :

$$s(t) = K E_0 \left[ 1 - \frac{1}{\sqrt{1-z^2}} e^{-z\omega_n t} \sin(\omega_n \sqrt{1-z^2} t + \varphi) \right] \quad (38)$$

$$\text{avec } \tan \varphi = \frac{\sqrt{1-z^2}}{z} \quad (39)$$

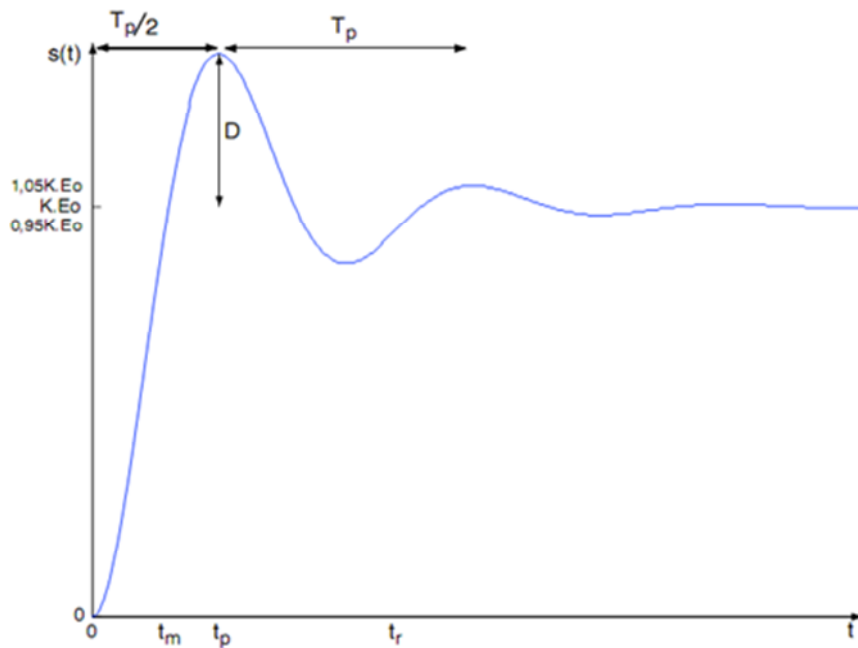


Figure 24. Réponse indicielle d'un système du second ordre à faible amortissement

Les caractéristiques de cette réponse sont :

- régime permanent  $s_p(t) = K.E_0$
- à l'origine, la tangente est horizontale
- pulsation propre amortie :  $\omega_p = \omega_n \sqrt{1-z^2}$
- Pseudo-période des oscillations :  $T_p = \frac{2\pi}{\omega_p}$

◆ Réponse à une rampe [figure 25]

L'entrée est une rampe de pente  $a$ . On en déduit la sortie :

$$H(p) = \frac{Ka}{(p^2 + 2z\omega_n p + \omega_n^2)}$$

$$\text{Pour } z > 1 \quad s(t) = K a \left[ t - \tau_1 - \tau_2 + \frac{\tau_1^2}{\tau_1 - \tau_2} e^{-\frac{t}{\tau_1}} - \frac{\tau_2^2}{\tau_1 - \tau_2} e^{-\frac{t}{\tau_2}} \right]$$

$$\text{Pour } z < 1 \quad s(t) = K a \left[ t - \frac{2z}{\omega_n} + \frac{e^{-\frac{z t}{\tau_n}}}{\omega_p} \sin(\omega_p t - \psi) \right] \text{ avec } \psi = -2 \arctan \frac{\sqrt{1-z^2}}{z}$$

Dans les deux cas, le regime stationnaire est une droite de pente K a.

Dans le cas  $z < 1$ , le regime transitoire est oscillant

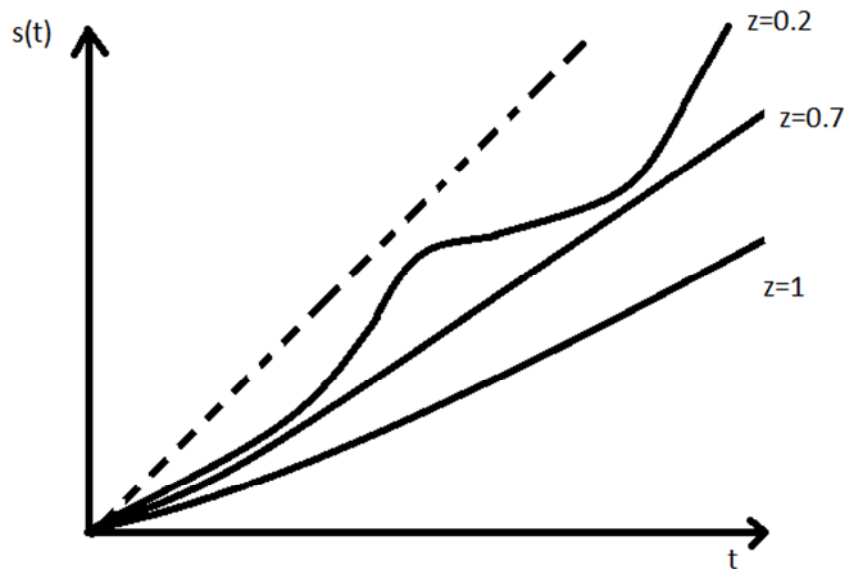


Figure 25. Réponse des systèmes du second ordre à une rampe

### Conclusion

Les équations différentielles à coefficient constant et avec second membre du premier ordre et du second ordre permet de modéliser les systèmes invariants élémentaires. Cette modélisation permet de faciliter la compréhension de l'évolution de la performance du système. Pour comprendre l'évolution du système ; on fait des simulations afin d'évaluer la performance. L'étude des systèmes linéaires a pour objectif principale d'évaluer et de juger

les performances d'un système. Pour cela, on est conduit à déterminer la réponse aux entrées typiques. Pour les signaux non sinusoïdaux tels que l'échelon, la rampe et l'impulsion on fait une analyse temporelle ; dans le cas du signal harmonique on peut choisir entre l'analyse temporelle et fréquentielle mais en règle générale le signal harmonique est typique d'une analyse fréquentielle. Les performances d'un système se juge par la qualité de leur régime transitoire tel l'évaluation de la rapidité et l'amortissement et de leur régime définitif ou permanent. Lors de l'analyse des systèmes linéaires, il est commode de représenter les systèmes sous formes d'un ensemble d'éléments dont les propriétés dynamiques peuvent être décrites par des équations différentielles ordinaires à coefficients constants.

*Deuxième partie :*  
*conception — élaboration —*  
*présentation de 'MIRA'*



## II. Conception-élaboration-présentation de 'MIRA'

Un logiciel ou une application est un ensemble de programme qui permet à un ordinateur ou à un système informatique d'assumer une tâche. Un logiciel est composé d'un ou plusieurs fichiers tels que les programmes, les scripts, les fichiers de configuration, les fichiers de données ou des documents électroniques. Les programmes contiennent des suites d'instructions en groupe appelé fonctions. Ces programmes sont écrits à partir de ce qu'on appelle langage. Notre logiciel 'MIRA' a été conçu à l'aide de MATLAB/SIMULINK pour étudier les équations différentielles à coefficients constants et avec second membre. Ces équations sont utiles puisque c'est à partir de ces derniers qu'on connaît le comportement des systèmes linéaires. Dans ce chapitre, nous allons parler du logiciel, son utilisation et sa particularité. Nous allons d'abord entamer la présentation du logiciel, ensuite sa conception et après son domaine d'application et enfin nous allons voir ses avantages et ses limites.

### *II.1. Choix du titre*

Rendre concret ce qui est abstrait, l'enseignement à tendance théorique de la physique fait qu'il est difficile de comprendre cette matière. 'MIRA' est un logiciel conçu pour traiter les systèmes invariants linéaires élémentaires. Dans la mesure où ces systèmes sont régies par des équations différentielles linéaires à coefficients constants et que le logiciel est d'origine 'malagasy' ; on a opté pour un terme malgache.

MIRA veut dire égalité. Dans l'étude des systèmes invariants linéaires, il y a une égalité entre le premier membre qui est l'équation différentielle et le second membre qui est l'équation de l'entrée. En malagasy ; équation différentielle veut dire 'fampimirana mielana'.

MIRA prend tout son sens dans la mesure où ce n'est pas seulement l'équation ici qui est mise en valeur ; il y a aussi le concept de conciliation de l'abstrait et du concret ; une équation est un modèle numérique alors que la solution obtenue à l'aide de mira est un modèle graphique. Il n'y a pas plus concret que le graphique pour décrire un phénomène. C'est cette conciliation qui a donné 'MIRA'.

## II.2. Présentation de MATALB SIMULINK

[13]

MATLAB est une abréviation de 'MATrixLABoratory' et le programme est écrit par C. Moler. La version actuelle écrite en C par 'the mathworks Inc.' existe en version professionnelle et en version étudiant. MATLAB est compatible avec DOS, WINDOWS, LINUX et même Mac OS.

MATLAB est un environnement puissant, complet et facile à utiliser, destiné au calcul scientifique. Il apporte aux ingénieurs, chercheurs et à tout scientifique un système interactif intégrant calcul numérique et visualisation. C'est un environnement performant, ouvert et programmable qui permet de remarquable gain de productivité et de créativité.

L'approche ouverte de MATLAB permet de construire un outil sur mesure qu'on a exploité d'ailleurs. On peut inspecter le code source et les algorithmes des bibliothèques de fonctions, modifier les fonctions existants et ajouter d'autres.

MATLAB fait également partie d'un ensemble d'outil intégré dédié au traitement de signal. En complément du noyau de calcul MATLAB, l'environnement comprend des modules optionnels qui sont parfaitement intégrés à l'ensemble :

- 1) Une vaste gamme de bibliothèque de fonctions spécialisées
- 2) SIMULINK, un environnement puissant de modélisation basée sur le schéma bloc et de simulation de système dynamique linéaire et non linéaire
- 3) Des bibliothèques de blocs SIMULINK spécialisés
- 4) D'autres modules dont un compilateur, un générateur de code C, un accélérateur.

MATLAB permet le travail interactif soit en mode commande, soit en mode programmation ; tout en ayant toujours la possibilité de faire des visualisations graphiques. Considéré comme un des meilleurs langages de programmation, MATLAB possède les particularités suivantes par rapport à ces langages :

- Programmation facile
- Gamme étendue de nombre et leur précision
- La bibliothèque mathématique complète
- L'outil graphique qui inclut les fonctions d'interface graphique et les

utilitaires

➤ Possibilité de liaison avec les autres langages classique de programmation

A cause de tous ces avantages, nous avons choisi d'utiliser MATLAB R2011a ou 7.12.0 pour sa performance sa rapidité et sa précision. L'interface de MATLAB R2011a est selon la figure 26.

### II.3. Elaboration de 'MIRA'

[14]

L'intérêt de ce logiciel est de faciliter l'analyse des systèmes invariants linéaires. Puisque MATLAB possède une large gamme de bibliothèques alors autant les exploiter. On va faire une analyse temporelle et fréquentielle des systèmes dynamiques linéaires élémentaires.

Pour faciliter la conceptualisation du logiciel on l'a modélisé à l'aide de SIMULINK par le biais des schémas bloc selon la figure 27. :

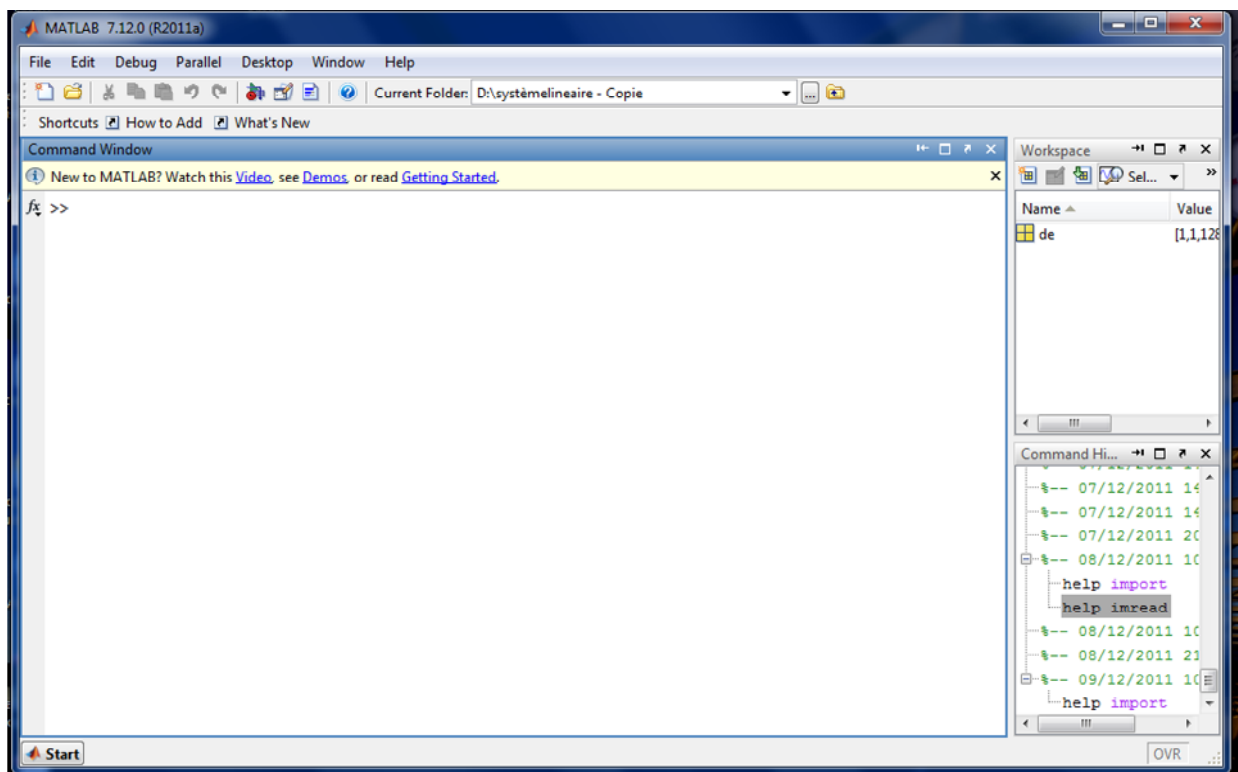


Figure 26. Fenêtre MATLAB/SIMULINK R2011a

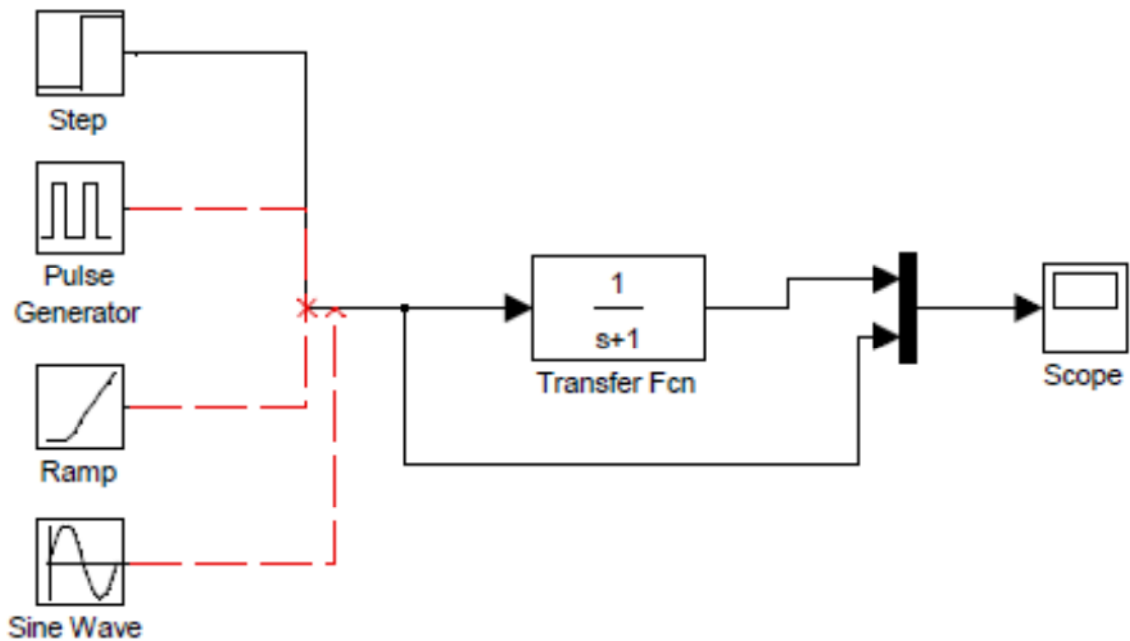


Figure 27. Représentation du projet [SIMULINK]

Pour faire l'étude d'un système linéaire, il nous faut une entrée et une sortie. Notre entrée est de quatre sortes : pour l'étude temporelle on a l'échelon ou 'step', l'impulsion ou 'pulse generator' et la rampe ou 'ramp' pour l'analyse fréquentielle on a le signal sinusoïdale ou 'sine wave'.

En fait, on fait varier les entrées, c'est à dire qu'on choisit une entrée pour voir sa sortie. Selon la figure 28, on fait la simulation sous l'échelon dans ce cas de figure ; on procède de la même manière pour les autres entrées.

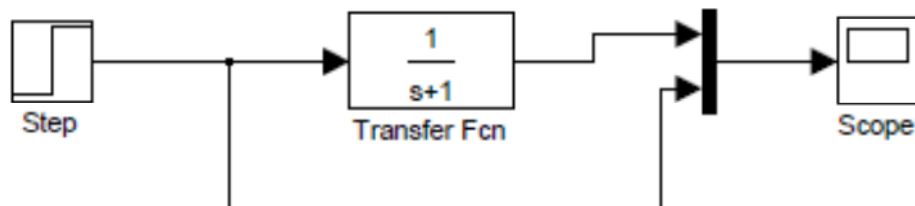


Figure 28. Représentation de l'enchaînement [SIMULINK]

En réalité la fonction de transfert sera remplacée par le système proprement dite ou

son équation différentielle et l'oscilloscope sera remplacé par 'MIRA'.

De ce fait, nous avons conçu notre logiciel comme représenté à la figure 29 :

Le principe est basé sur l'étude de deux équations différentielles :

$$\text{➤ Equation du premier ordre : } ay' + by = f(x) \quad (40)$$

$$\text{➤ Equation du second ordre : } ay'' + by' + cy = f(x) \quad (41)$$

L'analyse de ces deux équations différentielles nous permet de connaître le comportement des systèmes du premier ordre et du second ordre à l'aide de graphe de fluence des signaux.

Pour mieux comprendre le comportement du système on va aussi visualiser les différents graphes des signaux s'entrée. On va donc voir simultanément deux graphes, les graphes de la solution de l'équation différentielle et de l'équation d'entrée dans deux axes différents.

#### II.4. Présentation de MIRA

Dans cette partie, nous allons présenter les différents caractéristiques de 'MIRA'. Nous avons créé deux versions de 'MIRA', l'un qui fonctionne à l'aide de MATLAB/SIMULINK ; c'est-à-dire que ce logiciel fonctionne avec un ordinateur contenant MATLAB et l'autre fonctionne sans MATLAB, c'est-à-dire que c'est une application qu'on peut installer sous WINDOWS.

##### a. Fiche technique de 'MIRA'

Tableau 2. Fiche technique de 'MIRA'

NOM	MIRA
Version	1.0
Taille	3.0 Mo
Système compatible	WINDOWS 64 et 32 bits LINUX Mac OS
Date de sortie	
Langue	français

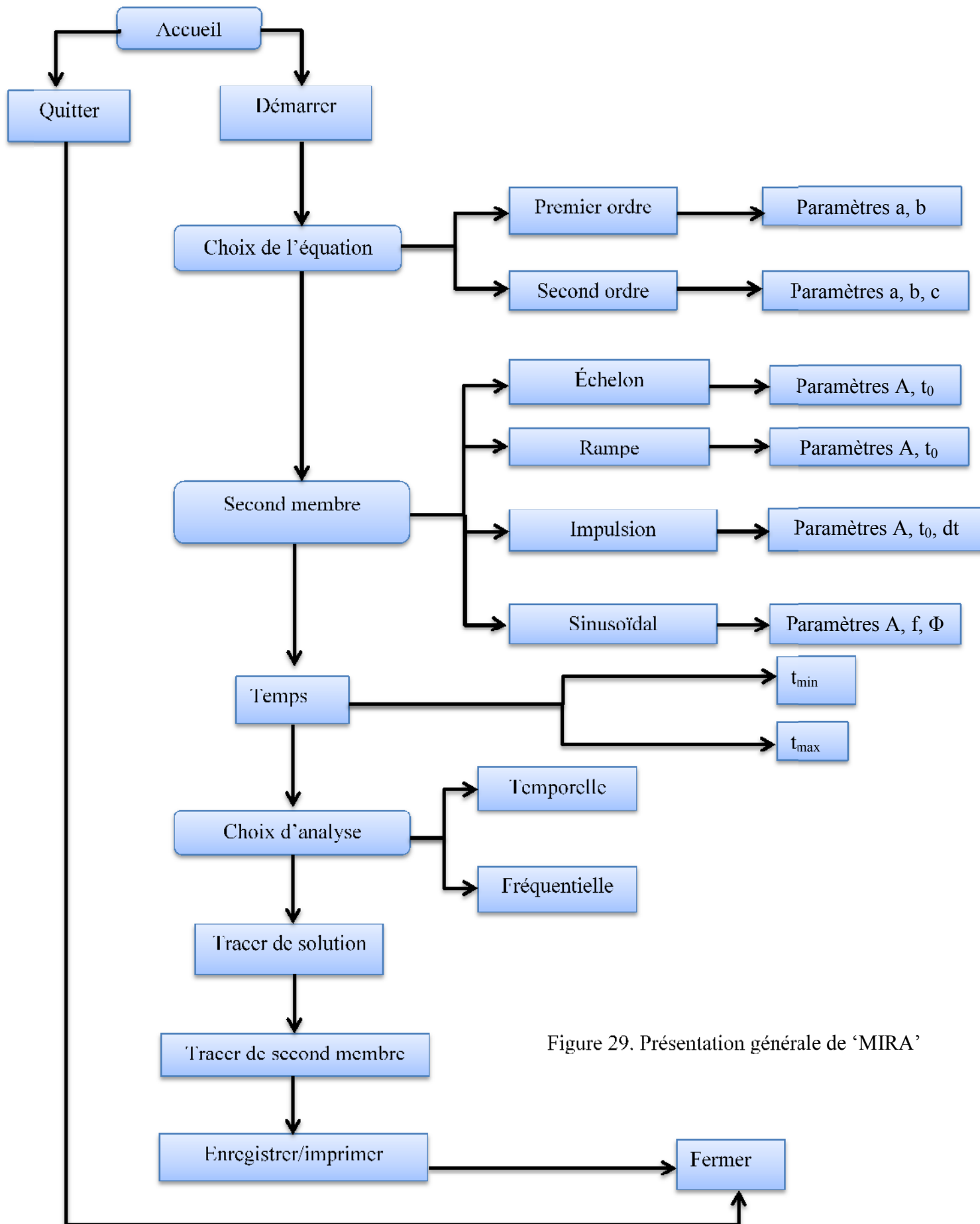


Figure 29. Présentation générale de 'MIRA'

b. Présentation des interfaces

Nous avons créé un logiciel capable d'étudier les équations différentielles élémentaires. Ce logiciel se divise en deux parties distinctes :

- l'accueil
- l'interface de travail proprement dite

i. Accueil

Quand on exécute le logiciel, on aboutit à l'accueil [figure 30] du logiciel ; pour pouvoir commencer, on appuie sur démarrer et on aboutit à l'interface de travail proprement dite.



Figure 30. Accueil 'MIRA'

## ii. Interface de travail proprement dite

Après avoir appuyé sur le menu démarrer, nous aboutissons à l'interface de travail selon la figure 31 qui est divisé en plusieurs sections :

- ❖ la barre de titre
- ❖ la barre de menu
- ❖ la fenêtre de travail

Selon la figure 31 on observe dans :

- la barre de titre :

Se situant en haut de l'interface et où est inscrit le titre du logiciel, sert juste à repérer qu'on est vraiment dans l'interface de travail.

- la barre de menu

Dans la barre de menu, se trouvant juste après la barre de titre, on voit trois menus soit fichier, démo et présentation.

- ◆ fichier

Quand on appuie sur 'fichier' [figure 32] on observe que plusieurs taches sont disponibles tel que :

### 1. 'réinitialiser'

Servant à réinitialiser le logiciel. Il est à remarquer que la réinitialisation du logiciel permet de rétablir le logiciel à son état initial ;



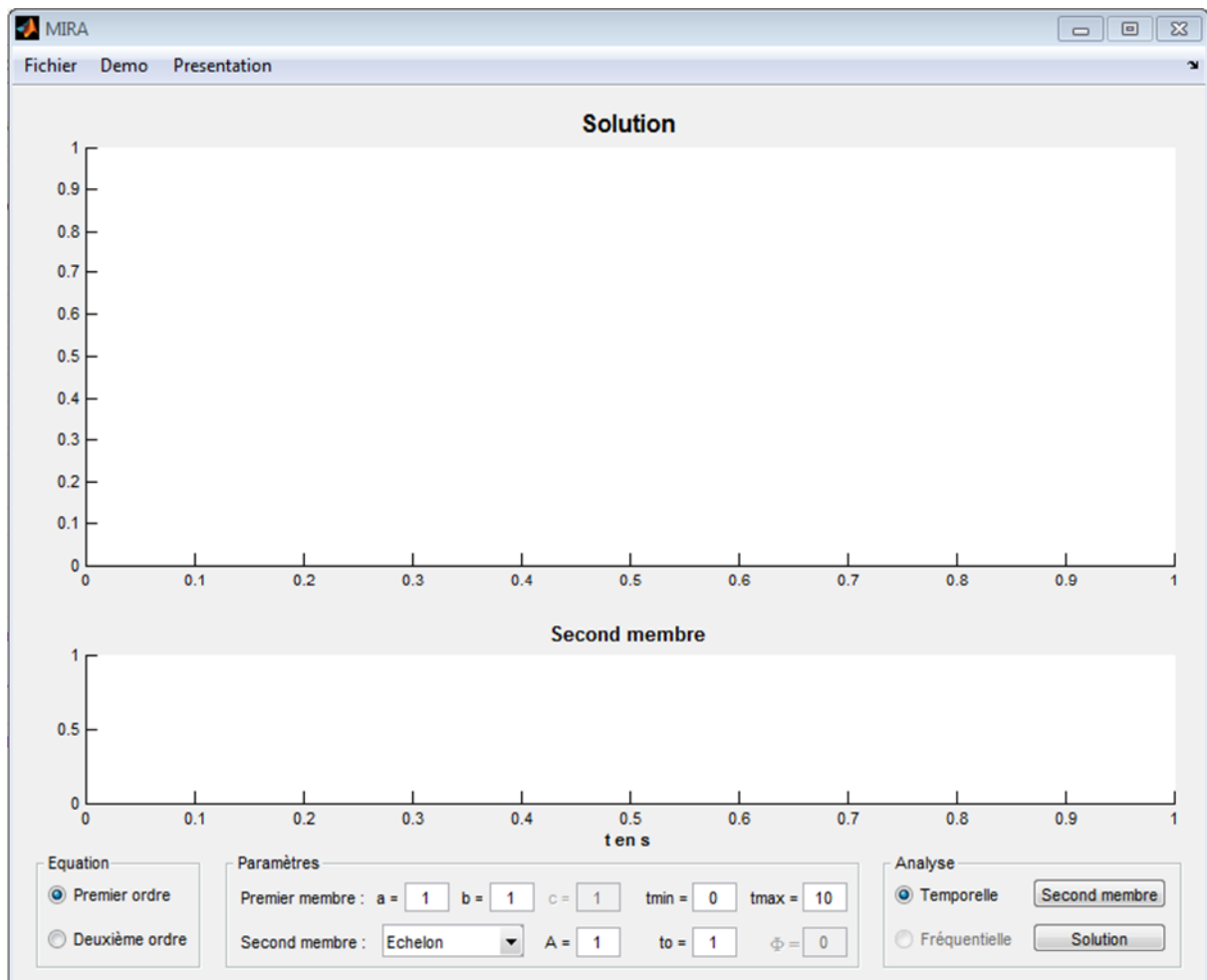


Figure 31. Interface de travail

## 2. 'enregistrer'

Permet d'enregistrer le fichier selon l'emplacement de votre choix. Il est à noter que quand vous enregistrer votre fichier, ce fichier en question sera enregistrer sous forme d'image comme un capture d'écran, ce qui veut dire que l'intégralité de la fenêtre sera enregistrer. De ce fait, quand vous enregistrer votre fichier, il est nécessaire de préciser l'extension du fichier en tant qu'image par exemple tiff (tagged image file format), bmp (bitmap), jpeg (joint photographic expert group).

## 3. 'imprimer'

Cette tache vous permet d'imprimer directement votre fichier. Le principe est le

même que quand on enregistre, c'est-à-dire que la fenêtre toute entière sera imprimée en tant que fichier image.

#### 4. 'fermer'

Cette tâche permet de fermer le logiciel et de le quitter définitivement.

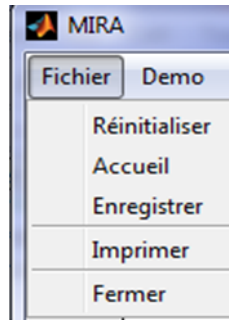


Figure 32.Barre de menu 'fichier'

#### ◆ Démo

Cette démo sert à guider l'utilisateur pour utiliser le logiciel en tant que démonstration. Il se divise en deux sous-menus bien distincts qui sont 'l'indication' et 'l'exemple'.

##### -L'indication

L'indication a pour but de juste guider l'utilisateur à employer 'MIRA'. Quand on appuie sur le sous-menu 'indication' la fenêtre indication s'ouvre selon la figure 33.

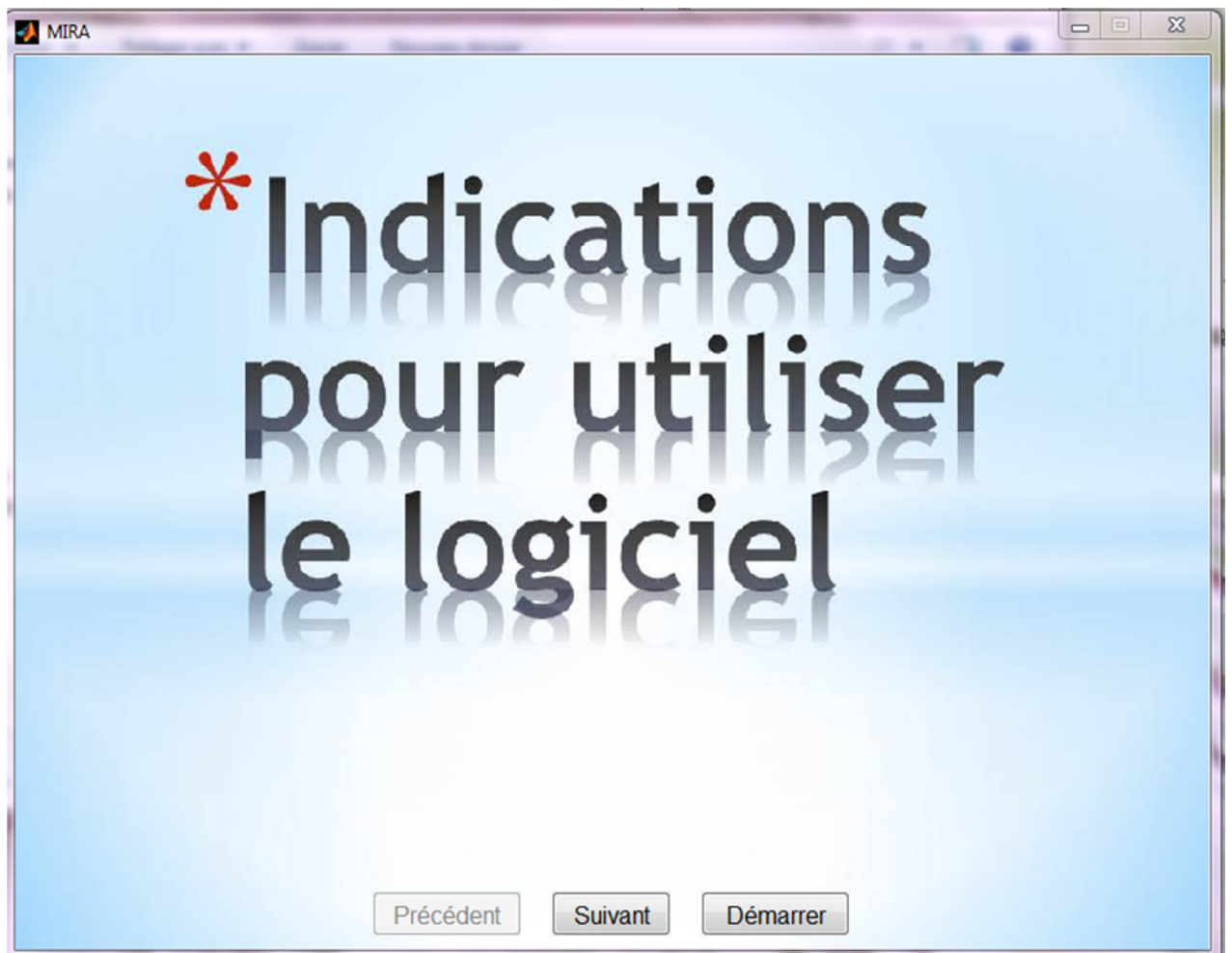


Figure 33. Fenêtre 'indication'

#### -L'exemple

Dans le cas où l'utilisateur ne comprend pas le fonctionnement de 'MIRA' à l'aide de 'l'indication' alors il peut voir 'l'exemple' et le refaire. Quand on appuie sur 'exemple' alors la fenêtre 'exemple' s'ouvre [figure 34]. Cet 'exemple' a été conçu spécialement pour les élèves qui utilisent 'MIRA'



Figure 34. Fenêtre 'exemple'

◆ Présentation

La présentation sert à présenter le principe du logiciel par le biais du schéma bloc.

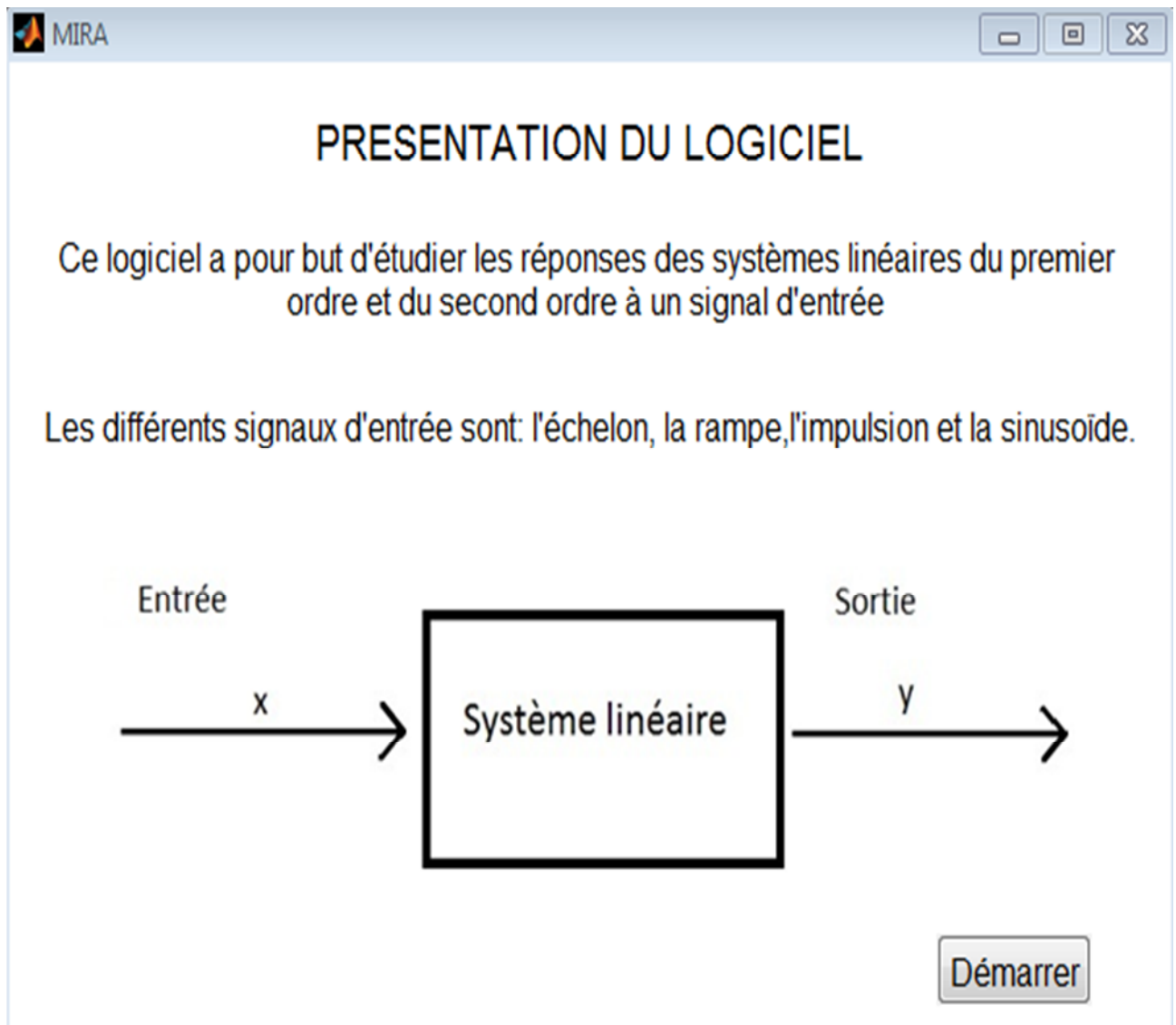


Figure 35. Fenêtre présentation

- la fenêtre de travail

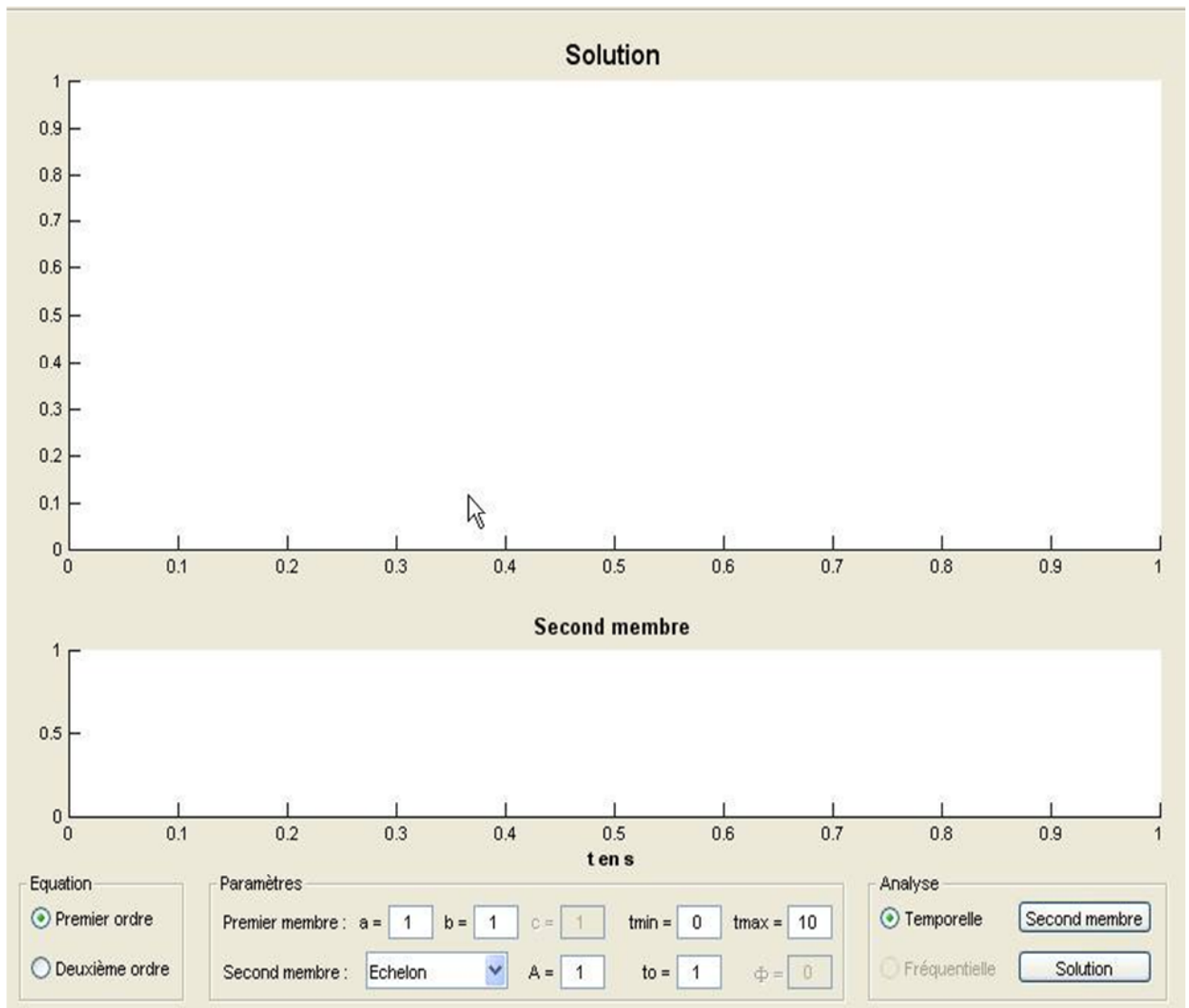


Figure 36. Fenêtre de travail

Selon la figure 36, la fenêtre de travail proprement dite se divise en deux sections :

- ❖ les axes
- ❖ les différents cadres

◆ les axes

On observe deux axes dont la première en haut sert à afficher la solution de l'équation différentielle et le deuxième axe sert à afficher le graphe du second membre.

Nous avons été obligés de séparer les deux axes puisque dans le cas où les amplitudes des deux graphes seront très différentes alors on n'aurait pas d'image claire. Il est plus pratique de séparer les figures et d'essayer de les superposer une fois imprimé.

◆ les cadres

Les cadres sont les parties la plus importante du logiciel. Ici, ils sont situés en bas de la fenêtre.

Il y a différents cadre tel :

- ❖ l'équation
- ❖ les paramètres
- ❖ l'analyse

◆ l'équation

L'équation est le cadre en bas à gauche de la page, dans ce cadre il y a deux boutons premier ordre et deuxième ordre qu'il faut choisir par l'utilisateur selon son équation.

◆ les paramètres

Tous les paramètres utilisés et requis pour l'étude d'un système ont été compressés dans un seul cadre : le cadre des paramètres. Dedans, on trouve les paramètres des équations qui sont a, b, c dont a, b pour l'équation du premier ordre et a, b et c pour l'équation du second ordre. De ce fait quand on choisit 'premier ordre', les paramètres de l'équation actif sont a et b. De la même manière, quand on choisit 'second membre' alors 'c' s'active.

Ensuite, il y a les paramètres du second membre. Ces paramètres sont adaptés selon les seconds membres alors :

- pour l'échelon le paramètre sont l'amplitude A et le temps initial  $t_0$ .

- Pour l'impulsion on a l'amplitude  $A$ , le temps initial  $t_0$  et l'écart qu'on nomme  $dt$ .
- Pour la rampe les paramètres sont les mêmes que celle de l'échelon dont  $A$  est la pente et  $t_0$  est le temps
- Pour l'entrée sinusoïdale on a l'amplitude  $A$ , la fréquence  $f$  et le déphasage  $\Phi$ .

Il est à noter que le second membre se trouve dans un menu déroulant, donc on choisit le second membre et les paramètres correspondant s'activent automatiquement.

Enfin il y a les paramètres temps qui déterminent l'intervalle de temps adapté à l'étude de votre système. Il faut seulement remarquer le fait qu'il faut que  $t_{\min}$  soit inférieur à  $t_{\max}$ .

#### ◆ l'analyse

Dans ce dernier cadrant qui se situe en bas à droite de la page on voit deux boutons radio 'temporelle' et 'fréquentielle' qu'on choisit selon l'analyse qu'on veut faire ; ensuite il faut appuyer sur le bouton 'solution' pour afficher la solution de l'équation différentielle et 'second membre' pour afficher le second membre.

Il est à noter que des messages d'erreur s'affichent quand vous entrez des paramètres non adaptés. Par exemple si vous choisissez  $t_{\min}$  supérieur à  $t_{\max}$  l'erreur est comme la figure 37.

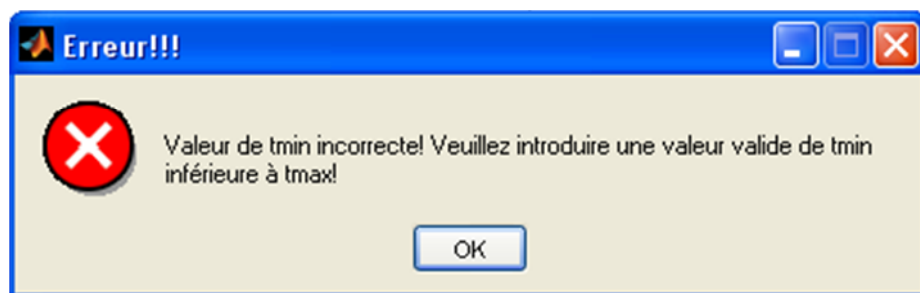


Figure 37. Message d'erreur des paramètres de temps

Ces messages d'erreur s'adaptent au différent cadre. Pour pouvoir continuer, il vous faut appuyer sur 'OK'.

Une remarque est à retenir à propos des paramètres, on n'a pas mis les conditions



initiales puisqu'on a tout de suite fixé les conditions initiale du système à :

$y(0)=0$  et  $y'(0)=0$ , c'est à dire qu'on est en face d'un système forcé du fait du programme étudié en terminale qui sont à majorité des systèmes forcés.

### II.5. Domaine d'application [15]

En réalité, on exploite l'étude des systèmes linéaires dans le domaine de l'automatique ou de l'ingénierie de système. Plus précisément dans l'étude des systèmes asservis ou l'asservissement. L'objectif d'un système automatisé étant de remplacer l'homme dans une tâche, nous allons pour établir la structure d'un système automatisé commencer par étudier le fonctionnement d'un système dans lequel l'homme est la « partie commande ». Pour résoudre un problème d'automatisme, il faut disposer d'outils de spécification et de description des fonctions et des éléments du système que l'on analyse ou que l'on conçoit.

Les systèmes étudiés créent une relation entre deux variables : l'entrée ou variable de commande et la sortie ou variable commandé. Un système de commande étant un assemblage de constituant physique branchée ou reliés les uns aux autre de telle sortes qu'il puisse se commander, se diriger ou se régler. De ce fait, ce sont des systèmes de commande qui exécutent de l'ordre puisqu'ils maintiennent la relation entre l'entrée et la sortie quelle que soit la perturbation.

Un système asservi ou asservissement est un système de commande qui possède les deux propriétés suivante :

- C'est un système de commande avec amplification de puissance
- C'est un système à retour.

En tant que systèmes de commande, tous les systèmes asservis ont pour but de réaliser l'intégralité de la commande. Un système régulé est un système asservi travaillant à entrée de commande constante ou variant par palier de réglage, destiné à réaliser l'égalité de la commande et de la sortie c'est-à-dire à maintenir la sortie constante quelles que soient les perturbations. L'aspect de sortie désiré constante se révèle dans la terminologie : l'asservissement du cap d'avion à une valeur constante s'appelle stabilisateur d'avion ; un régulateur de température un thermostat.

On fait appel à trois types de modélisation

- Modélisation mathématique, constitué d'équation différentielle,

équation au dérivé partielle

- Schéma fonctionnel
- Les graphes de fluences des signaux

La modélisation mathématique permet de représenter de façon détaillée le comportement du système

Considérons les deux exemples suivants :

#### Exemple 1 : thermomètre

L'action de la température détermine une longueur donnée de la colonne de mercure, ce qu'on représentera par un schéma analogue en figure 38.

C'est un système dans lequel la fonction qui détermine la sortie à partir de l'entrée est la relation d'étalonnage de l'instrument

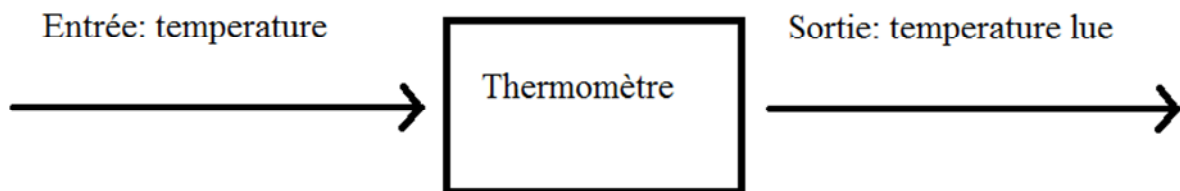


Figure 38. Schéma bloc d'un thermomètre

#### Exemple 2 : Chauffage d'une salle

Considérons le chauffage électrique d'une salle. Le système est constitué par l'ensemble chauffage + salle. La sortie de ce système est la température de la pièce. La commande du système est la position 0 ou 1 de l'interrupteur.

Les perturbations peuvent être l'ouverture d'une fenêtre, de la porte ou les rayons du soleil. En boucle ouverte, la commande est insensible à la sortie. Pour fermer la boucle de feedback ou contre-réaction, on peut utiliser un thermostat.

La commande est alors élaborée en fonction de la consigne (température souhaitée) et de la sortie (température de la pièce) [figure 39].

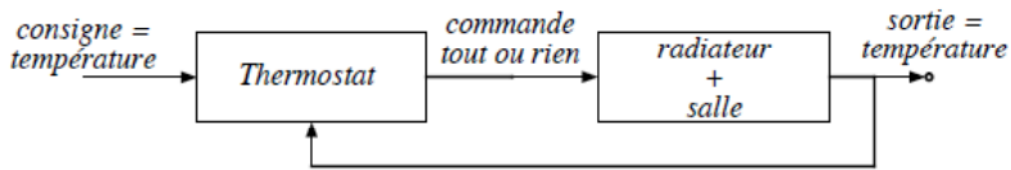


Figure39. Schéma de la régulation de la température d'une pièce

## II.6. Démarche d'utilisation

Comment utiliser 'MIRA' ?

Avant de pouvoir utiliser le logiciel, il faut faire des études préliminaires. Cette étude consiste à établir l'équation différentielle du système. Afin d'établir cette équation, il faut tout d'abord identifier le système ensuite repérer les variables du système.

En ce qui concerne l'excitation ; il vous faut le choisir et établir aussi son équation. Dans le cas de signal complexe, vous devez superposer les signaux simples afin d'y parvenir. On établit le schéma bloc pour établir l'équation différentielle en ayant comme second membre l'équation du signal de perturbation.

L'équation différentielle établie, maintenant place à la simulation. La simulation se fait avec MIRA dans le but de savoir le comportement du système vis-à-vis de la perturbation.

Premièrement, il faut démarrer 'mira' ensuite identifier l'ordre de l'équation, puis on introduit les différents paramètres de l'équation différentielle ainsi que le second membre sans oublier l'intervalle de temps. Après, on appuie sur 'solution' pour afficher la solution de l'équation différentielle et second membre pour afficher le 'second membre' ; après avoir défini le choix d'analyse. Finalement, on interprète le graphe obtenu. Toute cette procédure est illustrée selon la figure 39.

Avant de pouvoir exploiter 'MIRA', il faut d'abord comprendre son mode de fonctionnement. Pour cela, tout commence par ouvrir le 'démon' et lire les 'indications pour utiliser le logiciel'. Ensuite, vous n'avez qu'à suivre les instructions.

Il est recommandé de choisir les intervalles de temps étendus pour voir une image claire, nette et précise.

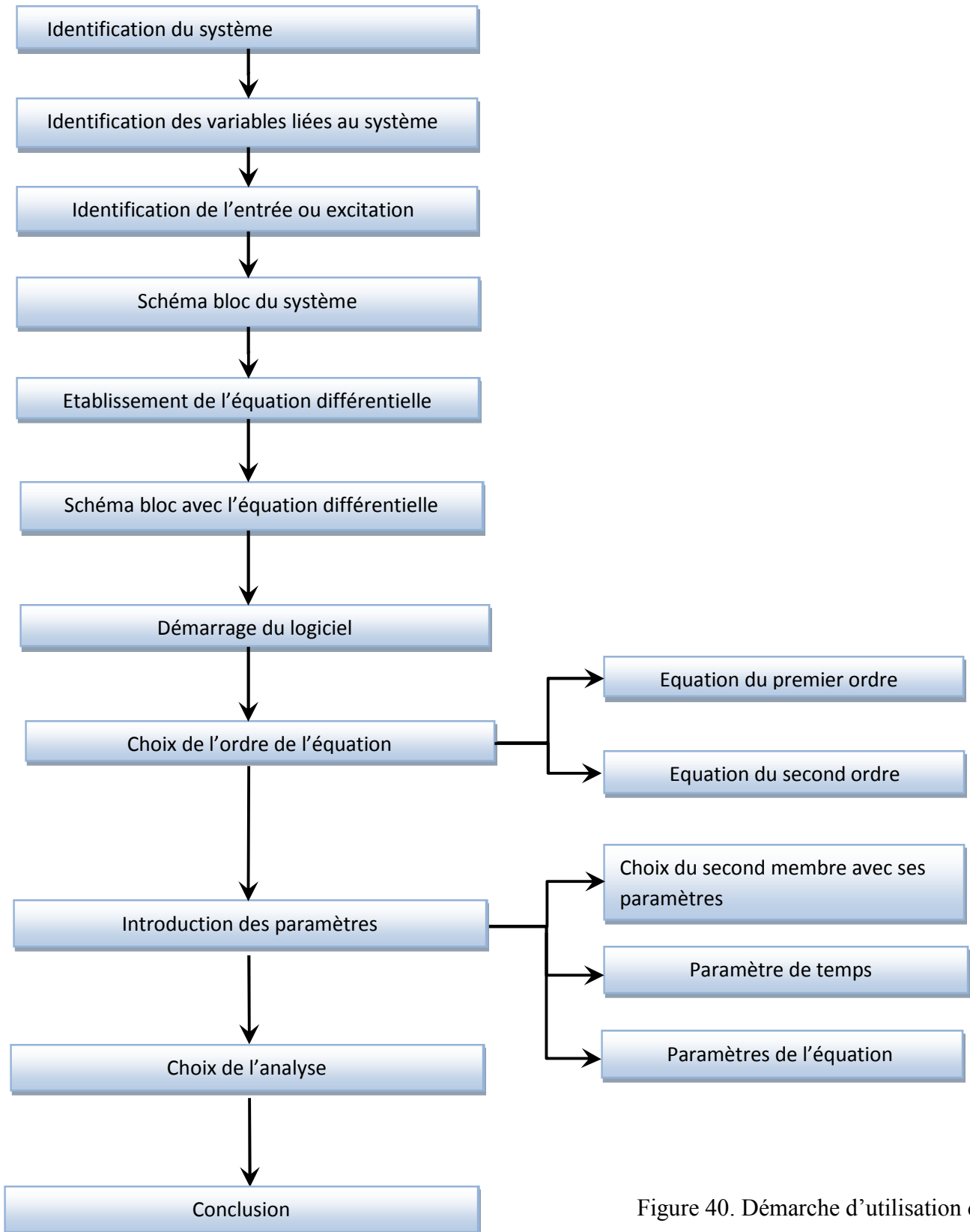


Figure 40. Démarche d'utilisation de 'MIRA'

### II.7. *Avantage du logiciel*

Aujourd'hui, la plupart des établissements scolaires souffre considérablement d'un manque de ressources que ce soient humain ou matériels. Ce manque de moyen fait que le niveau des élèves en termes de compréhension de la physique chimie est relativement bas. Etant donné que la physique chimie est une science expérimentale, l'expérience est donc indispensable pour la compréhension de la matière. La plupart des élèves croient en réalité que la physique est complètement abstraite, plus abstraite que les mathématiques. De ce fait, il est important que les élèves prennent conscience que la physique est réelle ; que c'est la matière la plus proche d'eux que d'autres. Alors, utiliser un logiciel permettant d'aider les élèves à capter la physique serait un atout pas seulement pour l'établissement vu que c'est un outil mais aussi pour le professeur et l'étudiant. MIRA est un logiciel conçu pour accroître les connaissances en physique. Si on peut ne pas voir la réalité directement, vaut mieux simuler ; mais cette simulation se doit d'être claire et proche de la réalité le plus possible et c'est le cas de notre logiciel.

Sur le point de vue application informatique, MIRA est un logiciel très malléable, léger donc il n'occupe pas vraiment le disque dur. Dans le plan du graphisme, si on observe bien l'image on constate qu'on voit une image claire, nette et précise dans son ensemble. Vu que 'MIRA' remplace l'oscilloscope la netteté et la clarté au niveau du graphisme sont des conditions sine qua none pour la compréhension du phénomène.

Du point de vu de l'économie, le fait que le logiciel soit compatible avec toutes les versions de Windows même sous réserve de présence de compilateur quelque fois ; le fait qu'il soit gratuit et disponible immédiatement est vraiment un grand gain de temps.

Du point de vu de l'enseignement, le fait d'étudier les systèmes linéaires offre une nouvelle approche pédagogique de l'enseignement de la physique. En effet, tout est focalisé sur le système et son comportement ; c'est-à-dire les différentes interactions qu'a le système avec le milieu extérieur. De ce fait, les problèmes liés à la mathématique seront considérablement réduit et la compréhension des phénomènes physique s'accroît naturellement.

En fait, l'utilisation de ce logiciel offre vraiment une nouvelle perspective dans l'enseignement de la physique et en un mot on qualifierait ce logiciel d'ergonomique vu que son but est d'accroître le rendement intellectuel de son utilisateur.

### II.8. Limite

Comme toute chose qu'on entreprend, rien n'est parfait. MIRA présente quelques défauts tel qu'on ne peut pas choisir la plage de fréquence quand on fait l'analyse fréquentielle et le fait que l'analyse est cantonnée sur les systèmes forcés fait qu'on ne peut pas choisir les conditions initiales.

Ce logiciel convient aux étudiants finissant le lycée et en préparation de cycle d'ingénieur. Au-delà il leur faut un logiciel plus performant comme MATLAB pour dorénavant modéliser leurs systèmes.

Ceci est une simulation, donc phénomène proche de la réalité il ne remplace pas la réalité mais le simule autant que possible.

### Conclusion

MIRA a été conçu pour représenter graphiquement le système invariants linéaire, représentés par les équations différentielles du premier ordre et du second ordre. D'où vient le concept, vu qu'il est plus pratique d'interpréter des graphes plutôt que de résoudre des équations. La meilleur façon de comprendre un système est de connaître son évolution que ce soit dans le temps ou autrement. A quoi sert la simulation ? La simulation sert à comprendre et à modéliser le système linéaire pour évaluer sa performance. C'est une modélisation qui dans le domaine de la recherche représente déjà cinquante pourcent du travail. Certes un modèle n'est jamais exact, mais c'est un outil de décision et de compréhension qu'on peut exploiter.

*Troisième partie :*  
*exploitation de 'MIRA' dans*  
*le domaine de l'enseignement*

### **III. Exploitation de 'MIRA' dans le domaine de l'enseignement**

L'objectif de la matière [16] :

Les sciences physique doivent amener l'élèves à :

- Pratiquer expérimentalement pour faire aboutir une recherche.
- Adopter une attitude scientifique en développant chez lui l'esprit scientifique.
- Interpréter des phénomènes naturels par les connaissances qu'elles lui apportent.
- Mieux connaître le monde technique qui nous entoure par le biais de l'analyse des réalités et l'effort pour comprendre.

Les objectifs de l'enseignement des sciences physique au lycée :

A la sortie du lycée, l'élève doit être capable de :

- Se servir du raisonnement scientifique
- Interpréter avec finesse des faits scientifiques
- Vérifier la concordance entre une prévision théorique et un résultat expérimental

Pour atteindre ces objectifs d'apprentissage, nous avons établi une méthode d'apprentissage qui a pour but de comprendre les phénomènes et les faits physiques. De ce fait, l'étude du phénomène est alors centrée au système. C'est-à-dire que toutes les études seront centrées sur le système et les interactions qu'il a avec son environnement.

#### *III.1. Méthode d'apprentissage*

Quand le système est défini, on commence l'étude de son comportement vis-à-vis de son environnement ou on essaie tout simplement de comprendre le fonctionnement du système.

Dans ce cadre, il faut déterminer tous les paramètres liés aux systèmes. Ces paramètres vont aider à établir l'équation différentielle du système. Il faut ensuite identifier la perturbation et essayer de le modéliser. Si le système est défini correctement avec ses paramètres et les perturbations alors il faut représenter le système par le biais du schéma bloc.

Ensuite, il faut appliquer les lois physiques adaptées au phénomène pour établir



l'équation différentielle.

L'étude théorique est terminée. A partir de là commence la simulation.

La simulation se fait à l'aide du logiciel 'MIRA'.

Les étapes de la simulation se font suivant la démo dans le logiciel c'est-à-dire que tout commence par le choix du type d'équation, ensuite on fait entrer les paramètres de l'équation et du second membre et enfin on choisit le type d'analyse pour faire apparaître le graphe à interpréter.

Toutefois, avant de faire la simulation, il faut d'abords passer par la démo proprement dite qui est 'l'exemple' ; la démo sert à aider l'utilisateur à comprendre le fonctionnement du logiciel.

Cette démo se divise en deux :

- Les indications pour étudier le logiciel
- Le modèle de circuit RC

On aboutit à la figure 42 quand on ouvre le 'démo', on appui sur 'exemple' et on arrive à la fenêtre 'démo' ensuite on presse sur 'suivant' et on a la figure 43

A partir de 'démo', appuyer sur suivant et on voit l'énoncé que l'apprenant va refaire

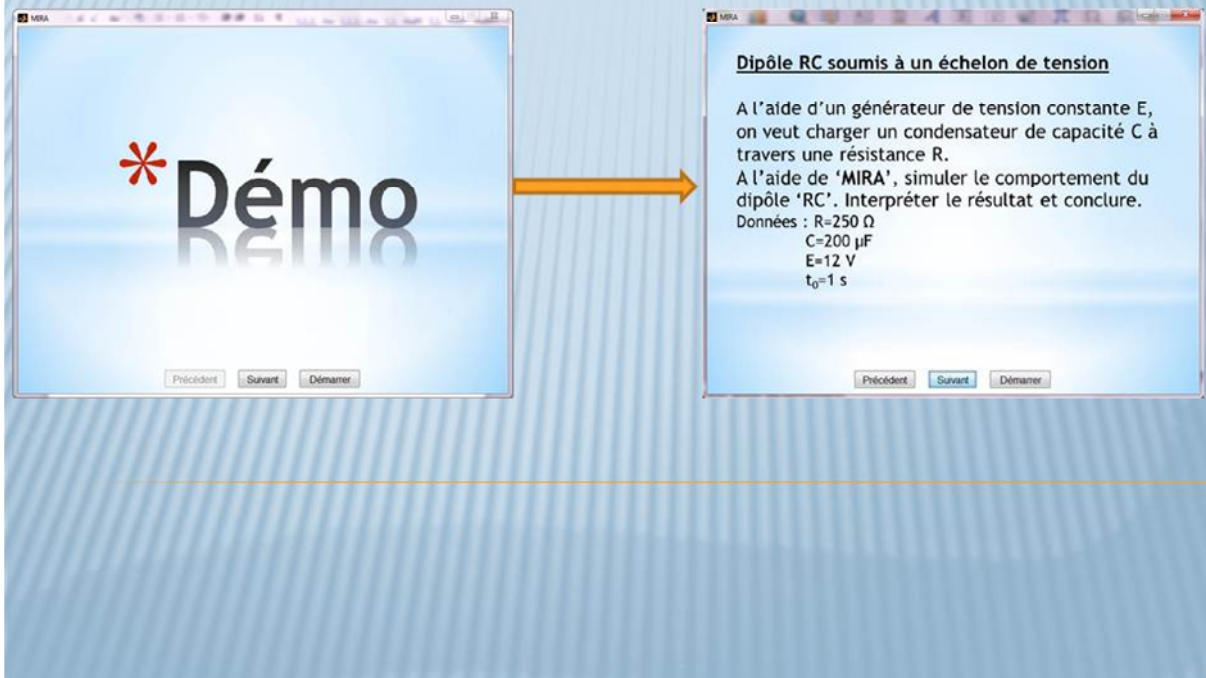


Figure 41. Exemple dans 'MIRA'

L'énoncé de l'exercice à faire est comme suit :

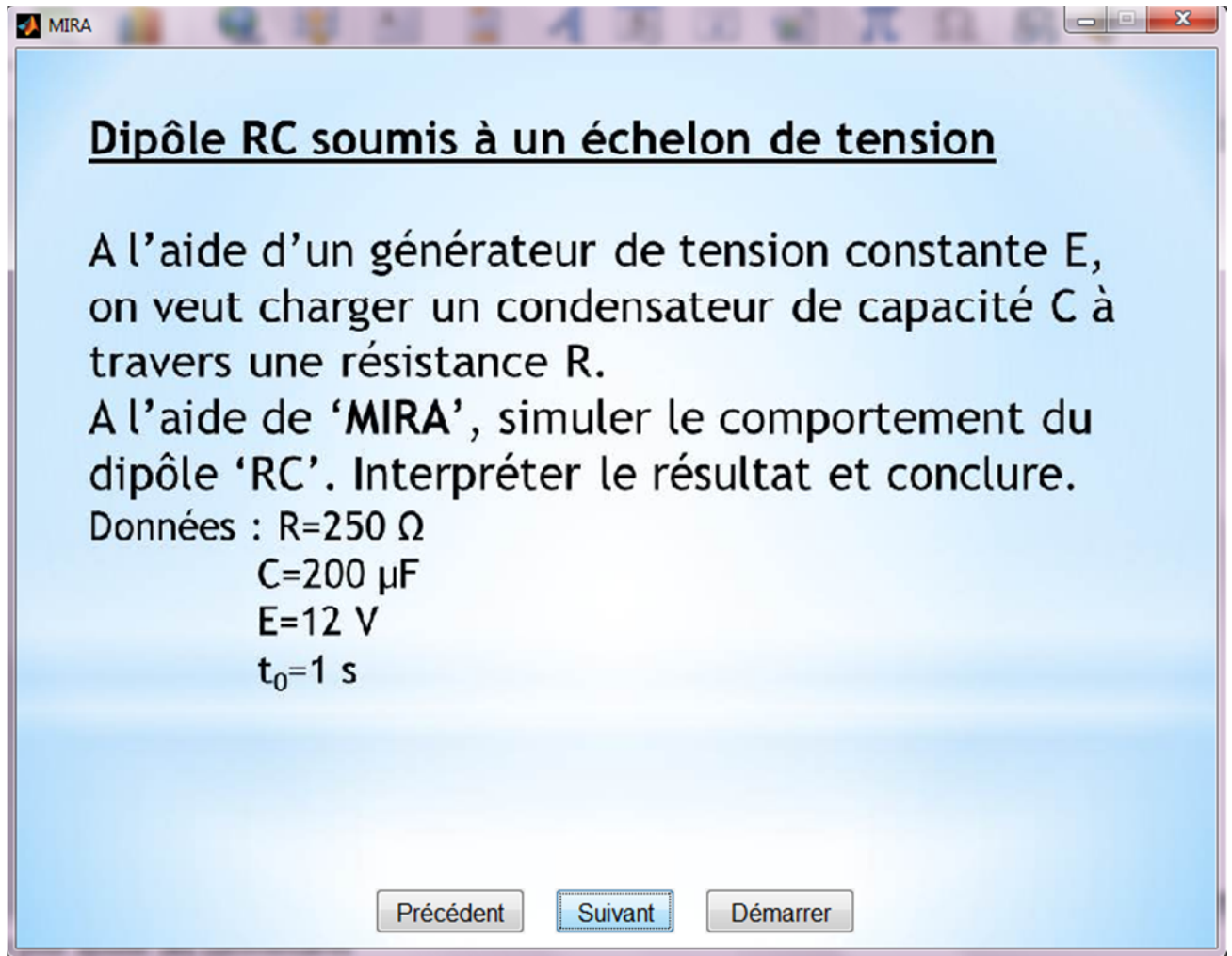
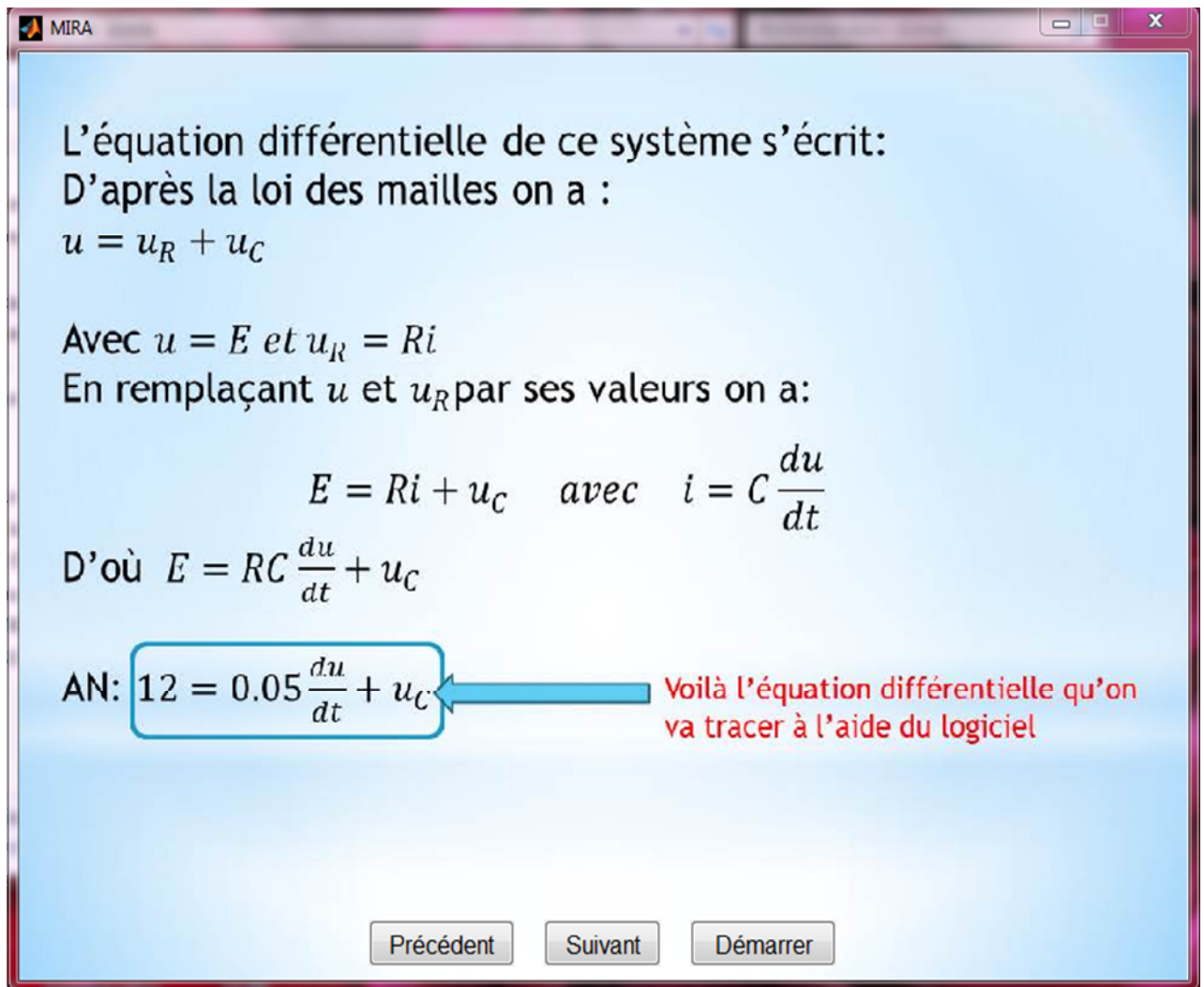


Figure 42. Énoncé de l'exercice de simulation

L'élève appui sur suivant et voit qu'il faut d'abords établir l'équation différentielle de son système. (Figure 43)

L'étape juste après la mise en équation est la simulation proprement dite. Alors l'élève va ouvrir la fenêtre de travail et s'exécuter selon la figure 44.

Tous les paramètres étant introduit, il est temps de visionner la solution de l'équation différentielle, en appuyant sur solution, on peut voir le résultat comme dans la figure 44.



L'équation différentielle de ce système s'écrit:  
D'après la loi des mailles on a :

$$u = u_R + u_C$$

Avec  $u = E$  et  $u_R = Ri$   
En remplaçant  $u$  et  $u_R$  par ses valeurs on a:

$$E = Ri + u_C \quad \text{avec} \quad i = C \frac{du}{dt}$$

D'où  $E = RC \frac{du}{dt} + u_C$

AN:  $12 = 0.05 \frac{du}{dt} + u_C$  ← Voilà l'équation différentielle qu'on va tracer à l'aide du logiciel

Précédent   Suivant   Démarrer

Figure 43. Exemple : Etude du dipôle RC soumis à un échelon de tension

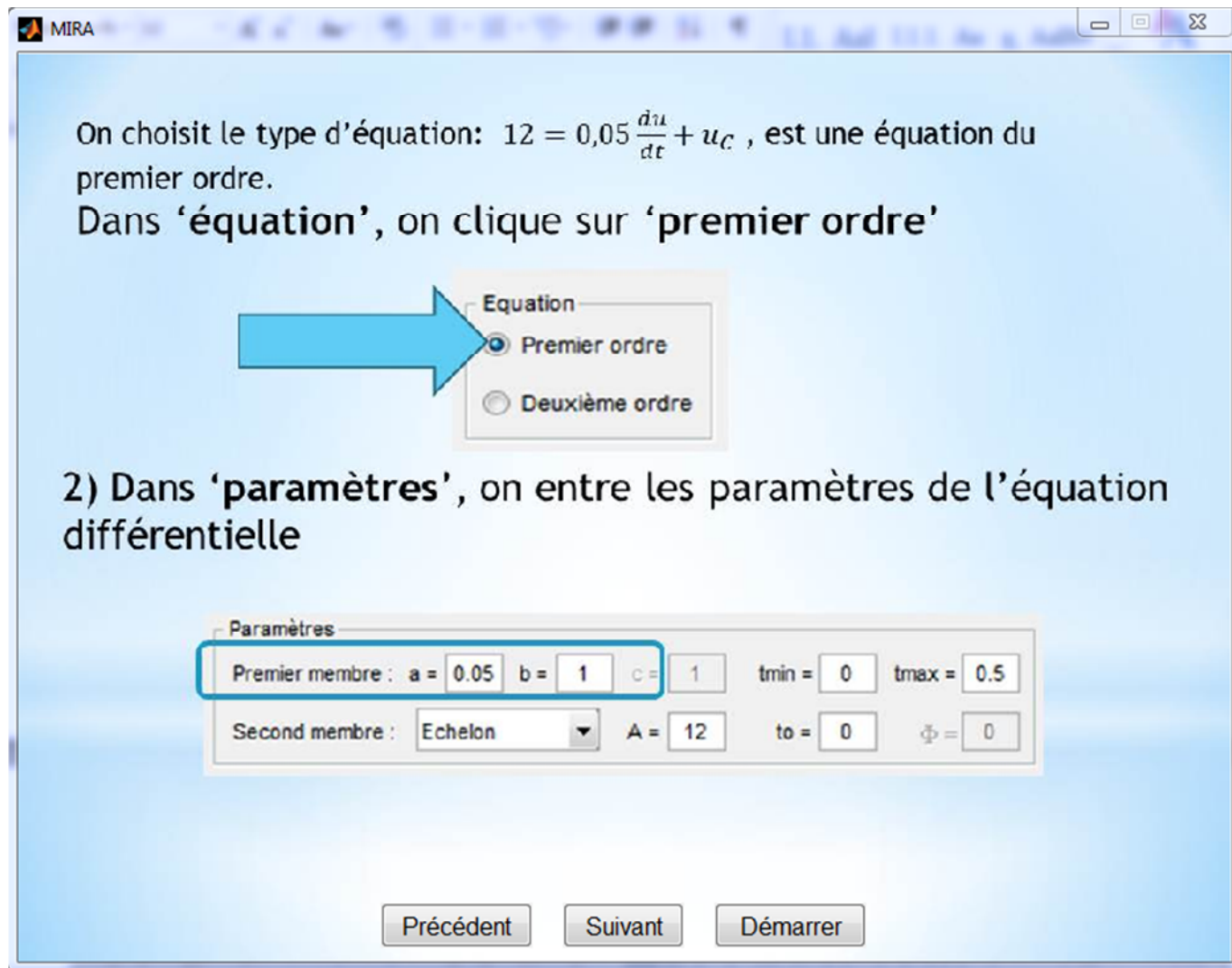


Figure 44. Exploitation de 'MIRA' : 'entrée des paramètres'

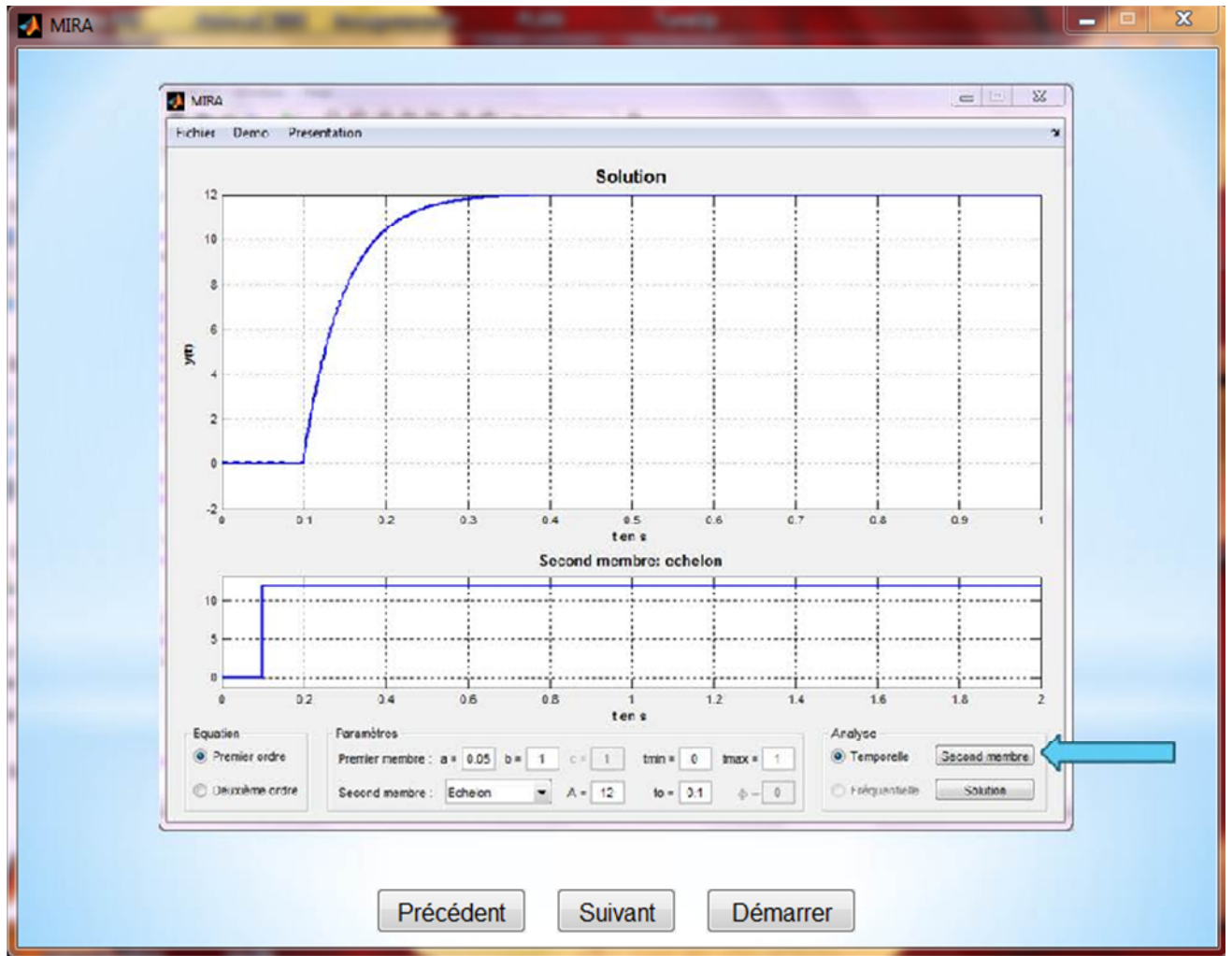


Figure 45. Figure de réponse d'un circuit RC soumis à un échelon de tension

La simulation étant terminée, il est temps d'interpréter le résultat et de conclure.

L'élève n'a qu'à appuyer sur 'suivant' ; quand il a compris il peut immédiatement commencer ses propres expériences et simulation en appuyant sur 'démarrer' à tout moment.

### III.2. Exemples d'exercices et TP [17] [18] [19]

On a élaboré un exemple d'exercice qu'on peut pratiquer avec 'MIRA' ainsi qu'un exemple de TP. Il faut juste remarquer que ce n'est que des exemples, on peut faire d'autres applications que ce soit en mécanique ou en électricité ou même en optique.

a. Exercices

i. Exercice 1 : étude de circuit oscillant

Classe : terminale S

**Enoncé**

On réalise le montage correspondant au schéma de la figure 46

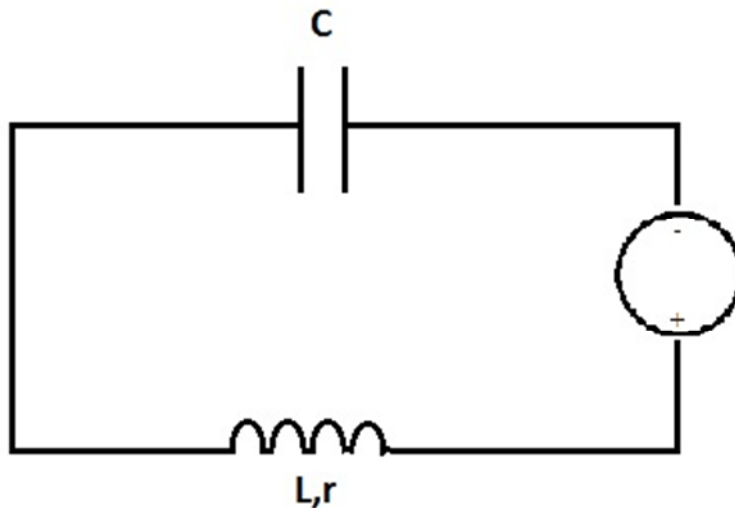


Figure 46 .circuit oscillant LC

1. Etablir l'équation différentielle du système
2. Représenter la solution de l'équation différentielle de ce système à l'aide de MIRA
3. Comment peut-on expliquer la diminution d'amplitude des oscillations au cours du temps
4. Déterminer ainsi la valeur du pseudo période du signal
5. Ici on peut considérer que la période propre et la pseudo-période ont la même expression. En déduire la valeur de la capacité  $C$  du condensateur et comparer avec l'indication du fabricant.

Données :

$$A=10 \text{ V}$$

$$r=10\Omega$$

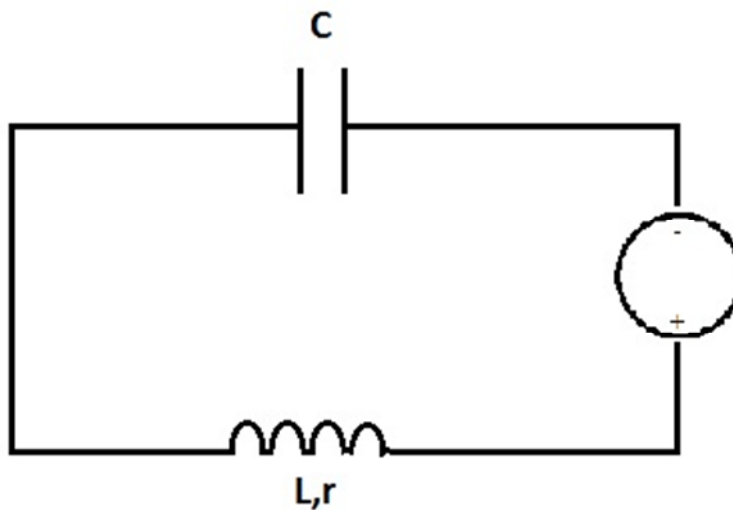
$$L=1.0\text{H}$$

$$C=10 \mu\text{F}$$

$$t_0=0.0001\text{s}$$

### Solution

1. Equation différentielle du système



D'après la loi des mailles on a :

$$u = u_C + u_L \quad (42)$$

$$\text{avec } u = A; u_L = L \frac{di}{dt} + ri$$

$$\text{D'où on a : } i = C \frac{du}{dt}$$

En remplaçant l'équation (42) on a :

$$A = u_C + ri + L \frac{di}{dt} \quad (43)$$



$$A = u_c + rC \frac{du}{dt} + LC \frac{d^2u}{dt^2}$$

$$10 = u_c + 10^{-4} \frac{du}{dt} + 10^{-5} \frac{d^2u}{dt^2} \quad (44)$$

## 2. Solution de l'équation différentielle

Le résultat est représenté par la figure 46

## 3. Interprétation de la diminution de l'amplitude des oscillations

On constate que l'amplitude maximale des oscillations d' $u_c$  décroît au cours du temps. Or, E l'énergie total du circuit électrique est égale à la somme de l'énergie stockée dans le condensateur  $E_c = \frac{1}{2} C u_c^2$  et de l'énergie emmagasinée dans la bobine  $E_L = \frac{1}{2} L i^2$

De plus, quand  $u_c$  est maximale,  $E = E_c = \frac{1}{2} C u_{c,max}^2$  car  $E_L = 0$

Comme  $u_c$  décroît, l'énergie du système décroît. C'est donc que le système perd de l'énergie, on dit qu'il est dissipatif. Ces pertes sont dues à la résistance interne de la bobine qui n'est pas idéale, qui génère des pertes par effet joule.

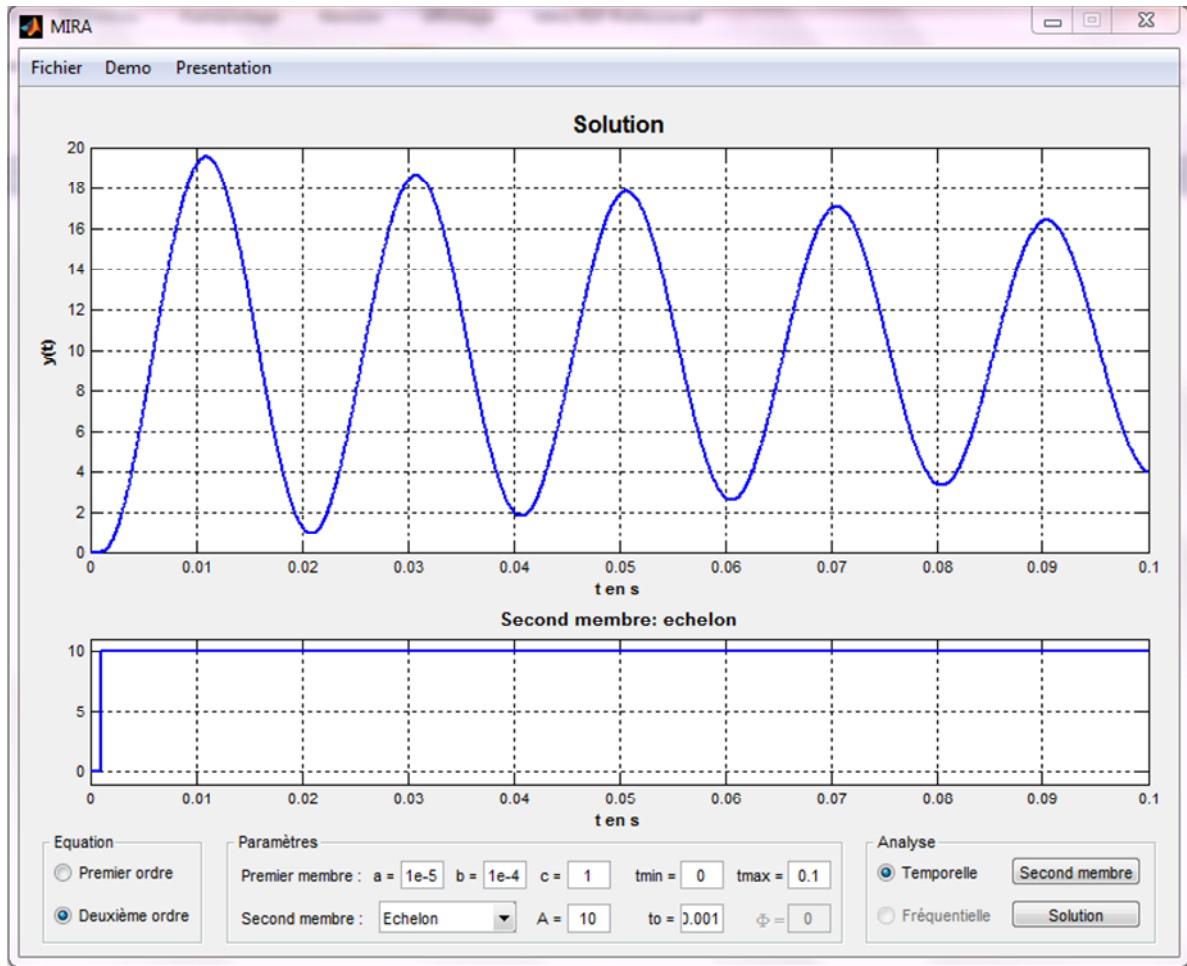


Figure 47. Étude du circuit oscillant LC avec MIRA

#### 4. Pseudo période du signal

Sur la courbe, on peut mesurer trois pseudo période  $T$ . donc  $3T=0.06s$

D'où  $T=0.02s$

#### 5. Valeur de la capacité

Pour un circuit LC, la période propre a pour expression  $T_0=2\pi \sqrt{LC}$

$$\text{Donc } T_0^2 = 4\pi^2 LC$$

D'où  $C = \frac{\tau_0^2}{4\pi^2 L}$

On obtient  $C=10.10^{-6}\text{F}$

On retrouve donc bien l'indication donné par le fabricant.

i. Exercice 2 : réponse d'un circuit RC à une impulsion

Classe : terminal S

**Enoncé**

Soit le circuit ci-dessous

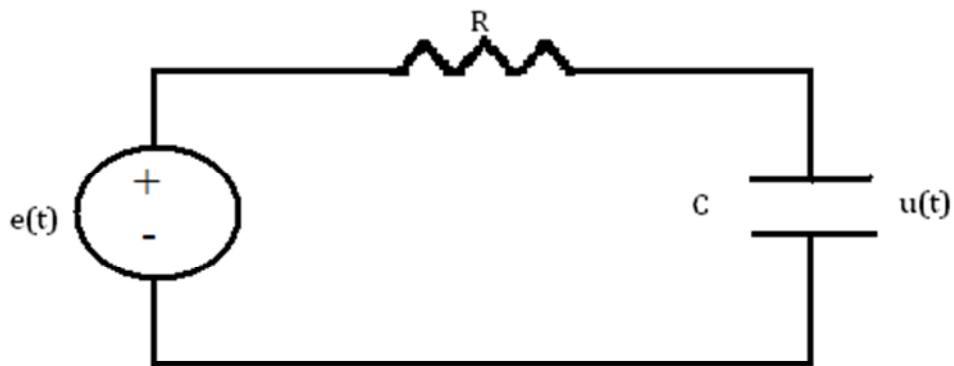


Figure 48. Schéma d'un circuit RC

Pour  $t < 0$ , le condensateur n'est pas chargé

On pose  $\tau = RC$

On donne  $R=100\text{k}\Omega$  et  $C=10\text{nF}$  pour l'impulsion on a :  $t_0=0$  et  $E=1\text{ V}$

1. Etablir l'équation différentielle du circuit
2. Représenter graphiquement la solution de l'équation

## 3. Interpréter la courbe et conclure

**Solution**

On a le circuit

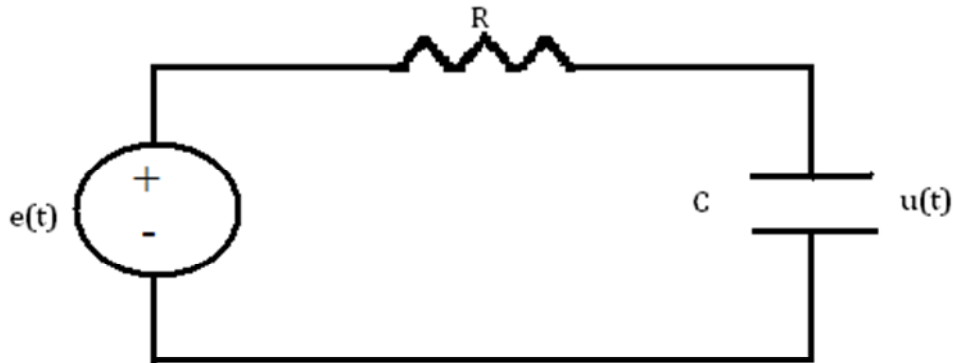


Figure 48. Schéma d'un circuit RC

## 1. L'équation différentielle du circuit est :

D'après la loi des mailles on a :

$$u = u_C + u_R \quad (45)$$

$$\text{avec } u = E; u_R = Ri \text{ et } i = \frac{dq}{dt}$$

$$\text{D'où on a : } i = C \frac{du}{dt}$$

En remplaçant l'équation (45) on a :

$$E = u_C + Ri$$

$$E = u_C + RC \frac{du}{dt} \quad (46)$$

## 2. Représentation graphique

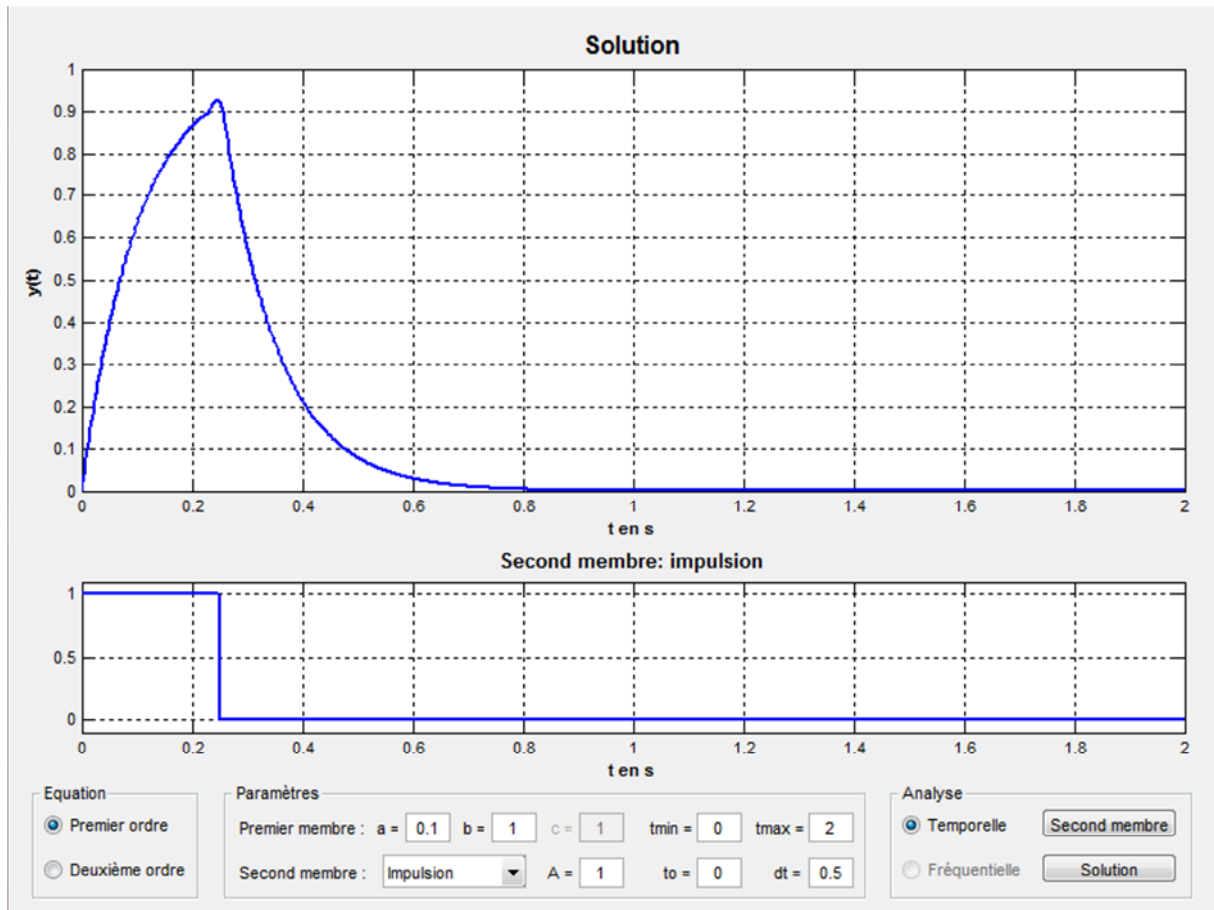


Figure 49. Charge et décharge d'un condensateur

### 3. Interprétation et conclusion

- Interprétation

Pour  $0 \leq t < t_1$  le condensateur se charge avec  $t_1=0.25s$

Pour  $t_1 \leq t$  le condensateur se décharge

$U_C(t)$  atteint son maximum à l'instant  $t_0$  et  $u_{\max} \cong E \frac{t_0}{\tau}$

- Conclusion

Dans la pratique, on impose une tension crête circuit pour voir la charge et la décharge du condensateur. Mais on constate qu'un crête bref et une impulsion présente le

même résultat.

*b. Tavaux pratiques TP*

*i. Réponse d'un dipôle RLC à un échelon de tension*

Classe : terminale S

Durée : 2h

1) Objectif

Etudier la réponse du circuit à un échelon de tension

2) Matériel utilisé

Ordinateur contenant l'application 'MIRA'

3) Mode opératoire

a) Avant la simulation

- Définir le système étudié
- Déterminer les variables liés au système
- Déterminer la grandeur d'entrée
- Faire le schéma du système
- Représenter le système à l'aide d'un schéma bloc
- Etablir l'équation différentielle

b) Simulation

- Démarrer 'MIRA'
- Identifier l'ordre de l'équation différentielle du système
- Introduire les paramètres de l'équation différentielle du système
- Choisir le second membre : échelon d'amplitude  $A=2$  V et  $t_0=0.1$ s
- Choisir l'intervalle de temps adéquat à l'étude du système
- Choisir le type d'analyse : analyse 'temporelle'
- Appuyer sur le bouton 'solution'
- Appuyer sur 'second membre'

4) Questions

- Donner les caractéristiques de l'évolution du système dans les différents cas et conclure

Cas :

- 1<sup>er</sup> cas oscillation quasi-libre :  $R=0$
- 2<sup>ème</sup> cas : régime périodique amorti  $R=10\Omega$
- 3<sup>ème</sup> cas : régime peu amorti  $R=40\Omega$
- 4<sup>ème</sup> cas : régime aperiodique  $R=8000\Omega$

On donne :

$$E=2 \text{ V}$$

$$C= 0.5 \text{ mF}$$

$$L=1.0\text{H}$$

### **Compte rendu**

#### 1) Objectif

Etudier la réponse du circuit à un échelon de tension

#### 2) Matériel utilisés

Ordinateur contenant l'application 'MIRA'

#### 3) Paramètre liés au système

- Résistance R
- Bobine L
- Condensateur C

#### 4) Paramètre qui pilote le système

Tension sortant du générateur.  $E=2 \text{ V}$

5) Schéma du circuit

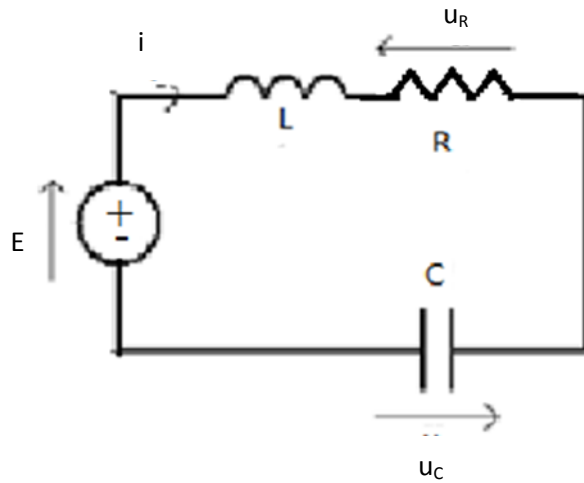


Figure 50. Circuit RLC

6) Schéma bloc

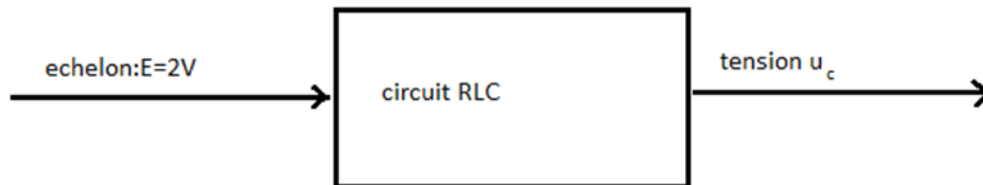


Figure 51. Schéma bloc du circuit RLC

7) Etablissement de l'équation différentielle

D'après la loi d'additivité des tensions

On a :  $u = u_L + u_R + u_C$  (47)

avec  $u = E, u_R = Ri, u_L = L \frac{di}{dt}$



$$E = L \frac{di}{dt} + Ri + u_C$$

$$\text{or } u = \frac{q}{C} \text{ et } i = \frac{dq}{dt}$$

$$d' où E = LC \frac{d^2 u_C}{dt^2} + RC \frac{du_C}{dt} + u_C \quad (48)$$

## 8) Résultats

Pour  $R=0$ , oscillation libre

On a l'équation différentielle suivant :

$$E = LC \frac{d^2 u_C}{dt^2} + u_C \quad (49)$$

$$\text{AN : } 2 = 1 * 0.510^{-3} \frac{d^2 u_C}{dt^2} + u_C$$

$$\text{Alors : } 2 = 0.510^{-3} \frac{d^2 u_C}{dt^2} + u_C \quad (50)$$

Graphe :

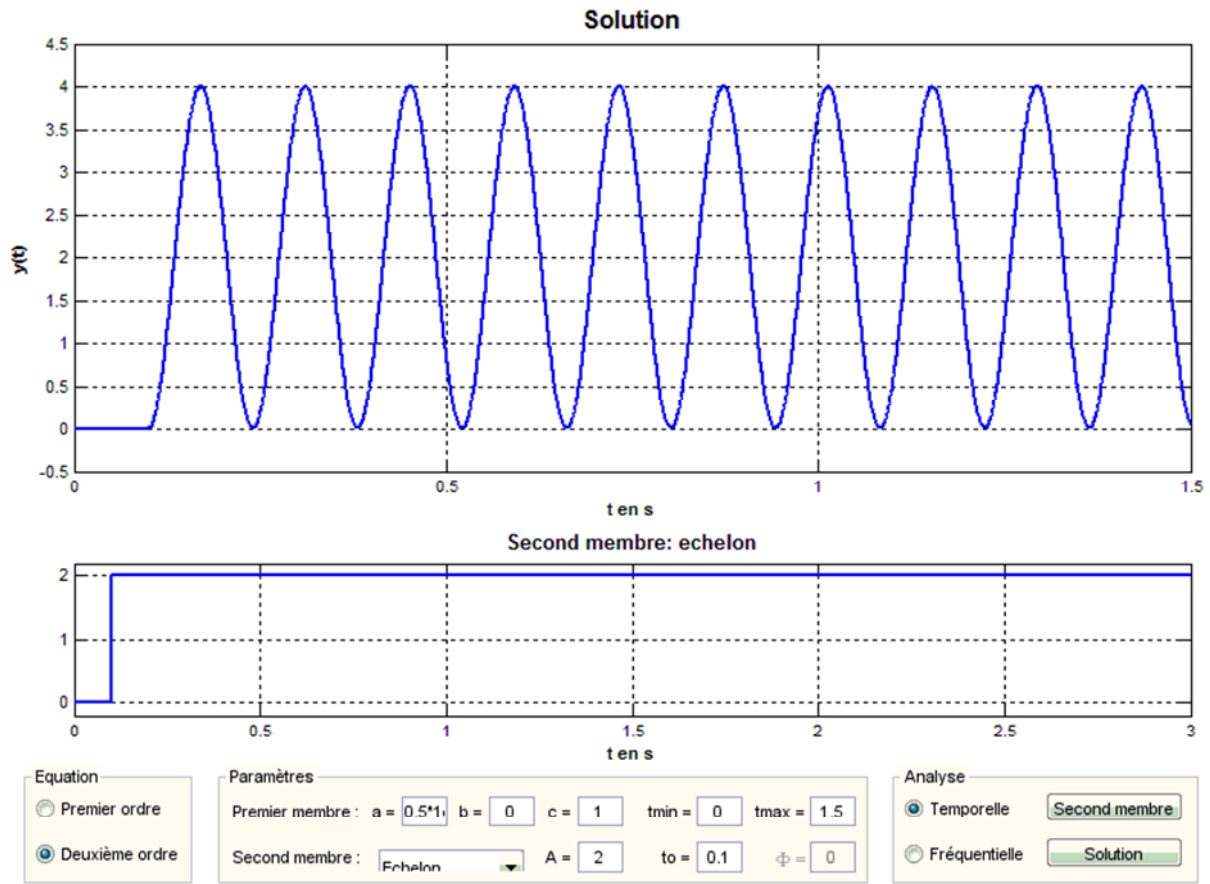


Figure 52. Oscillation libre

Pour  $R=10\Omega$  : régime périodique amorti,

$$2 = 1 \cdot 0.510^{-3} \frac{d^2 u_C}{dt} + 2.10^3 \cdot 0.510^{-2} \frac{du_C}{dt} + u_C$$

$$2 = 0.510^{-3} \frac{d^2 u_C}{dt} + 0.510^{-2} \frac{du_C}{dt} + u_C \quad (51)$$

Graphes :

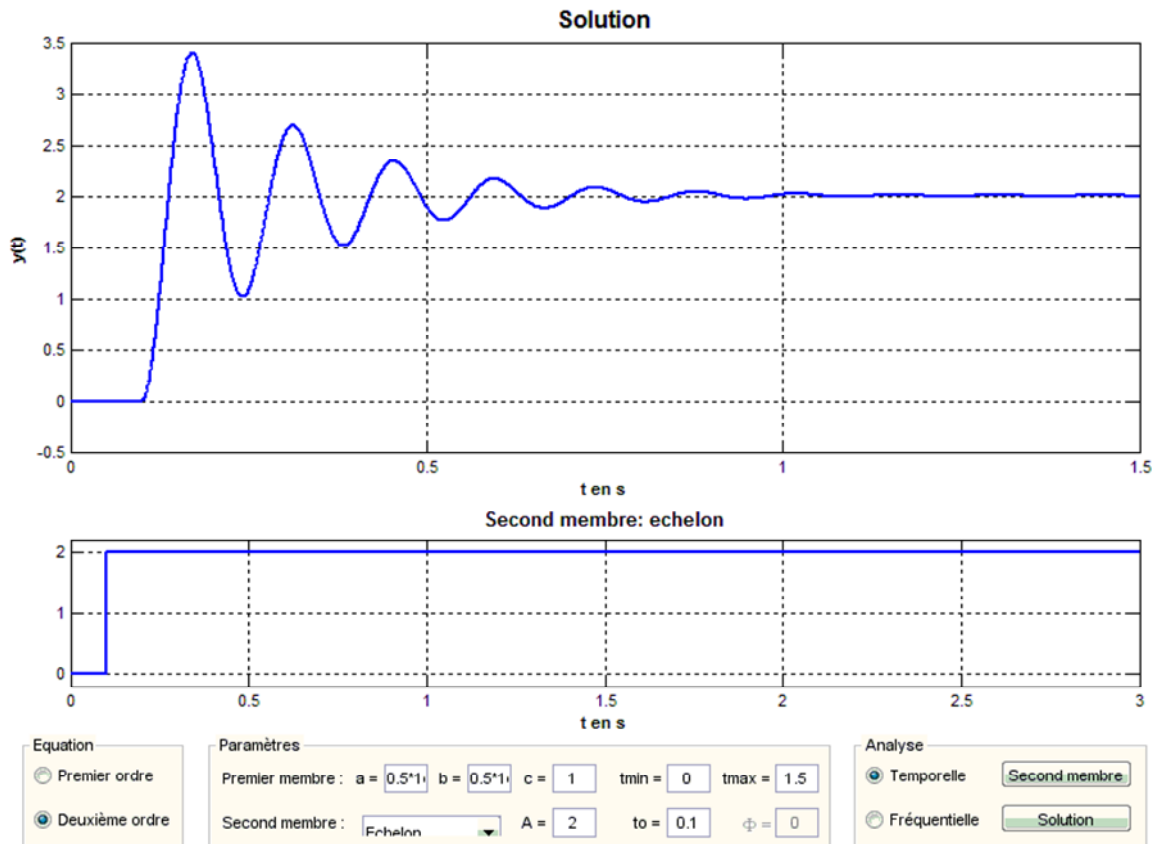


Figure 53. Oscillation pseudo périodique

Pour  $R=40\Omega$  on a un régime peu amorti:

$$2 = 0.510^{-3} \frac{d^2 u_C}{dt} + 0.02 \frac{du_C}{dt} + u_C \quad (52)$$

Graphe :

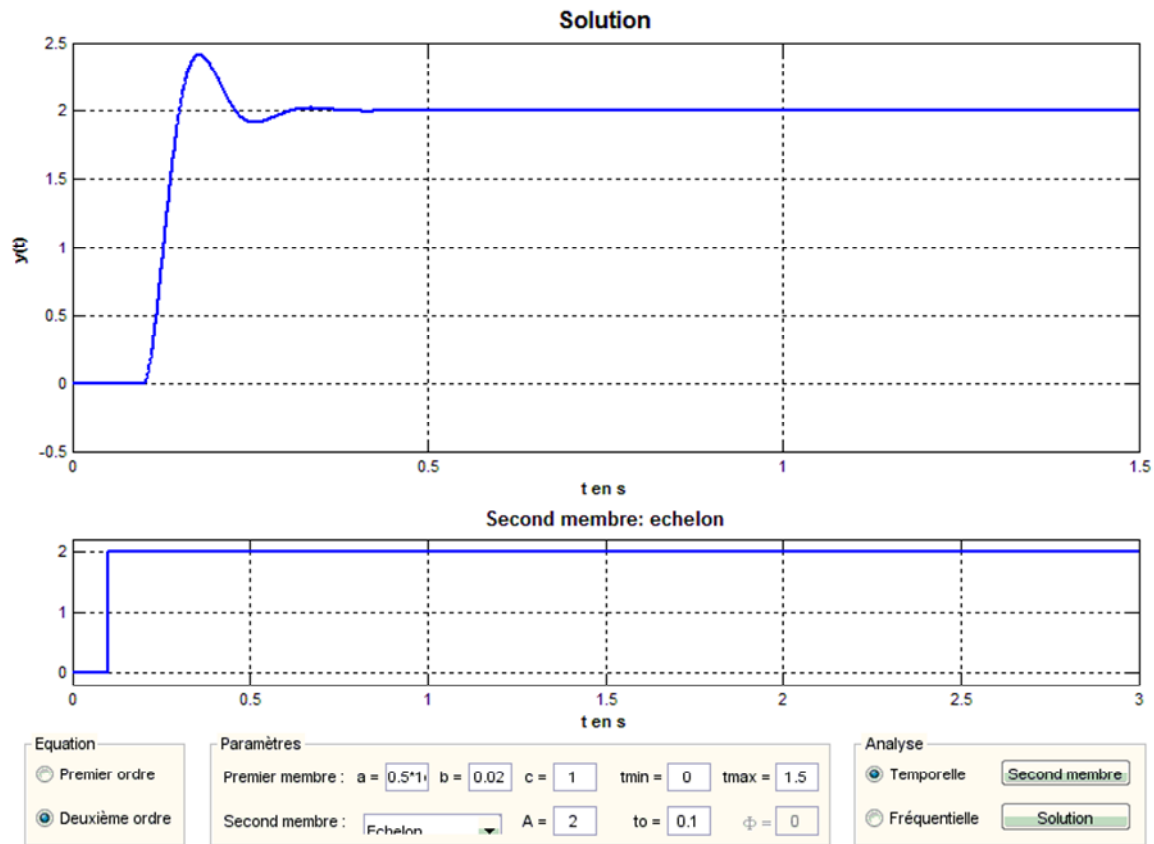


Figure 54. Régime peu amorti

Pour,  $R=2k\Omega$  : régime apériodique

On a l'équation :

$$2 = 0.5 \cdot 10^{-3} \frac{d^2 u_C}{dt} + \frac{du_C}{dt} + u_C \quad (53)$$

## Graphes

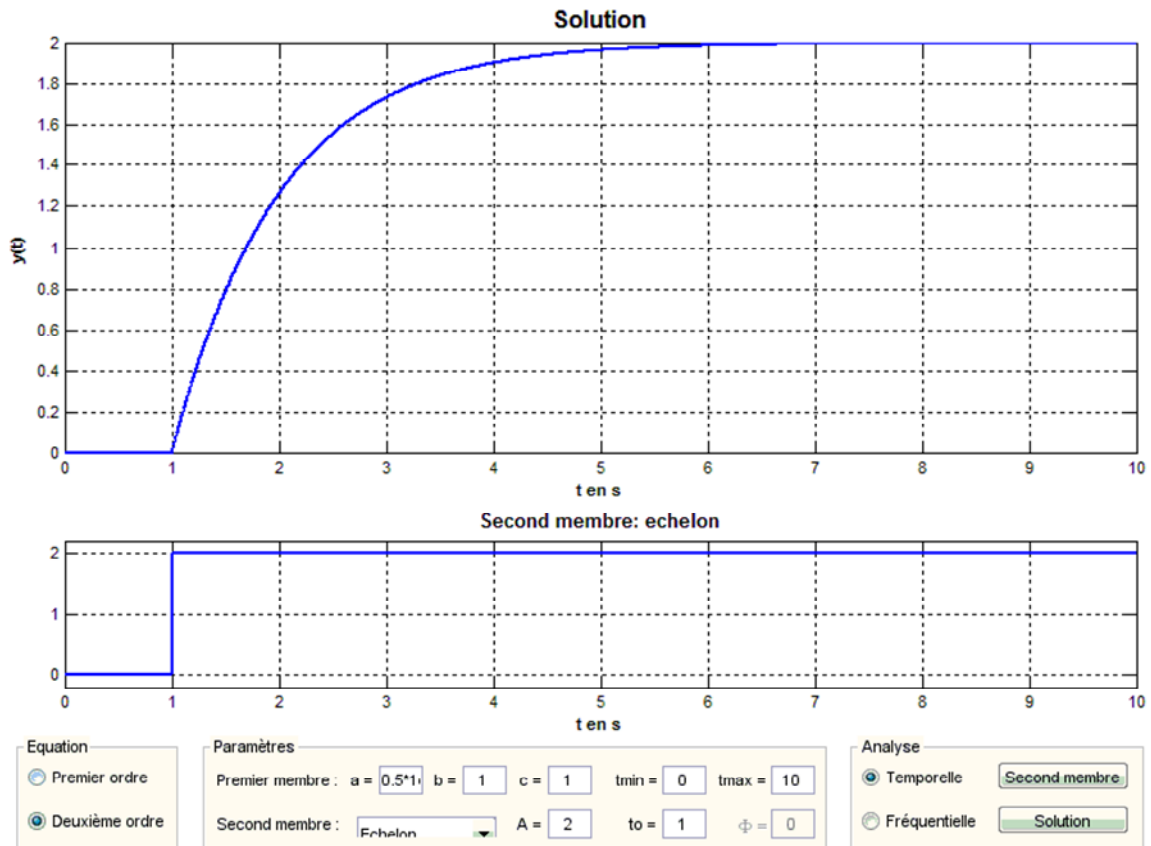


Figure 55. Régime apériodique

### 9) Interprétation

En augmentant  $R$ , l'amortissement est plus rapide.

Les oscillations disparaissent pour une valeur particulière  $R_C$  de la résistance.

L'établissement du courant dans le circuit est accompagné d'échange d'énergie entre la bobine et le condensateur. La résistance  $R$  provoque une dissipation d'énergie par effet joule lors de chacun de ces échanges, entraînant un amortissement plus ou moins rapide des oscillations

## 10) Conclusion

La valeur de la résistance  $R$  influe considérablement sur les variations de l'intensité du courant  $i$  et de la tension  $u_C$ .

- Régime oscillatoire amorti : lorsque la valeur de  $R$  n'est pas trop grande, un régime oscillatoire peut s'établir pour  $R=0$  et  $R=1k\Omega$ . les oscillations sont plus ou moins amorties ; l'amortissement est d'autant plus important que la valeur de la résistance  $R$  est grande
- Régime apériodique : c'est le régime obtenu pour toute valeur de  $R$  supérieure à une valeur particulière  $R_C$  appelée résistance critique, le régime continu est atteint sans oscillation

### ii. Modélisation et équation différentielle

Classe : terminale S

Durée : 2h

#### 1) Objectif

Voir l'influence de la bobine sur l'établissement du courant

Retrouver expérimentalement l'inductance de la bobine pour la comparer à celle du fabricant.

#### 2) Matériel utilisé

Ordinateur contenant l'application 'MIRA'

#### 3) Mode opératoire

##### a) Avant la simulation

- Définir le système étudié
- Déterminer les variables liés au système
- Déterminer la grandeur d'entrée
- Faire le schéma du système

- Représenter le système à l'aide d'un schéma bloc
- Etablir l'équation différentielle

b) Simulation

- Démarrer 'MIRA'
- Identifier l'ordre de l'équation différentielle du système
- Introduire les paramètres de l'équation différentielle du système
- Choisir le second membre : échelon d'amplitude  $A=10\text{ V}$  et  $t_0=0.001\text{s}$
- Choisir l'intervalle de temps adéquat à l'étude du système
- Choisir le type d'analyse : analyse 'temporelle'
- Appuyer sur le bouton 'solution'
- Appuyer sur 'second membre'

4) Questions

- Par une analyse dimensionnelle, montrer que la constante de temps à la dimension d'un temps. Déterminer la constante du temps  $\tau$  de ce circuit
- En déduire la valeur de  $L$  et comparer la avec l'indication du fabricant
- En conclusion, quelle est l'influence de la bobine sur l'établissement du courant lors de la fermeture du circuit. Vérifier l'indication du fabricant

**Compte rendu**

1) Objectif

Voir l'influence de la bobine sur l'établissement du courant

Retrouver expérimentalement l'inductance de la bobine pour la comparer à celle du fabricant.

2) Matériel utilisés

Ordinateur contenant l'application 'MIRA'

3) Paramètre liés au système

- Résistance  $R$

- Bobine L

4) Paramètre qui pilote le système

Tension sortant du générateur.  $E=10\text{ V}$

5) Schéma du circuit

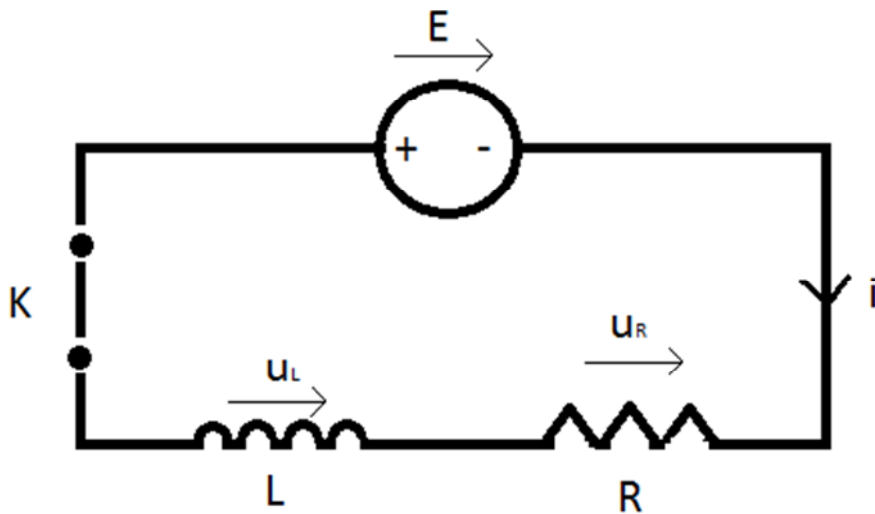


Figure 56. Schéma du circuit RL

6) Schéma bloc

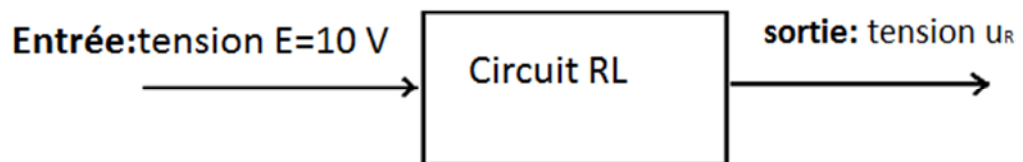


Figure 57. Schéma bloc du circuit RL

7) Etablissement de l'équation différentielle

D'après la loi des mailles on a :

$$u = u_L + u_R \quad (54)$$

$$\text{avec } u = E; u_R = Ri \text{ et } u_L = L \frac{di}{dt}$$



En remplaçant l'équation (54) on a :

$$\text{Or } i = \frac{u_R}{R}$$

$$E = L \frac{di}{dt} + Ri \quad (55)$$

$$E = i + \frac{L}{R} \frac{di}{dt}$$

On a l'équation

$$10 = i + 10^{-3} \frac{di}{dt} \quad (56)$$

8) Résultats

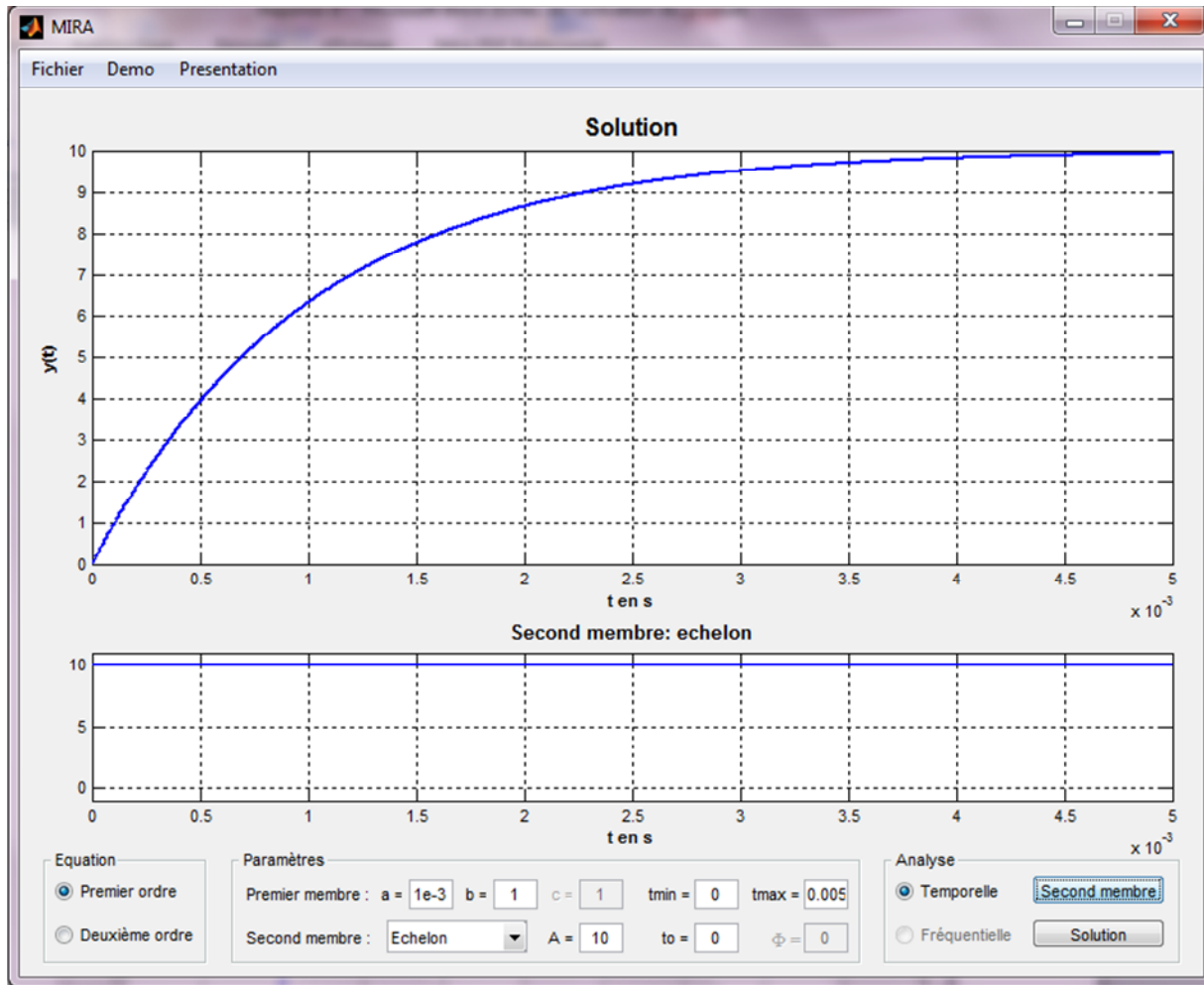


Figure 58. Circuit RL soumis à un échelon de tension

### 9) Interprétation

- Lors de la fermeture du circuit, la bobine s'oppose à l'établissement du courant. C'est pour cette raison que l'intensité croît progressivement vers sa valeur maximale au cours du temps comme on le voit sur la courbe. S'il n'y avait pas de bobine, dès la fermeture du circuit, l'intensité atteindrait immédiatement sa valeur maximale.
- Le terme  $(L/R)$  correspond à la constante de temps  $\tau$  de ce circuit.

#### Analyse dimensionnelle

On sait d'une part que  $u_L = L \frac{di}{dt}$  donc  $L = \frac{u_L}{\frac{di}{dt}}$

$$\text{Donc } [L] = \frac{[U]}{\frac{[I]}{[T]}} = \frac{[U][T]}{[I]}$$

D'autre part, on sait que  $R = \frac{u_R}{I}$  donc  $[R] = \frac{[U]}{[I]}$

$$\text{Ainsi } \left[\frac{L}{R}\right] = \frac{\frac{[U][T]}{[I]}}{\frac{[U]}{[I]}} = [T]$$

On montre donc que la dimension de  $\frac{L}{R}$  est bien celle d'un temps

- Détermination de  $\tau = \frac{L}{R}$

Il est stipulé que :

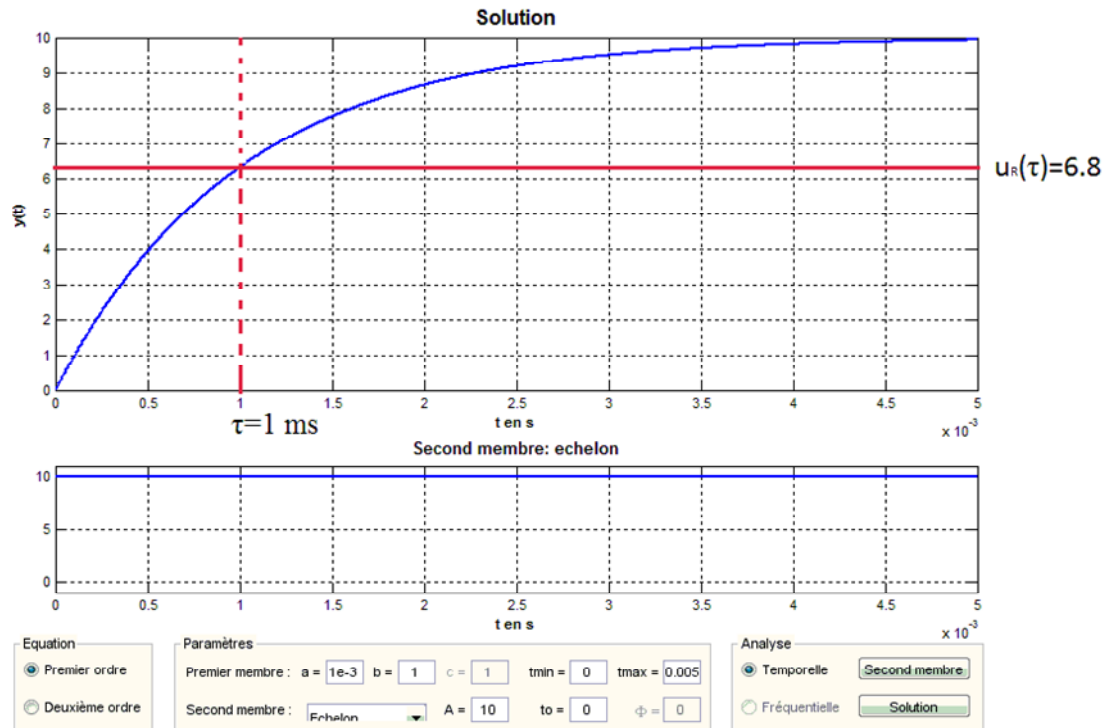
(57)

$$u_R(\tau) = 0.63 u_{Rmax}.$$

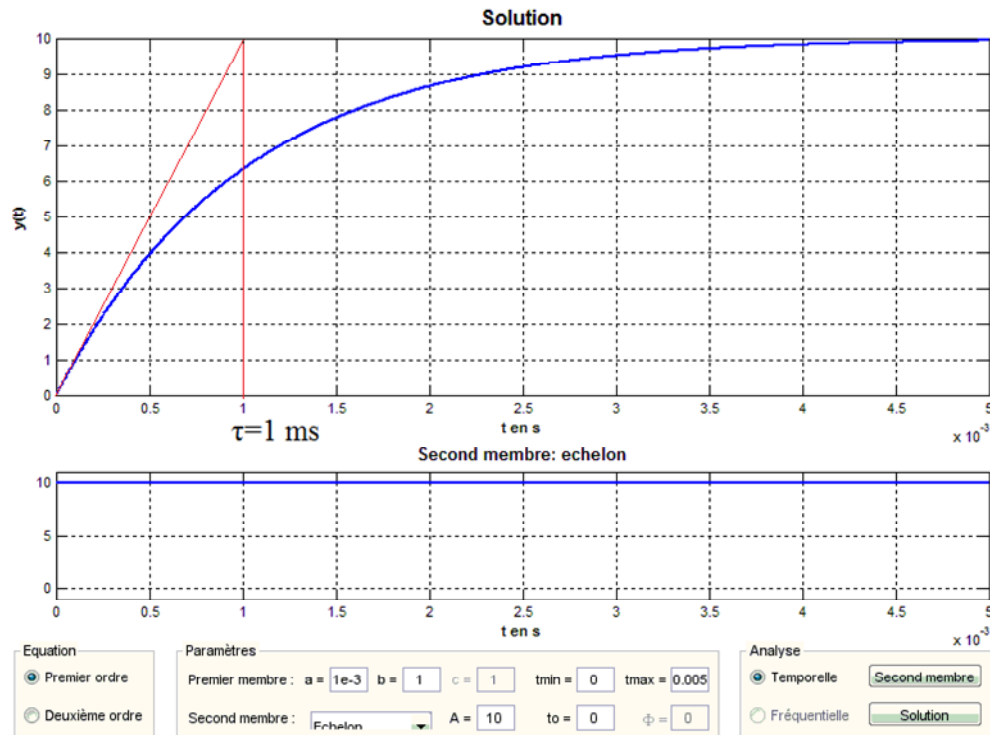
Or, on peut déterminer sur la courbe que  $u_{Rmax} = 10 \text{ V}$

$$u_R(\tau) = 6.3 \text{ V}$$

On trace donc la droite de l'équation 57 sur le graphique. Elle coupe la courbe expérimentale en  $\tau=1\text{ms}$

Figure 59. Détermination de  $\tau$ 

On pouvait aussi déterminer  $\tau$  en traçant la tangente à la courbe expérimentale en  $t=0$ . cette tangente coupe l'asymptote en  $t=\tau$

Figure 60. Détermination de  $\tau$  par la méthode de la tangente

- Détermination de L

On a vu que  $\tau = \frac{L}{R}$  et que  $\tau = 1 \text{ ms} = 10^{-3} \text{ s}$

Donc  $L = R \cdot \tau$

AN:  $L = 10^3 \cdot 10^{-3} = 1.0 \text{ H}$

$L = 1.0 \text{ H}$

### Conclusion

Lors de la fermeture du circuit, la bobine s'oppose à l'établissement du courant

Lors du calcul,  $L = 1.0 \text{ H}$ , ce qui correspond bien à la valeur donnée par le fabricant.

Canevas de compte rendu

**Compte rendu  
de TP**

Nom :  
Prénom (s):  
Classe:  
N°:

Figure 61. Première page du canevas de compte rendu

# Titre

## Objectif(s)

### Matériels utilisés


#### Paramètres liés au système

#### Entrée ou grandeur qui pilote le système

#### Schéma du système

#### Schéma bloc

Entrée



Sortie

Figure 62. Forme générale du compte rendu de TP : 'canevas'

Toute les comptes rendu de Travaux Pratiques sera dorénavant de la forme de cette 'canevas' qu'on a créé expressément pour l'étude des systèmes linéaires.

### **Conclusion**

Le problème de l'enseignement/ apprentissage de la physique réside dans la façon dont on transmet les connaissances. Au lycée, la physique est abordée comme un chapitre de mathématique. de ce fait la plupart des élèves sont complètement déboussolés. Il faut donc rendre concret ce qui est abstrait pour une meilleur compréhension. Une approche liés à la réalité et proche de l'environnement des élèves les aiderait beaucoup plus à comprendre la physique. Du fait que la physique est une science expérimentale, la majeure partie du programme doit être traité en terme de travaux pratique, le manque de matériel faisant rage, il faut trouver le meilleur moyen de concilier le réelle et l'expérimentation d'où la modélisation par le biais de la simulation : 'MIRA'. C'est pourquoi l'étude des systèmes linéaires est le meilleur moyen d'enseigner la physique au lycée. L'élève ne résoudra pas l'équation mais interprétera les graphes de 'MIRA'. Une approche focalisée sur le système lui-même. De plus l'étude constitue une bonne introduction et transition pour préparer l'étude supérieure scientifique.



## CONCLUSION

Actuellement, avec l'avancée de la technologie, l'enseignement des matières scientifiques, tel que la physique prend de nouvelle tournure. En effet, l'utilisation de la nouvelle technologie telle que le TIC offre de nouvelle perspective à l'enseignement apprentissage de la physique.

Dans notre pays, les lacunes provoquées par le manques de ressources que se soient matériels, financières et humaines ne facilitent pas la tâche des professeurs et en conséquence rend la compréhension de la physique difficile aux élèves. De ce fait, une étude focalisée sur les phénomènes plus proche de la réalité et plus physique motiverait les élèves à comprendre la physique. D'où l'étude des systèmes linéaires élémentaire. L'analyse des systèmes linéaires élémentaires constitue une nouvelle approche de l'enseignement puisque l'étude a pour but d'étudier et de comprendre le phénomène ou le fait proprement dite. Cette approche plus proche du réel aiderait plutôt les élèves à se concentrer sur les problèmes physiques plutôt que les problèmes mathématiques. De plus, avec l'aide de 'MIRA' la mathématique ne serait plus un problème.

MIRA a été conçu dans le but de réduire les différents problèmes liés à la mathématique. On estime que si l'élève utilise MIRA, il devrait réduire ses problèmes liés à la mathématique et donner beaucoup plus de finesse à ses raisonnements physique. Même si l'interprétation des graphes nécessite certaine connaissance mathématique, ce n'est pas un obstacle d'autant plus les équations différentielles à résoudre est beaucoup plus difficile que l'interprétation d'une graphique. Dans ce point de vue, ce logiciel réduit le problème lié au matériel et à la compréhension de la physique alors on le qualifiera d'ergonomique et on a alors atteint notre objectif d'un matériel de deux en un.

MIRA a été conçu à l'aide de MATLAB/SIMULINK qui est un outil exceptionnel, dans la mesure où on peut faire et développer tout dans MATLAB. On peut créer, simuler, visualiser, perfectionner et même commander. Dans ce cas, n'importe qui peut exploiter MATLAB, seulement ces recommandations s'imposent : premièrement, il vous faut avoir une certaine notion de programmation, en plus il vous faut maîtriser le domaine que vous allez exploiter. Comme MATLAB est environnement gigantesque, alors il vous faut être concis et précis et vous fixer un objectif précis dont vous devez atteindre pour éviter les pertes de temps. De ce fait, MATLAB est un outil que peut exploiter une personne dont ces objectifs

sont clairs et fixes.

Deuxièmement MATLAB est très grand au point de vue de sa taille, alors il requiert une certaine place dans votre disque dur. Il y a des indications de performance quand vous utilisez MATLAB. En effet, il faut suivre ces indications d'installation à la lettre pour éviter le problème de performance de MATLAB. La dernière version de MATLAB nécessite une puissance considérable du processeur de votre ordinateur ; alors pour un ordinateur peu performant, choisissez MATLAB dont la version est plus ancienne tel que MATLAB 7.3 ou 7.4.

Finalement, MATLAB est un outil créé pour les personnes qui doivent immédiatement exploiter un produit. Une multitude de bibliothèque qui sont complètement différent ; de ce fait, personne ne peut maîtriser MATLAB c'est un environnement trop grand pour qu'on le maîtrise. Mais on peut juste exploiter une partie.

'MIRA' est un début, pour une entrée en la matière, on peut toujours le développer et le parfaire. C'est un outil très ergonomique et malléable et un outil pratique spécialement pour Madagascar. Une touche de rénovation pour une bonne formation. Comme MIRA est un outil mais pas un didacticiel, de ce fait on n'a pas fait d'évaluation car l'évaluation est fait seulement dans le cas où il y a une séquence d'enseignement. Il n'y a pas de chapitre d'enseignement de physique spécifique pour exploiter 'MIRA' on peut l'utiliser dans le domaine de la mécanique, l'électricité, l'optique et même la chimie dans la mesure où on peut modéliser votre système en système invariant linéaire élémentaire.

## ANNEXES

### Annexe 1 : équation différentielle

Dans l'étude des masses suspendue à un ressort, d'un pendule de torsion, d'un pendule simple ou des oscillateurs en général on est amené à déterminer l'équation horaire. Ces équations, fonctions du temps sont solution d'équation différentielle déterminée.

#### 1) Equation différentielle du premier ordre à variable séparés

On appelle 'équations différentielle linéaire du premier ordre une 'équations différentielle de la forme :

$$ay' + by = f(x)$$

Ou a, b sont des constantes et f(x) sont des fonctions connues de x et ou y est la fonction de x à déterminer.

Solution de l'équation homogène :

$$\begin{aligned} ay' + by = 0 &\Leftrightarrow \frac{y'}{y} = \frac{-b}{a} \\ &\Leftrightarrow \frac{dy}{y} = \frac{-b}{a} dx \quad \text{méthode de séparation de variable} \\ &\Leftrightarrow \int \frac{dy}{y} = \int \frac{-b}{a} dx = \frac{-b}{a} \int dx \\ &\Leftrightarrow \ln(|y|) = \frac{-b}{a} x + C \quad \text{avec } C \in \mathbb{R} \\ &\Leftrightarrow |y| = e^C e^{\frac{-b}{a} x} \\ &\Leftrightarrow y = \pm e^C e^{\frac{-b}{a} x} \\ &\Leftrightarrow y(x) = k e^{\frac{-b}{a} x} \quad \text{en posant } k = \pm e^C \quad (k \text{ est donc un réel quelconque non nul}) \end{aligned}$$

Solution de l'équation avec second membre :  $y = y_n + y_p$  dépend du second membre

Théorème :

La solution générale y(x) de l'équation  $ay''(x) + by'(x) + cy(x) = f(x)$  est la somme

$y(x) = y_s(x) + y_p(x)$  où :

–  $y_s(x)$  est la solution générale de l'équation  $ay''(x) + by'(x) + cy(x) = 0$  (dite sans second membre)

– et  $y_p(x)$  est une solution particulière de l'équation  $ay''(x) + by'(x) + cy(x) = f(x)$  (dite avec second membre)

second membre	solution particulière
$f(x) = C$ où $C$ est une constante	si $b \neq 0$ , une solution particulière sera  $y_p(x) = \frac{C}{b}$
	et si $b = 0$ , une solution particulière sera  $y_p(x) = \left(\frac{C}{b}\right) * x$

Second membre	Solution particulière
$f(x) = P(x)$ où $P$ est un polynôme de degré $n$ avec $n \in \mathbb{N}^*$	On cherche une solution sous la forme $y_p(x) = Q(x)$ où $Q$ est un polynôme tel que :
	si $b \neq 0$ , alors $\deg(Q) = n$
	si $b = 0$ , alors $\deg(Q) = n + 1$

Second membre	Solution particulière
$f(x) = P(x) e^{sx}$ où $P$ est un polynôme de degré $n$ et $s$ est un réel	On cherche une solution sous la forme $y_p(x) = Q(x) e^{sx}$ où $Q$ est un polynôme tel que  si $s \neq \frac{-b}{a}$ , alors $\deg(Q) = n$  si $s = \frac{-b}{a}$ , alors $\deg(Q) = n+1$

Second membre	Solution particulière
$f(x) = a \cos(\omega x + \varphi) + b \sin(\omega x + \varphi)$ où $\omega$ est un réel non-nul	On cherche une solution sous la forme $y_p(x) = A \cos(\omega x + \varphi) + B \sin(\omega x + \varphi)$

## 2) Equation différentielle du second ordre à coefficient constant et sans second membre

On appelle équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants une équation différentielle linéaire du second ordre telle que  $a$ ,  $b$  et  $c$  soient des constantes :

$$ay'' + by' + cy = f(x) \text{ avec } a \neq 0 \text{ (H)}$$

### Méthode de résolution

On cherche s'il existe des solutions  $y(x)$  ayant la même forme que celles des équations homogènes associées aux équations différentielles linéaires du premier ordre à coefficient constant, c'est à dire de la forme :

$$y(x) = e^{rx} \text{ ou } r \text{ est un coefficient réel.}$$

Pour une telle fonction, on a :  $y'(x) = r e^{rx}$  et  $y''(x) = r^2 e^{rx}$ . En remplaçant dans (H), on obtient :

$$ar^2 e^{rx} + br e^{rx} + c e^{rx} = 0$$

Et donc  $r$  doit être solution de l'équation :

$$Ar^2 + br + c = 0$$

Dite équation caractéristique associée à (H).

La solution générale  $y_s(x)$  de l'équation sans second membre (H) dépend alors de la valeur des racines de cette équation caractéristique.

Second membre	Solution particulière
$f(x)=P(x)$ où $P$ est un polynôme de degré $n$ avec $n \in \mathbb{N}$	On cherche une solution sous la forme : $y(x)=Q(x)$  où $Q$ est un polynôme tel que :
	Si $c \neq 0$ , alors $\deg(Q)=n$
	Si $c=0$ et $b \neq 0$ , alors $\deg(Q)=n+1$ et $\text{val}(Q)=1$
	Si $c=0$ et $b=0$ , alors $\deg(Q)=n+2$

Second membre	Solution particulière
$f(x) = P(x) e^{sx}$ où $P$ est un polynôme de degré $n$ et $s$ est un réel	On cherche une solution sous la forme $y_p(x) = Q(x) e^{sx}$ ou $Q$ est un polynôme
	Si $s$ n'est pas racine de l'équation caractéristique, alors $\deg(Q)=n$
	Si $s$ est racine de l'équation caractéristique, alors $\deg(Q)=n+1$

	Si $s$ est racine double de l'équation caractéristique, alors $\deg(Q)=n+2$
Second membre	Solution particulière
$f(x) = \alpha \cos(\omega x + \varphi) + \beta \sin(\omega x + \varphi)$  où $\omega$ est un réel non-nul	Si $i\omega$ n'est pas racine de l'équation caractéristique, on cherche une solution sous la forme :  $y_p(x) = A \cos(\omega x + \varphi) + B \sin(\omega x + \varphi)$
	Si $i\omega$ est racine de l'équation caractéristique, on cherche une solution sous la forme :  $y_p(x) = A \cos(\omega x + \varphi) + B \sin(\omega x + \varphi)$

**Annexe 2 : transformé de Laplace [20]**1) Définition

A toute fonction réelle du temps  $f(t)$ , on associe une fonction  $F(p)$  de la variable complexe  $p=a+j\omega$

$$L[f(t)] = F(p) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt} dt$$

2) Propriété

linéarité	$L[\alpha f_1(t) + \beta f_2(t)] = \alpha F_1(p) + \beta F_2(p)$
Dérivation	$L[f] = pF(p) - f(0^-)$
Intégration	$L\left[\int_0^t f(u)du\right] = \frac{F(p)}{p}$
Théorème de retard	Soit une fonction $f(t)$ causale , c'est-à-dire $f(t)=0$ pour $t<0$ Alors $L[f(t - \tau)] = e^{-\tau p} F(p)$
Translation dans le complexe	$F(p + a) = L[e^{-at} f(t)]$
Théorème de valeur finale	$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = \lim_{p \rightarrow 0} pF(p)$ lorsque cette limite existe
Théorème de valeur initiale	$\lim_{t \rightarrow 0^+} f(t) = f(0^+) = \lim_{p \rightarrow +\infty} pF(p)$



## 3) Table des transformé de Laplace

$f(t).u(t)$	$F(p) = \mathcal{L} [f(t)]$	$f(t).u(t)$	$F(p) = \mathcal{L} [f(t)]$
$K$	$\frac{K}{p}$	$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{\omega^2 + p^2}$
$K.t$	$\frac{K}{p^2}$	$\cos \omega t$	$\frac{p}{\omega^2 + p^2}$
$e^{-a.t}$	$\frac{1}{p+a}$	$e^{-a.t} \cdot \sin \omega t$	$\frac{\omega}{\omega^2 + (p+a)^2}$
$t^n$	$\frac{n!}{p^{n+1}}$	$e^{-a.t} \cdot \cos \omega t$	$\frac{p}{\omega^2 + (p+a)^2}$
$1 - e^{-\frac{t}{\tau}}$	$\frac{1}{p(1 + \tau.p)}$	$sh \omega t = \frac{e^{\omega t} - e^{-\omega t}}{2}$	$\frac{\omega}{p^2 - \omega^2}$
$e^{-a.t} \cdot t^n$	$\frac{n!}{(p-a)^{n+1}}$	$ch \omega t = \frac{e^{\omega t} + e^{-\omega t}}{2}$	$\frac{p}{p^2 - \omega^2}$

### Annexe 3 : distribution de Dirac

#### Définition

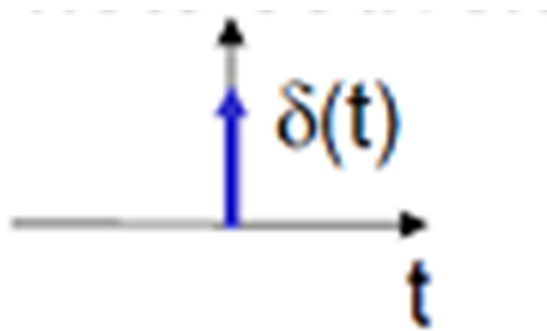
Si  $\varphi$  est une fonction, la distribution de Dirac ou impulsion de Dirac est définie par :

$$\delta(\varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t) \cdot \delta(t) dt = \varphi(0)$$

=>Dirac appliqué à une fonction= la valeur de la fonction en 0

Remarque : il n'existe pas de fonction  $\delta$  vérifiant cette propriété

Cependant pour des raisons de commodités, on la note souvent comme une fonction de  $t$  :  $\delta(t)$  qu'on représente par :



Représentation de fonction  $\delta(t)$

#### Propriété

- Dirac représente un signal de durée théoriquement nulle et d'énergie finie (=1).
- Notation incorrecte mais commode :  $\delta(t_1) = \delta(t - t_1)$
- Une impulsion de Dirac à l'instant  $t_1$  donne :  $\delta(t_1)(\varphi) = \varphi(t_1)$
- Autre propriété :  $x(t) \cdot \delta(t - t_0) = x(t_0) \cdot \delta(t - t_0)$

## BIBLIOGRAPHIE ET WEBOGRAPHIE

- [1] MINZU, V. (1999). *commande automatique des systèmes linéaires continus*. Paris: Ellipse
- [2] JOSEPH, d. (1994). *système asservis cours et problème, 700 problèmes résolus*. Paris: MC GRAW HILL
- [3] J, M. (1974). *cours d'automatique II: systèmes asservis lineaires. stabilités, précision. cours et exercices avec solutions*. Paris: MASSON
- [4] [http://sciences-indus-cpge.papanicola.info/IMG/pdf/SA2 Systèmes linéaires continus et invariants.pdf](http://sciences-indus-cpge.papanicola.info/IMG/pdf/SA2_Systèmes_linéaires_continus_et_invariants.pdf), aout 2011
- [5] [http://sciences-indus-cpge.papanicola.info/IMG/pdf/SA3 Analyse\\_temporelle\\_des\\_systèmes\\_linéaires.pdf](http://sciences-indus-cpge.papanicola.info/IMG/pdf/SA3_Analyse_temporelle_des_systèmes_linéaires.pdf), aout 2011
- [6] [http://sciences-indus-cpge.papanicola.info/IMG/pdf/SA4-Analyse\\_frequentielle\\_des\\_systemes\\_lineaires.pdf](http://sciences-indus-cpge.papanicola.info/IMG/pdf/SA4-Analyse_frequentielle_des_systemes_lineaires.pdf)
- [7] <http://uuu.enseirb.fr/~pistre/Cours%20Systemes/Systeme%20Lineaire/systlineaires.pdf>
- [8] <http://books.google.mg/books?id=Z527jli8QgC&pg=PA80&dq=etude+temporelle+d e+syst%C3%A8me+du+premier+ordre+et+second+ordre&hl=mg&sa=X&ei=hH4dT9CxM4ueOovHxbol&ved=0CCcQ6AEwAA#v=onepage&q=etude%20temporelle%20de%20syst%C3%A8me%20du%20premier%20ordre%20et%20second%20ordre&f=false>, décembre 2011
- [9] MAINGUENAUD. (1972). *cours d'automatique I: systèmes asservis continus*. Paris: MASSON
- [10] <http://books.google.mg/books?id=03L6S6cwRe4C&pg=PA25&dq=regime+transitoir e+regime+permanent+definition&hl=mg&sa=X&ei=Dn8dT83MF4aZOqn7-LkL&ved=0CCsQ6AEwAQ#v=onepage&q=regime%20transitoire%20regime%20perma nent%20definition&f=false>, novembre 2011
- [11] [http://www.greyc.ensicaen.fr/~massieu/PDF%20et%20pps/T%20du%20Signal%20%20IUT/TdS\\_%20TD4.pdf](http://www.greyc.ensicaen.fr/~massieu/PDF%20et%20pps/T%20du%20Signal%20%20IUT/TdS_%20TD4.pdf), aout 2011
- [12] <http://books.google.mg/books?id=7OWE8uEiaVIC&pg=PA119&lpg=PA119&dq=etu>

- de+du+syst%C3%A8me+du+premier+ordre+et+second+ordre&source=bl&ots=7\_SG0m4AQ8&sig=3k63a3wPBLU3j3CXVI9v-fqRDVo&hl=en&sa=X&ei=jH0dT5jSJ8jPhAe\_sJGtDA&sqi=2&redir\_esc=y#v=onepage&q=etude%20du%20syst%C3%A8me%20du%20premier%20ordre%20et%20second%20ordre&f=false, aout 2011
- [13] <http://the.mathworks.com/> juillet 2011
- [14] GAUDELI. (1996). *Précis de génie logiciel*. Paris: MASSON.
- [15] GILLE. (1993). *theorie et calcul des asservissement lineaires*. Paris: MASSON.
- [16] MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SECONDAIRE ET DE L'EDUCATION DE BASE. (1998). *Programme scolaire*. Antananarivo: CNAPMAD
- [17] BAUME-ELFASSI, F. d. (1999). *rapido-Bac Terminale S physique enseignement obligatoire et de specialité*. Paris: Hachette.
- [18] DURANDEAU, J. P. (1995). *Physique Tesm S*. Paris: Hachette.
- [19] L, A. J. (1994). *Précis d'électronique cours et exercices resolu*. Paris: BREAL.
- [20] HURLEY, J. F. (1981). *intermediate calculus*. Philadelphia: Saunders college

## **Titre : « ETUDE DES SYSTEMES LINEAIRES ELEMENTAIRES AVEC 'MIRA' »**

**Nombre de pages** : 91

**Nombre de tableaux** : 2

**Nombre de figures** : 61

**Nombre des annexes** : 3

### **RESUME**

Nous avons opté pour l'étude des systèmes qui englobe la majeure partie du programme du second cycle du niveau secondaire. Cette approche est focalisée sur l'étude du comportement du système et l'évolution de ses différentes variables. Notre travail consiste à développer un logiciel 'MIRA' sous MATLAB /SIMULINK capable de représenter des graphiques, qui permettra de résoudre les problèmes liés au système dynamique linéaire. MIRA a pour but de réduire les problèmes liés aux mathématiques et d'améliorer l'enseignement apprentissage de la physique en exploitant le TIC (Technologie de l'information et de la Télécommunication). Dans la première partie est présentée les systèmes invariants linéaires. Dans la deuxième partie on aborde 'MIRA' : son élaboration, sa conception et sa présentation. Quelques exemples de travaux pratiques et des exercices sont présentés dans la troisième partie de l'ouvrage ; ces exercices et travaux pratiques sont surtout basés sur l'électricité. Un canevas de compte rendu est conçu spécialement pour accompagner les travaux pratiques.

**Mots clés** : système linéaire, équation différentielle, programmation, MATLAB/SIMULINK, représentation graphique, MIRA.

### **ABSTRACT**

We chose to study the major part of system which is treated in high school. This topic is focused on the study of the state and the evolution of his parameter submitting under solicitation. This work consists in working out a software application called 'MIRA' under MATLAB/SIMULINK which can display graphics. MIRA is designed to reduce problems related to mathematics and improve learning physics by using information and communication technology (ICT). In the first part, we deal with dynamic linear system. In the second part, we talk about 'MIRA': its development, its design and its presentation. Some exercises and practical classes were made at the third part, to show how to use MIRA. The practical class is design with framework of proceedings

**Keywords**: linear system, differential equation, programming, MATLAB/SIMULINK, plotting data, MIRA

**Auteur**: ROUEL MALALA Tahiry

**Mail**: [meltahiry@gmail.com](mailto:meltahiry@gmail.com)

**Adresse**: lot 51 C cite Desportes Ankadivato-Antananarivo 101

**Rapporteur**: RASOANAIVO René Yves